Планарные графы

Укладки графов

Планарные графы

Планарный граф может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Такое изображение – карта графа. Карта связная, если планарный граф связный.

Область карты графа – часть плоскости, ограниченная контуром из ребер. Степень области – количество ребер, составляющих границу области.

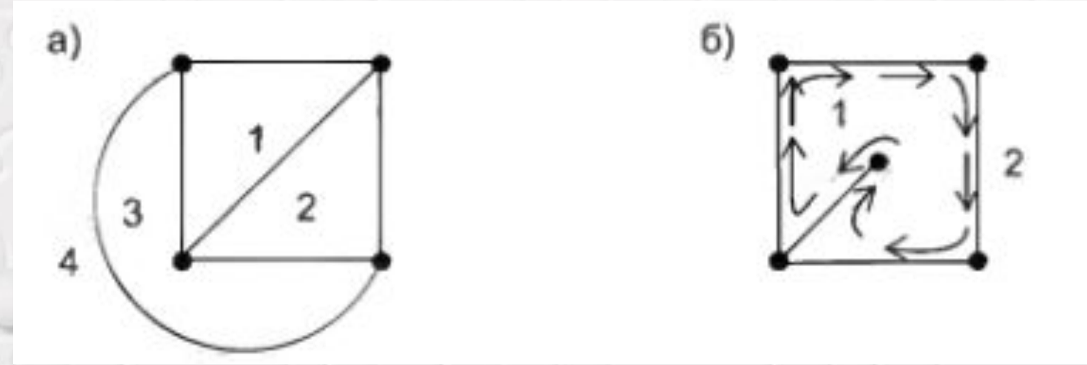


Рис.15. Планарные графы и их области

Все четыре области графа рис.15а – треугольные, $D_r = 3$.

В графе рис.15б область 2 имеет степень 4, а внутренняя область 1 – степень 6, поскольку ребро, ориентированное внутрь этой области, проходится дважды.

Планарные графы

Теорема о сумме степеней всех областей планарного графа может быть, даже и несвязного):

$$\sum_r D_r = 2|L|$$

т.е. сумма эта равна удвоенному количеству ребер.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству теоремы о сумме степеней всех вершин: каждое ребро учитывается в этой сумме дважды, поскольку входит в граничный контур двух смежных областей или является «внутренним».

Планарные графы

Теорема Эйлера для связных планарных графов:

$$|W| - |L| + |R| = E = 2,$$

т.е. количество вершин минус количество ребер плюс количество областей есть величина постоянная (константа Эйлера E), имеющая значение 2.

Например, для графа рис.15а сумма степеней 4 областей равна 3*4 = 12, а ребер 6.

В графе рис.15б сумма 6 + 4 = 10, и ребер – 5.

Планарные графы

Доказательство теоремы ведется с использованием своеобразной индукции. Для тривиального графа (первого порядка) $|W| = 1$, $|L| = 0$, $|R| = 1$ теорема справедлива.

Любой другой планарный граф получается из этого тривиального выполнением в любой последовательности всего двух операций:

- добавление вершины;
- добавление ребра.

Планарные графы

В первом случае количество вершин и количество ребер увеличиваются на 1, количество областей сохраняется и сохраняется значение E (рис.16).

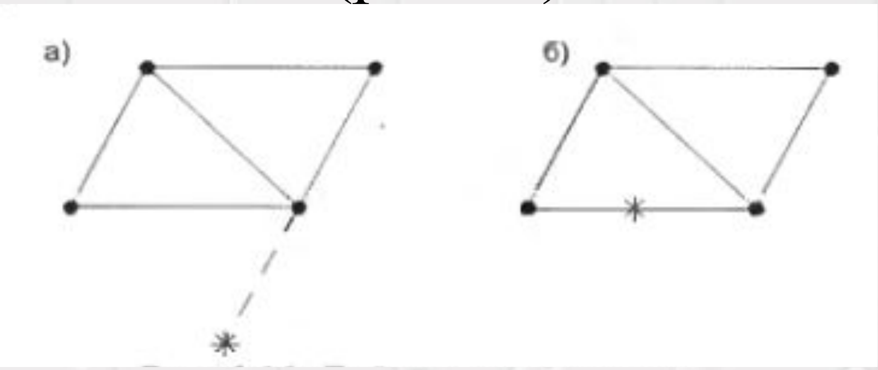


Рис.16. Добавление вершины

Во втором случае (граф – не полный), сохраняется количество вершин, увеличиваются на 1 количество ребер и количество областей – с тем же эффектом сохранения E (рис.17).

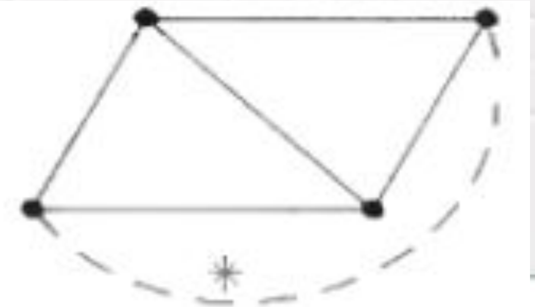


Рис.17. Добавление ребра

Планарные графы

Теорема Эйлера справедлива и в отношении **правильных выпуклых многогранников:**

$$|W| - |L| + |G| = E = 2,$$

здесь G – множество граней (табл. 6.1).

Таблица 1

№	Многогранник	Вершин (+)	Ребер (–)	Граней (+)	E
1	Тетраэдр	4	6	4	2
2	Куб (гексаэдр)	8	12	6	2
3	Октаэдр	6	12	8	2
4	Додекаэдр	20	30	12	2
5	Икосаэдр	12	30	20	2

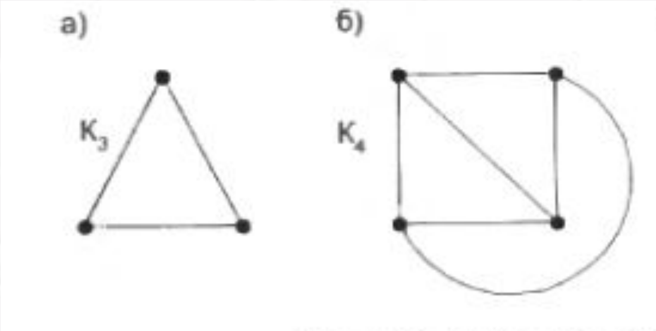
Многогранники вида 1, 3, 5 имеют грани в форме правильного треугольника, вида 2 – в форме квадрата, вида 4 – в форме правильного 5-угольника.

Планарные графы

Соотношение между количеством ребер пленарного графа и количеством вершин в нем:

$$|L| <= 3\ |W| - 6, \quad n \geq 3.$$

Наихудшие условия для выполнения этого неравенства – в полном графе, когда количество ребер максимально возможное.



Для полных графов К3 и К4 (рис.6а, 6.б) неравенство выполняется «на грани» (как равенство)

$$3 \leq 3 * 3 - 6 = 3, \quad 6 \leq 3 * 4 - 6 = 6.$$

Планарные графы

Теперь, как и в случае доказательства теоремы Эйлера, полный граф (К3 или К4) расширяется путем добавления вершины и ребер, с нею связанных. Если связность нового графа сохраняется при добавлении всего одного ребра (рис.18), это неравенство только усиливается – слева приращение +1, а справа 3 * (+1) = +3.

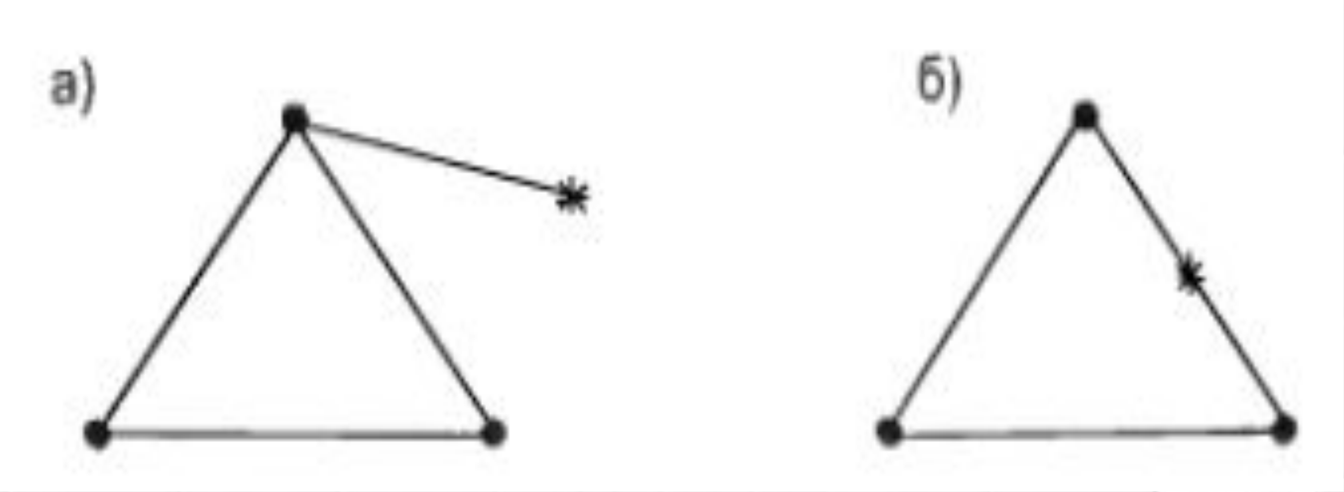


Рис.18. Расширение К3 (минимальный вариант)

Планарные графы

Поскольку в полном графе (K_3, K_4) области треугольные (и это соответствует максимально возможному количеству ребер), с новой вершиной могут быть связаны не более трех новых ребер (рис.19)

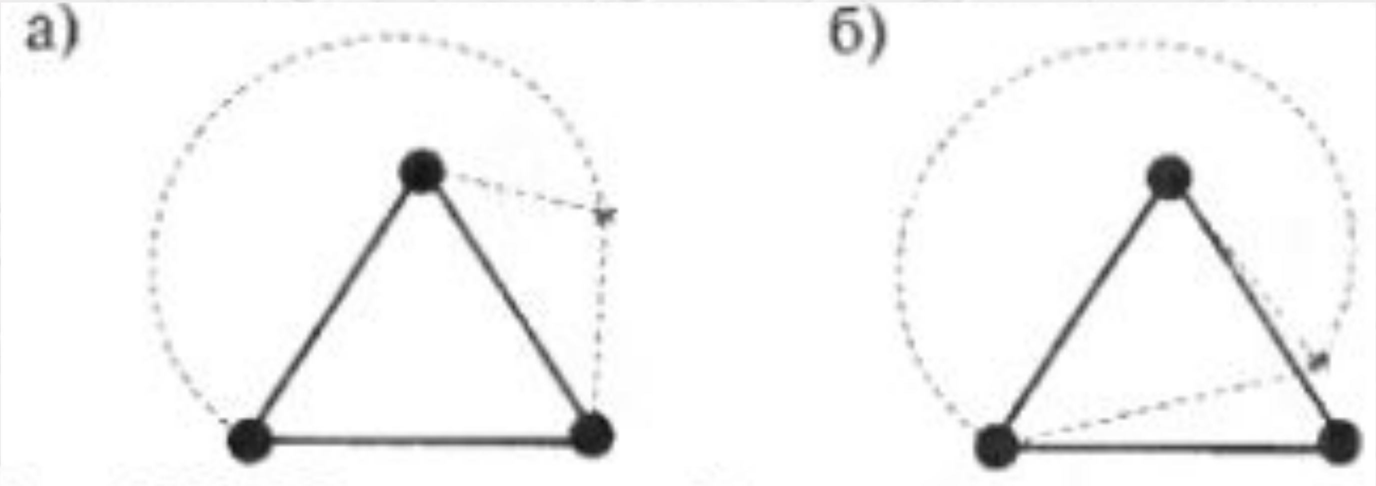


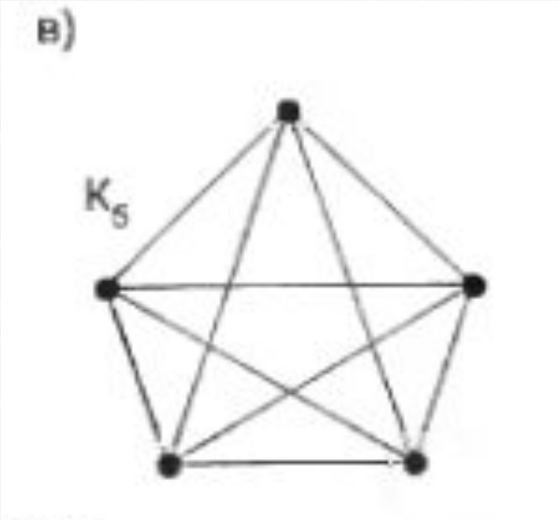
Рис.19. Расширение К3 (максимальный вариант)

Как видно, и в этом случае «статус-кво» не нарушается – и слева, и справа приращение +3.

Планарные графы

Граф $К_3$ (рис.6 в) – непланарный. Доказательство этого следует из приведенного выше соотношения для ребер и вершин планарного графа – доказательство «от противного» (| L | = 10, | W | = 5):

$$10 \leq 3*5 - 6 = 9?$$



Планарные графы

Полный двудольный граф К$_3$, (рис.4) – также непланарный. Доказательство здесь трехступенчатое. Сначала используется теорема Эйлера:

$$6 - 9 + |R| = 2, \quad |R| = 5.$$

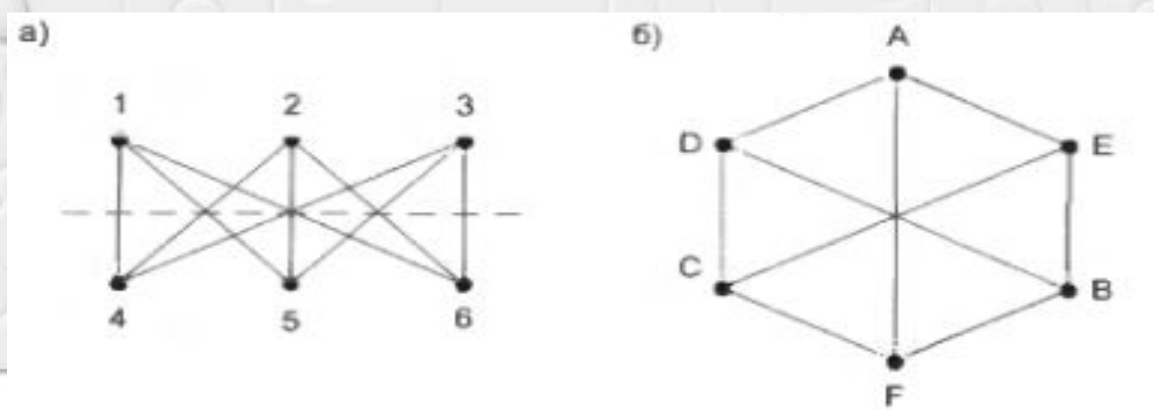
Далее можно видеть (рис.4а), степень каждой области К$_{3,3}$ не меньше 4:

$$Dr \geq 4.$$

Используя теорему о сумме степеней всех областей графа, получим

$$2\,|L| = \sum_r D_r \geq 4 \textbf{ x } 5 = 20,$$

$$2 * 9 = 18 \geq 20\ ?$$



Планарные графы

Необходимое и достаточное условие планарностн графа сформулировано в **теореме К. Куратовского,** польского математика. Вводится операция **элементарного стягивания** – две смежные вершины сливаются, количество ребер при этом сокращается (рис.20).

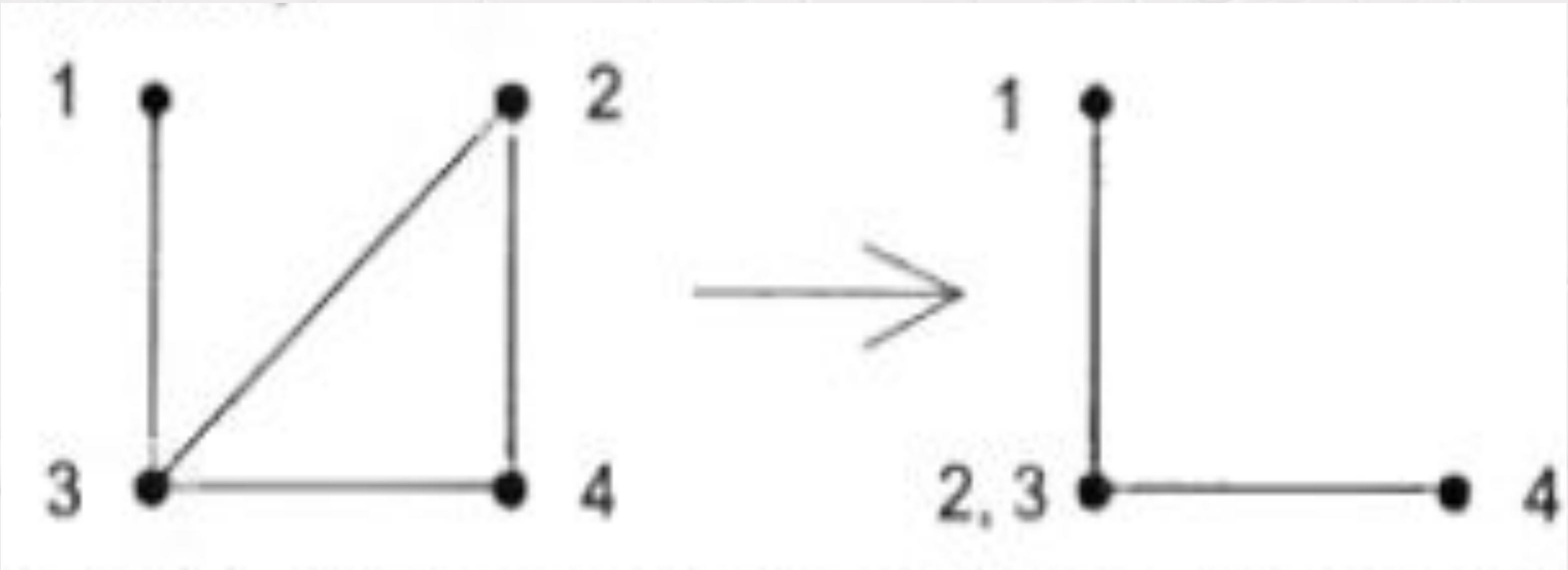


Рис.20. Пример элементарного стягивания

Планарные графы

Теорема Куратовского утверждает:

граф планарный тогда и только тогда, когда в процессе выполнения операций элементарного стягивания он не содержит подграфов вида K_5 и $K_{3,3}$

Tom Sawyer Software

www.tomsawyer.com

Функциональность пакета

- Стили укладок
- Спецификация портов
- Геометрические атрибуты вершин и ребер

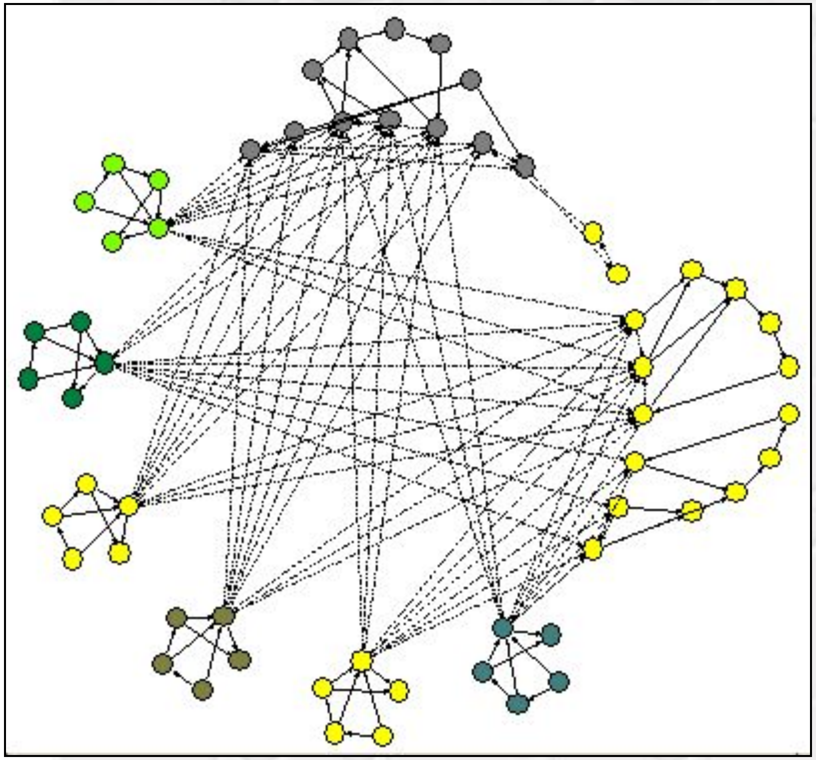
Vitaly Pechenkin, Saratov, Russia, SSTU

Layout styles

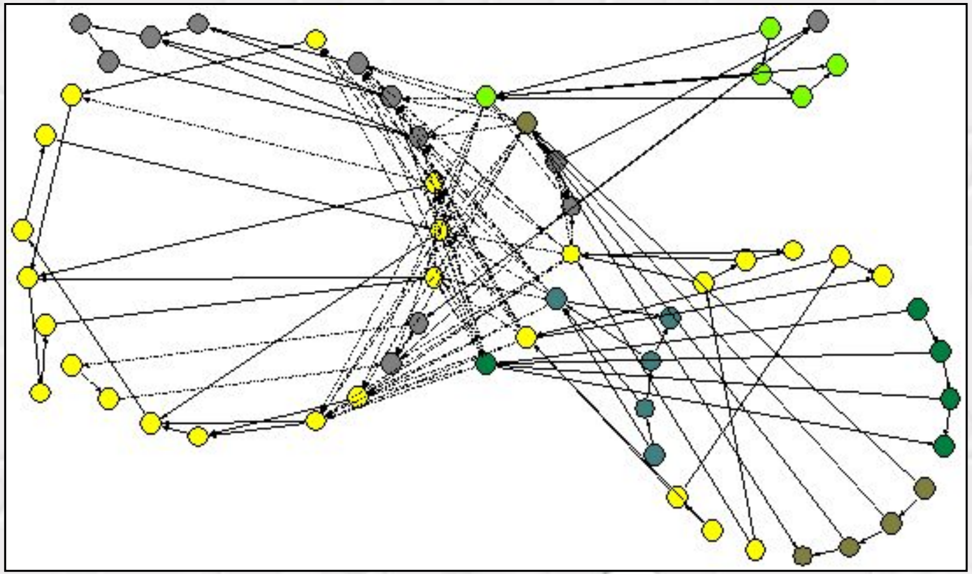
Циклическая укладка

Подчеркивает групповую структуру. Разбивает вершины на группы взаимосвязанных. Каждая группа помещается на окружность с учетом связанности вершин.

Ограничение размера кластера (группы) Min=4, Max=20



Ограничение размера кластера (группы) Min=10, Max=20

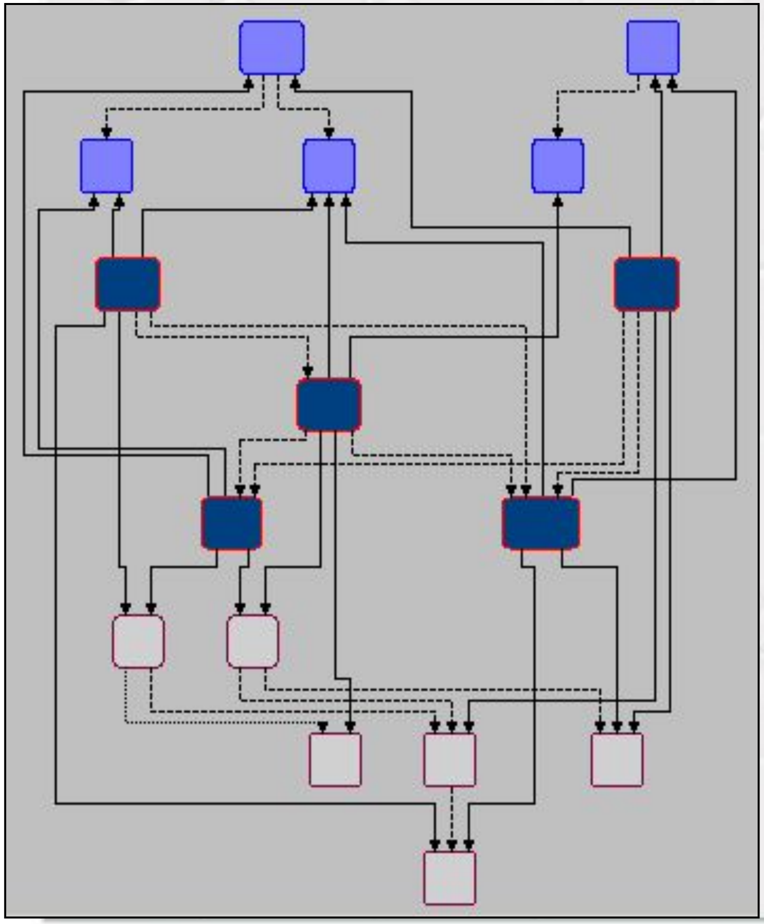


Кластер: Группа взаимосвязанных вершин, помещаемая на одну окружность

Стили укладок

Иерархическая

Иерархическая укладка использует в качестве исходной информации ориентацию дуг. Допустимо существование циклов.



В примере продемонстрировано ограничение: голубые вершины изображены над темными, те, в свою очередь – над серыми.

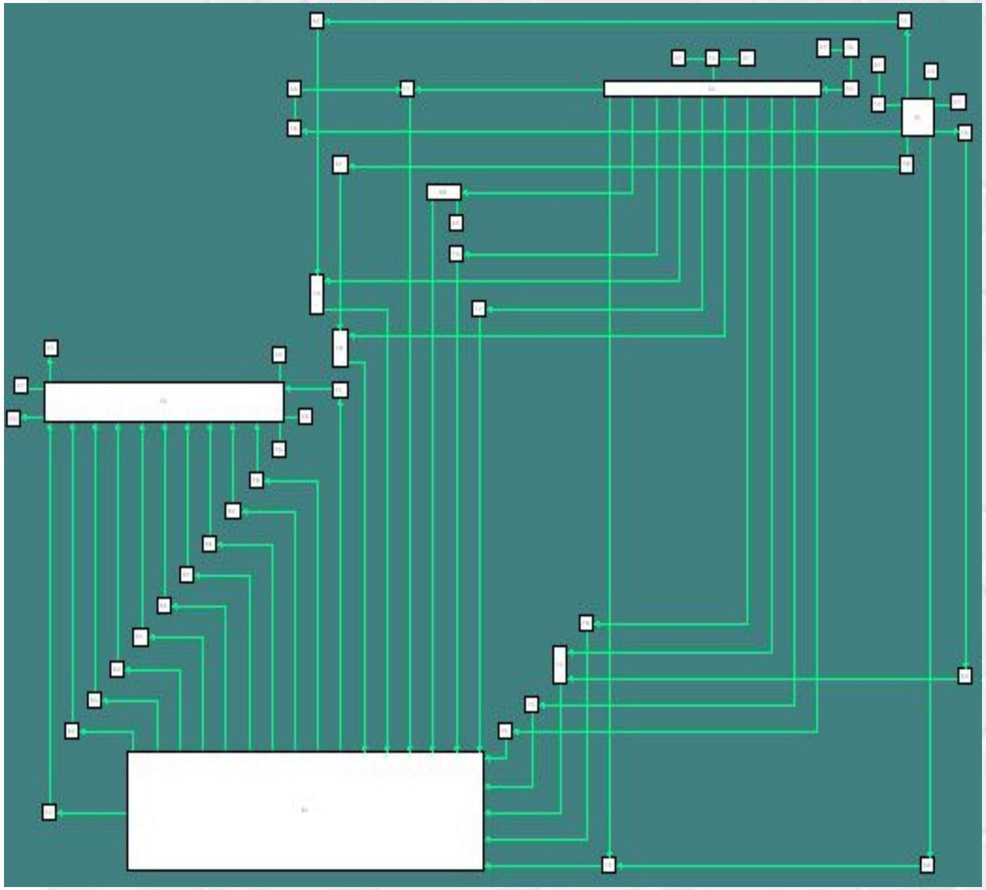
Опции

- Ориентация: Сверху ВНИЗ
- Геометрия ребер: ортогональная
- Расстояние между уровнями: Constant (возможны «Переменное», «Пропорциональное)
- Использование портов

Layout styles

Orthogonal Layout

The Orthogonal Layout produces drawings of outstanding clarity, using only horizontal and vertical line routing. It maintains at most one bend per edge.



Features

- At most one bend per edge routing
- No overlapping of nodes
- No overlapping of nodes and nonincident edges
- Minimal stretching of nodes that have a large number of incident edges

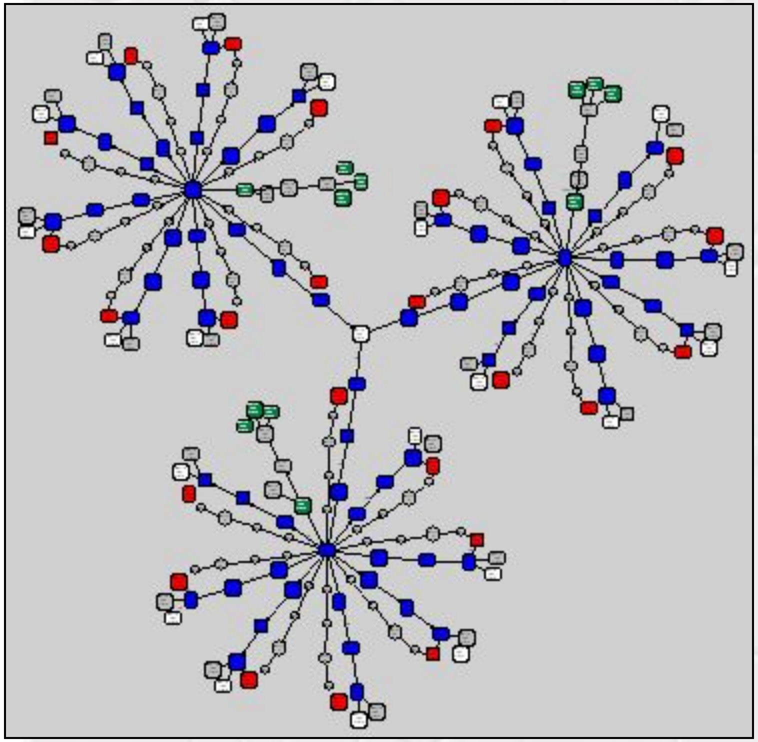
Options

- Node spacing: horizontal and vertical
- Edge spacing: horizontal and vertical
- Keep node sizes
- Avoid port sharing

Layout styles

Symmetric Layout

The Symmetric Layout exposes the natural symmetry inherent in many graphs. It produces near congruent drawings of isomorphic graphs, provides a uniform distribution of nodes, and produces drawings with relatively few edge crossings.



Features

- Symmetric layout of symmetric graphs
- Uniform distribution of nodes
- Relatively few edge crossings

Options

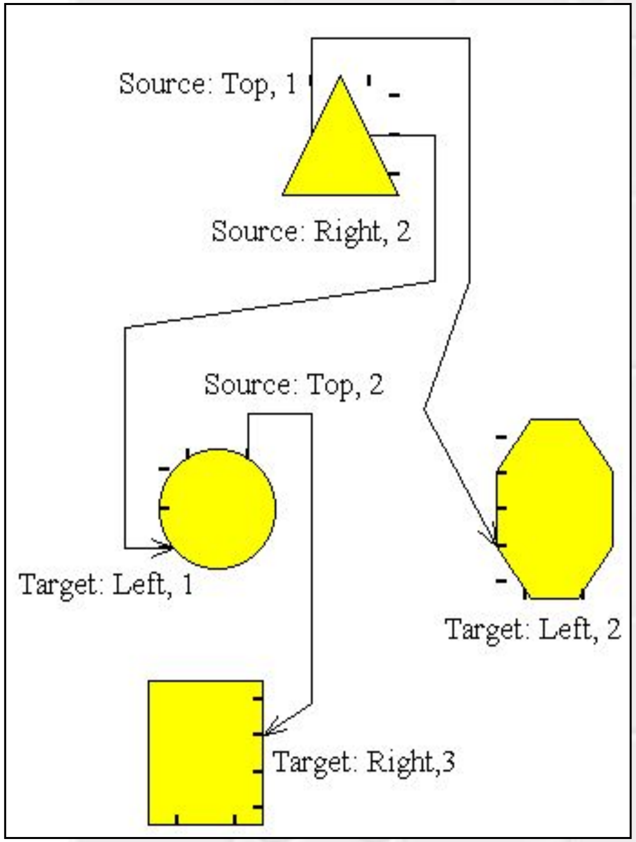
- Node spacing
- Prevent node overlap
- Route edges

Port Specification

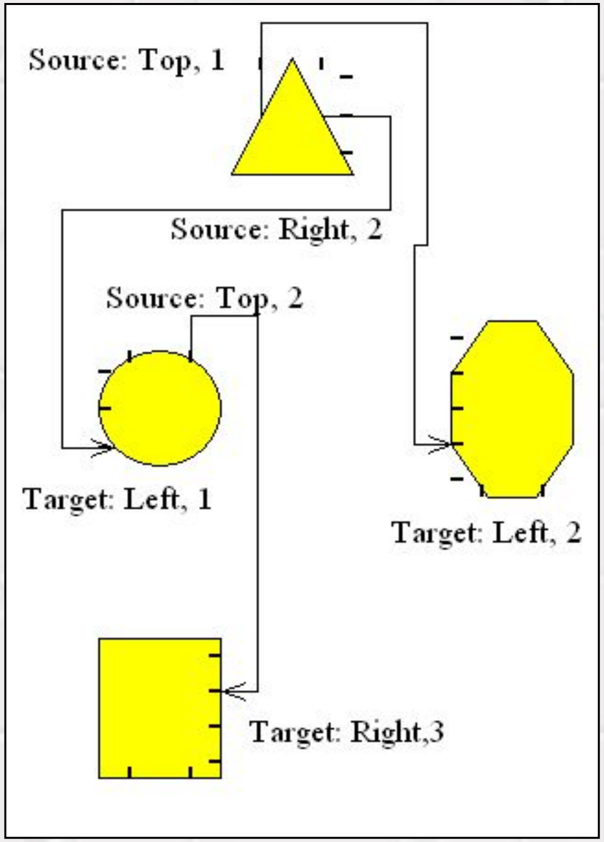
Port: A point at the border of a node at which an edge can be connected..

Edge connects to a node at a certain location, or port, along one of its sides.

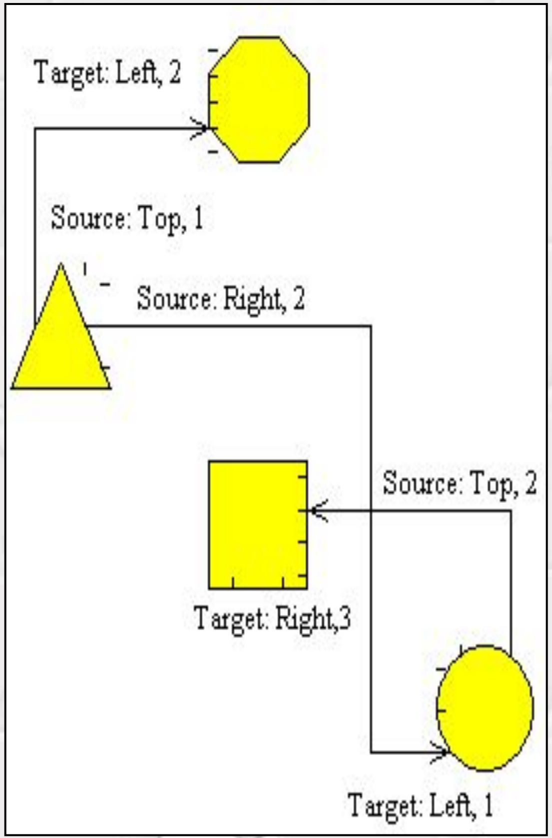
Hierarchical layout



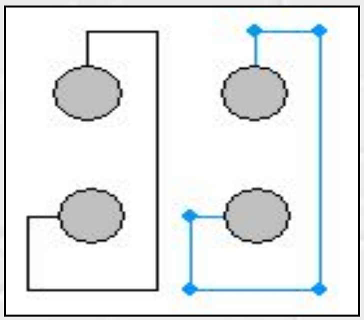
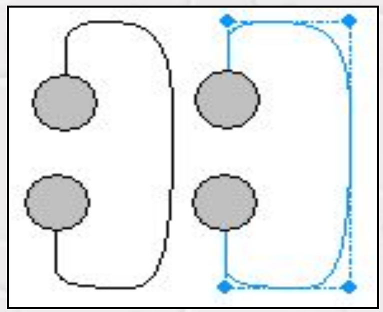
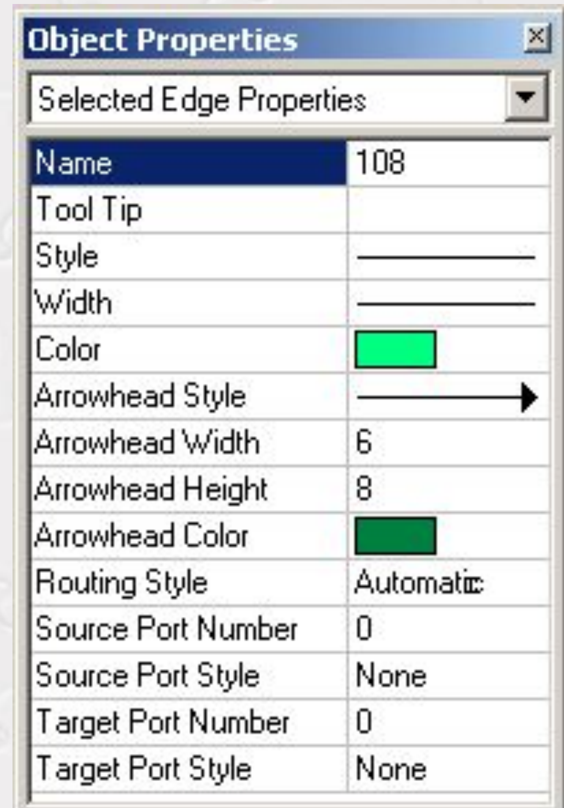
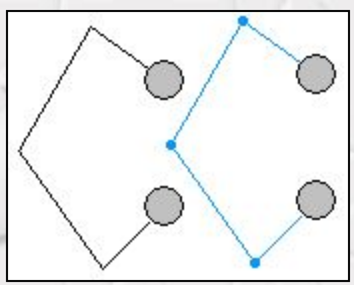
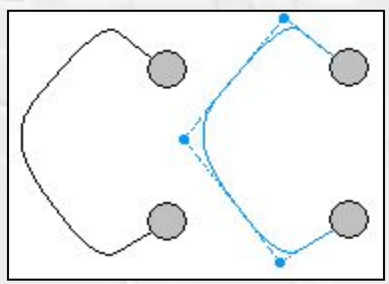
Orthogonal routing



Orthogonal layout



Geometry

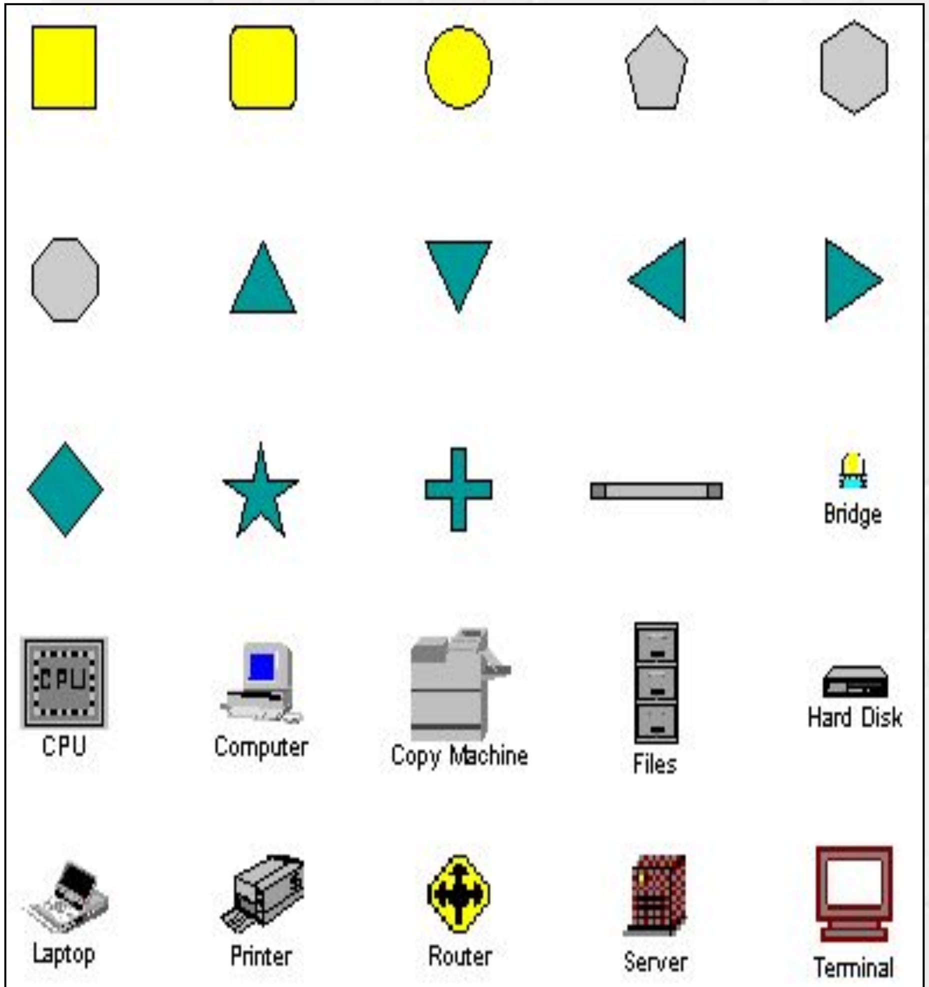
<table>
<tr><td colspan="4"><u>Edge Geometry</u> - edge routing, bend points</td></tr>
<tr><td></td><td>Polyline</td><td>Curved</td><td>Edge properties</td></tr>
<tr><td>Orthogonal</td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

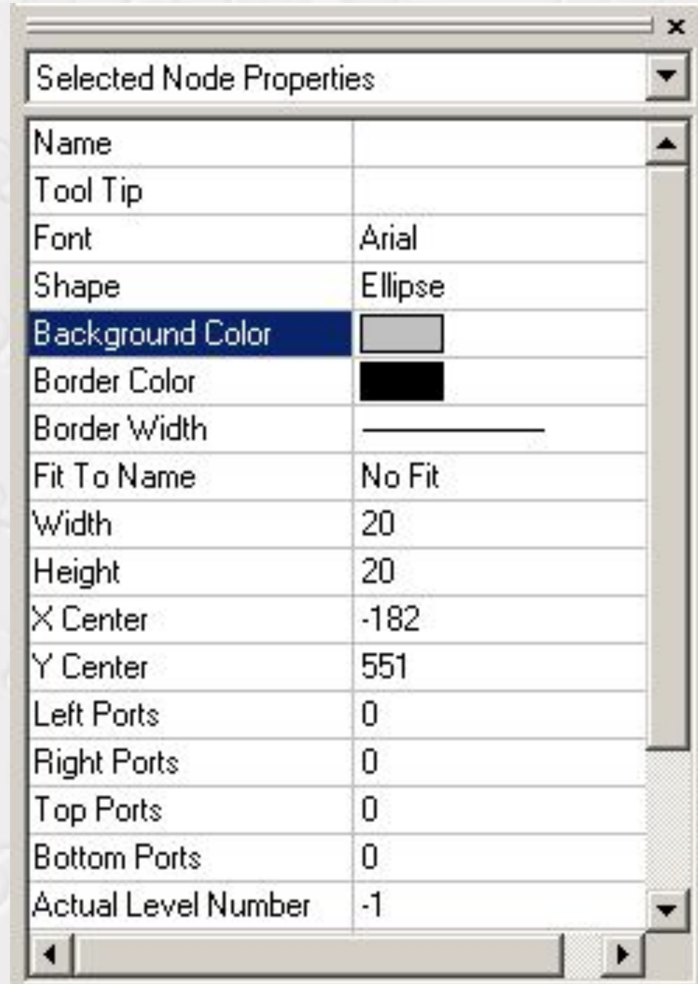
Geometry

The node palettes

Node Geometry

Shape, Animated, Network, Business, Flow Chart

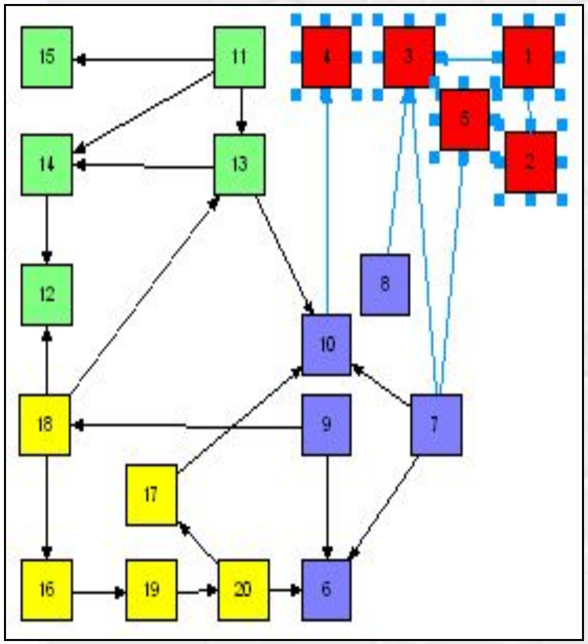




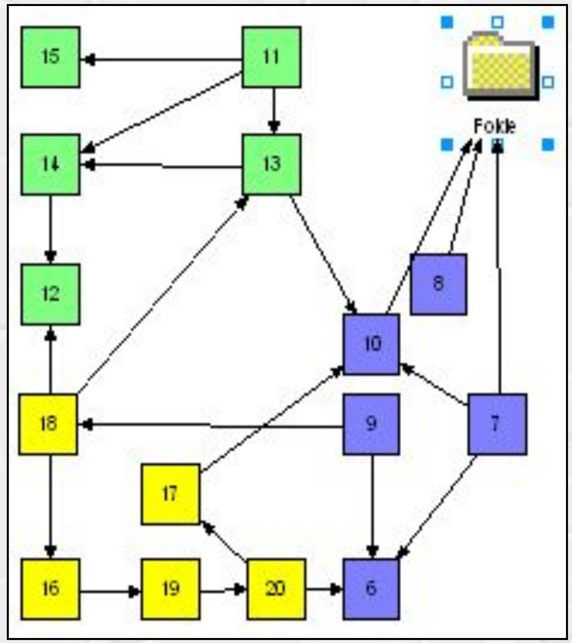
Features

Fold and hide selected nodes

Red nodes are selected

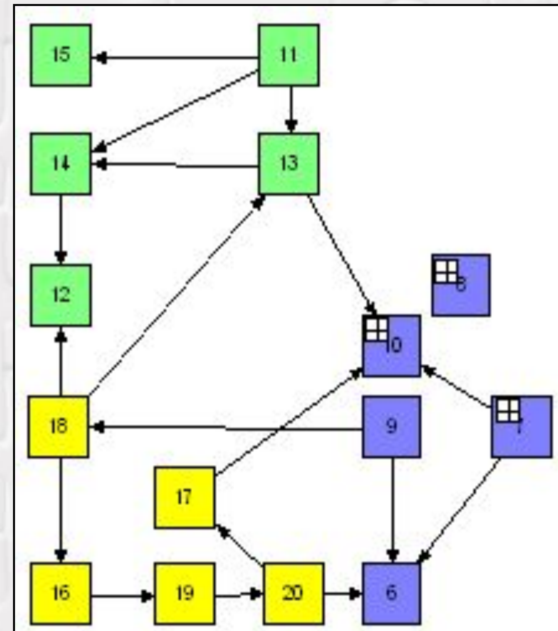


Fold



Selection, Parents,Children, Neighbors

Hide



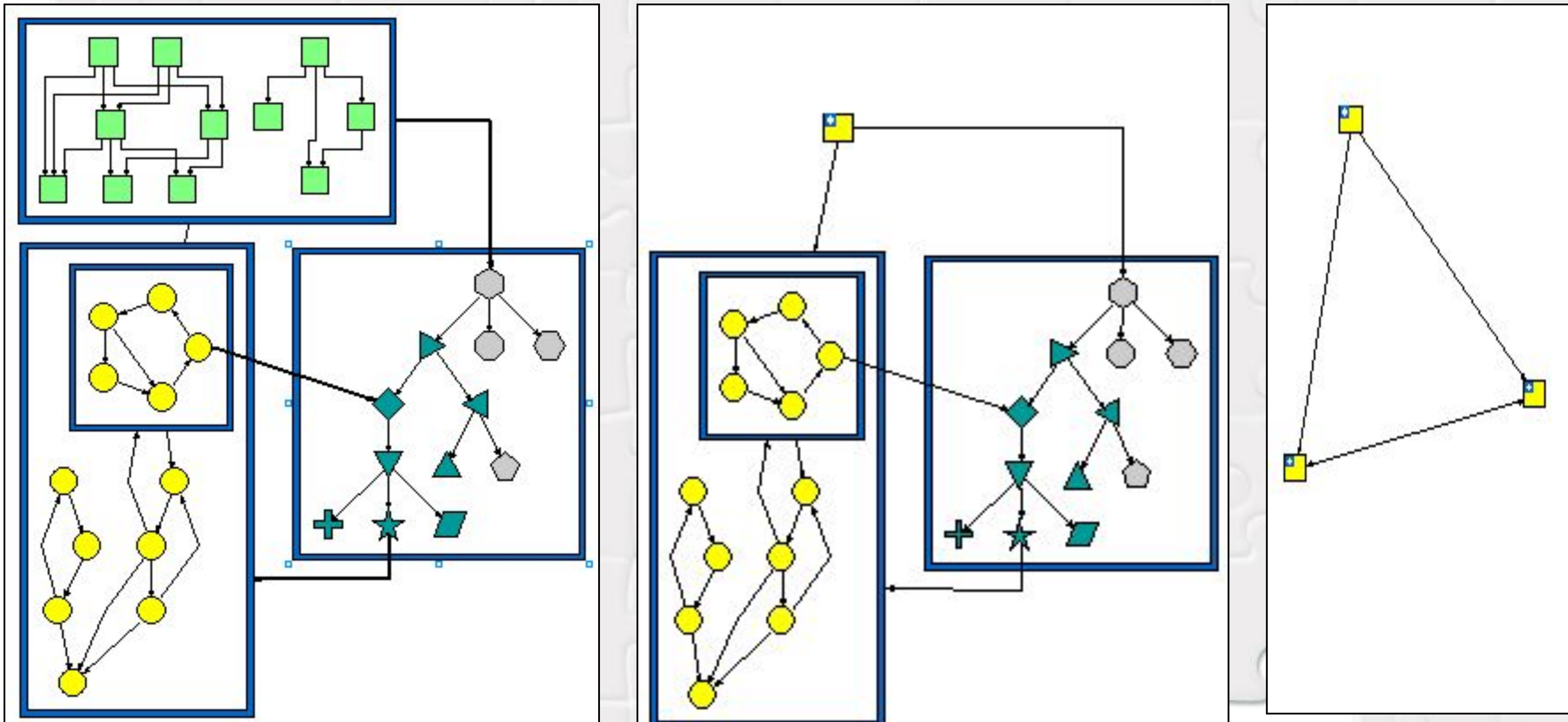
Selection, Parents,Children, Neighbors

Features

Decomposition (creates a child graph)

All child are expanded

All child are collapsed



Features

Zoom

- Fit in window
- Auto fit in window
- Full screen
- Custom Zoom (%)
- Zoom In
- Zoom Out

Clipboard

- Cut
- Copy
- Paste
- Delete
- Select All
- Select All Nodes
- Select All Edges
- Select All Labels

www.tomsawyer.com