Основные уравнения магнитного поля

Уравнения магнитостатики:
$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \end{cases}$$

Теорема Гаусса для вектора *B*

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0}$$

– теорема Гаусса для ***B*** (дифференциальная форма)

По теореме Остроградского–Гаусса $\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = \int \operatorname{div}\boldsymbol{B}\, dV \Rightarrow$

$$\boxed{\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = 0}$$

– теорема Гаусса для ***B*** (интегральная форма)

Основные уравнения магнитного поля

Теорема о циркуляции вектора *B*

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}}$$

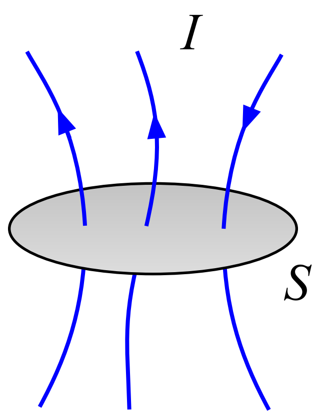
– теорема о циркуляции ***B*** (дифференциальная форма)

По теореме Стокса

$$\left.\begin{aligned} &\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{S} \\ &\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{S} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{S} = \mu_0 I \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

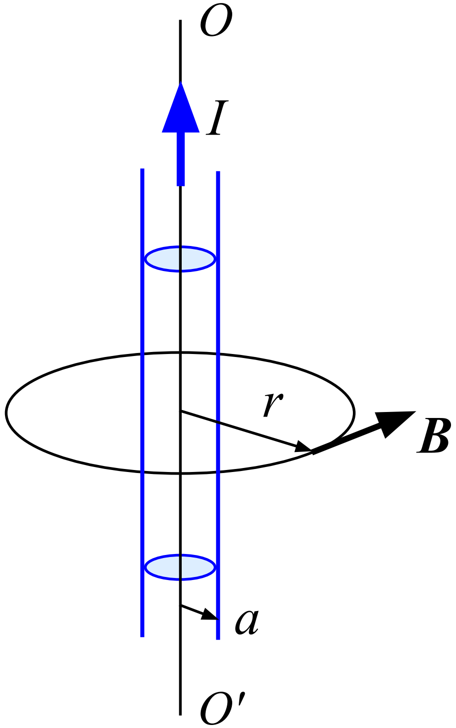
$$\boxed{\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{r} = \mu_0 I}$$

– теорема о циркуляции ***B*** (интегральная форма)



Применение теоремы о циркуляции вектора *B*.

Магнитное поле прямого тока



Из симметрии следует:

1. Линии вектора B – окружности с центром на оси OO'
2. $B = B(r)$

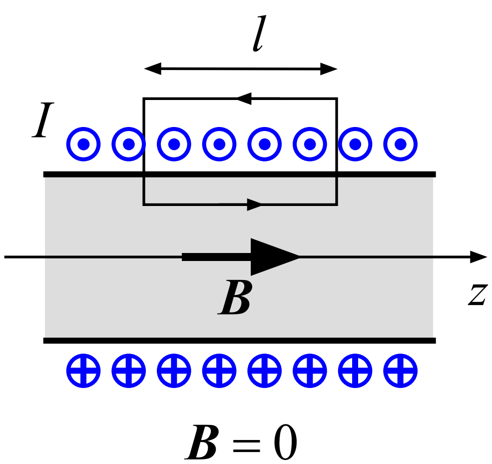
$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = B \cdot 2\pi r \Longrightarrow$$

$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I'$, где I' – ток, охватываемый окружностью радиуса r

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r \geq a) \\ \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (r < a) \end{cases}$$

Применение теоремы о циркуляции вектора *B*

Магнитное поле соленоида



Из симметрии следует:

1. $\boldsymbol{B} \,||\, \boldsymbol{z}$
2. $B = B(r)$, вне соленоида $B = 0$

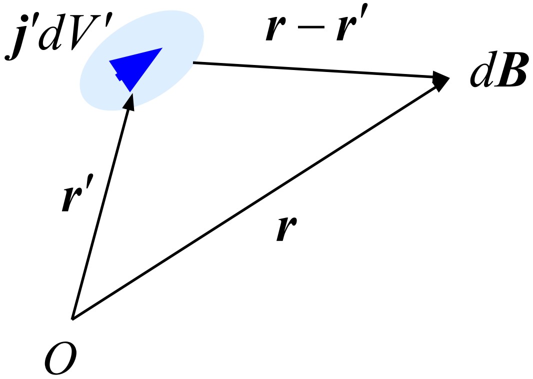
$$\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{r} = B \cdot l$$

$B \cdot l = \mu_0 n I l$, где n – плотность намотки (N/L),
I – ток в проводе

$$B = \mu_0 n I$$

nI – число ампервитков

Вектор-потенциал



По закону Био-Савара

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV' \quad \Rightarrow \quad \ldots.$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

Отсюда

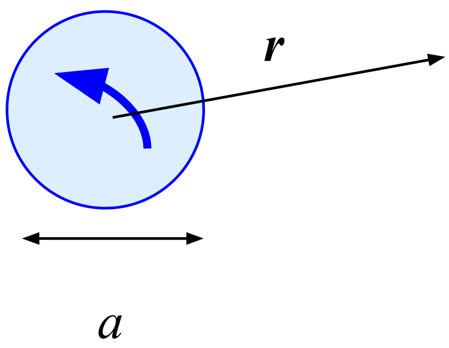
$$\boxed{\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}}{r}dV}$$

$\boldsymbol{A}$ – вектор-потенциал магнитного поля

По аналогии с $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho}{r}dV$, $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j}}$

уравнение для вектор-потенциала

Магнитный диполь

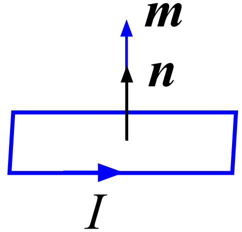


Магнитный диполь – система токов малых размеров (т.е. $r >> a$).

Для витка с током $\quad \boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \dfrac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$

$r >> r' \quad \Rightarrow$

Плоский виток



$\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}$

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \boldsymbol{m} = \tfrac{1}{2} I \oint \boldsymbol{r}' \times d\boldsymbol{r}'}$$

$\boldsymbol{m}$ – магнитный момент

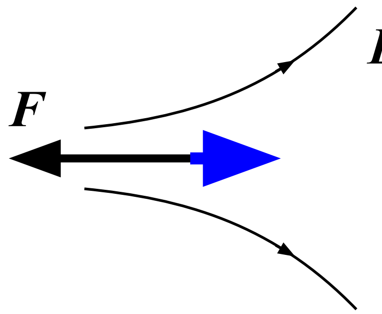
$$\boxed{\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\boldsymbol{m}}{r^3} + \frac{3(\boldsymbol{m},\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}\right)}$$

Магнитный диполь

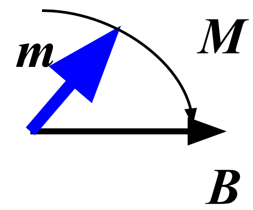
Взаимодействие диполя с магнитным полем

$\boldsymbol{F} = \oint I d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B}$ – сила, действующая на диполь

$\boldsymbol{M} = \oint \boldsymbol{r}' \times (I d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B})$ – момент сил, действующий на диполь



$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{mB})$$

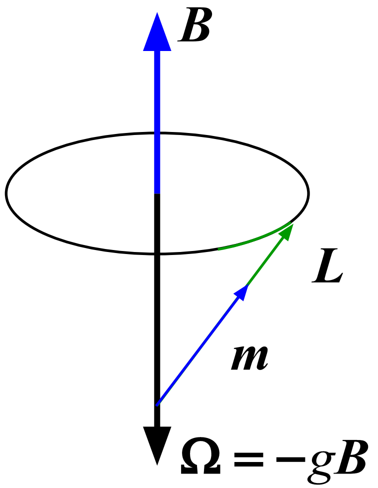


$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$

$$U = -\boldsymbol{mB}$$

– потенциальная энергия жесткого диполя в магнитном поле

Прецессия магнитного диполя. Магнитный резонанс



Уравнение движения диполя

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$, где $\boldsymbol{L}$ – момент импульса

Рассмотрим случай $\boldsymbol{m} = g\boldsymbol{L}$, где

g – гиромагнитное отношение

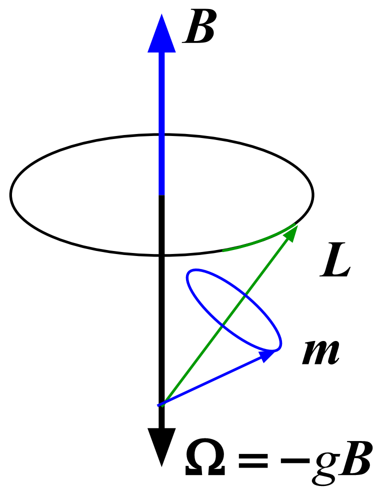
$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -g\boldsymbol{B}$$

– прецессия (движение $\boldsymbol{m}$ по конусу вокруг $\boldsymbol{B}$)

Прецессия магнитного диполя. Магнитный резонанс

Составные системы (атомы, молекулы)



$\boldsymbol{L} \nparallel \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m}$ прецессирует вокруг $\boldsymbol{L}$

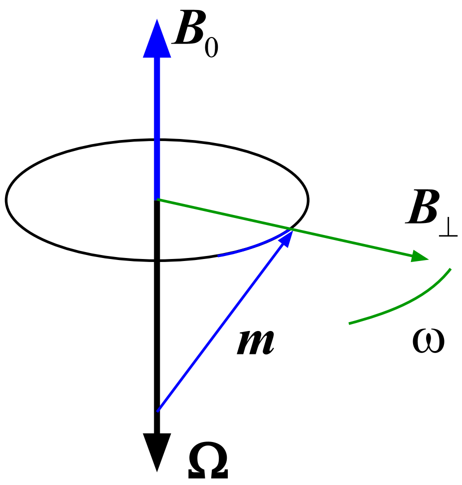
В среднем $< \boldsymbol{m} >= g\boldsymbol{L}$ ⇨ (в слабых полях)

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} =< \boldsymbol{m} > \times \boldsymbol{B}$$ – прецессия <$\boldsymbol{m}$>, $\boldsymbol{L}$ вокруг $\boldsymbol{B}$

Гиромагнитное отношение g сложной системы позволяет судить об ее “устройстве”.

Прецессия магнитного диполя. Магнитный резонанс

Магнитный резонанс



$\boldsymbol{B}_0$ – постоянное магнитное поле

$\boldsymbol{B}_\perp$ – слабое вращающееся поперечное магнитное поле

При $\omega = \Omega$ возникает резонанс – происходит переворачивание $\boldsymbol{m}$ и поглощение энергии генератора $B_\perp$

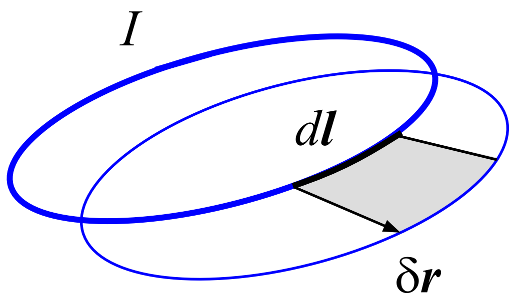
Из измеренных Ω и B_0 находится g

<u>Применение магнитного резонанса</u>

ЭПР (электронный парамагнитный резонанс) – резонанс магнитных моментов атомов и молекул: анализ химического состава вещества

ЯМР (ядерный магнитный резонанс) – резонанс магнитных моментов ядер: прецизионное измерение B, анализ строения молекул

Работа по перемещению контура с током

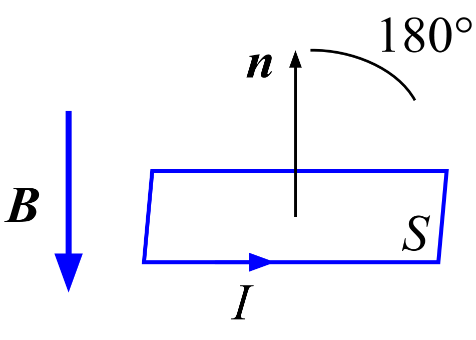


$$d\boldsymbol{F} = I\, d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

$$d\boldsymbol{F}\,\delta\boldsymbol{r} = I\,(d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})\,\delta\boldsymbol{r}$$

работа силы Ампера по перемещению элемента $d\boldsymbol{l}$

Пример:



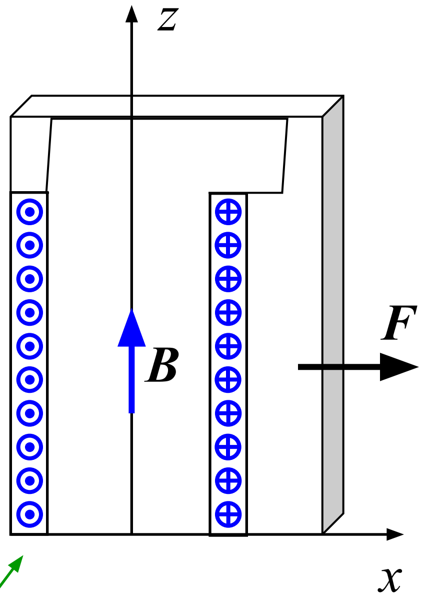
$$A = I\,[BS - (-BS)] = 2IBS$$

$$dA = I \oint (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}, \delta\boldsymbol{r}) = I \oint (\underbrace{\delta\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l}}_{d\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{B})$$

$$\boxed{dA = I\, d\Phi}$$

– работа по перемещению контура с током

Давление магнитного поля



“прямоугольный” соленоид

$$\frac{dF}{dS} = \int f(x)dx$$ давление магнитного поля

$$f(x) = j(x)B(x)$$ объемная плотность силы Ампера

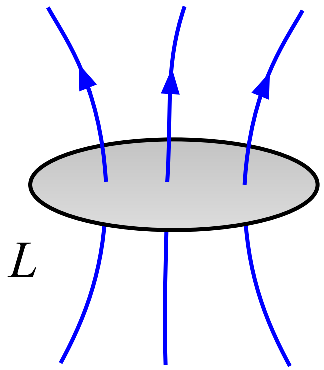
$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 j$$ теорема о циркуляции

$$\frac{dF}{dS} = -\frac{1}{\mu_0}\int B\frac{\partial B}{\partial x}dx = -\frac{1}{\mu_0}\int_B^0 BdB = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\boxed{\frac{dF}{dS} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

$\frac{B^2}{2\mu_0}$ – объемная плотность энергии магнитного поля

Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца



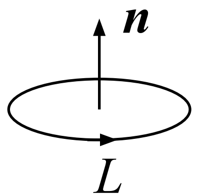
$\Phi = \int \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}$ – магнитный поток

В замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, возникает *индукционный* ток.
Это означает, что в контуре возникает ЭДС индукции.

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

– закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)

Правило знаков



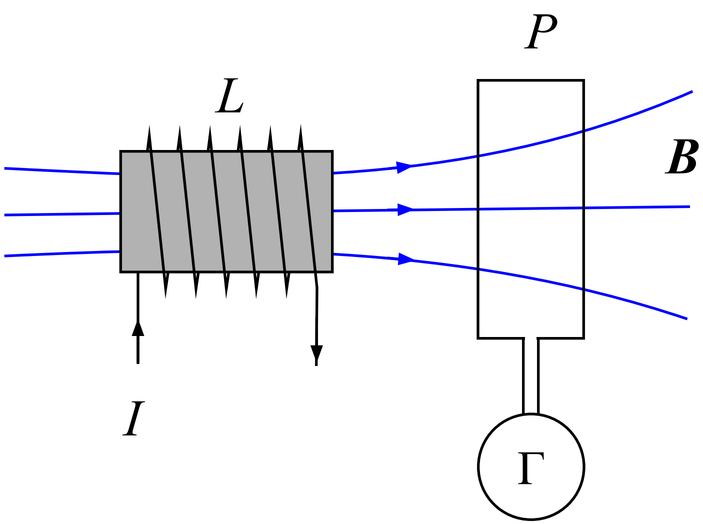
Направление L и $\boldsymbol{n}$ связаны правилом правого винта

Правило Ленца

индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока

Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца

Способы возбуждения ЭДС



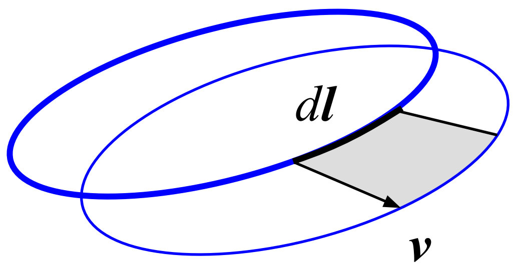
1) Перемещение рамки *P* (или ее частей)
2) Изменение магнитного поля
   а) перемещение катушки *L*
   б) изменение тока *I* в катушке

Катушка: *N* витков, Φ_1 – поток через один виток

$\Phi = N\Phi_1$ – *полный магнитный поток* (*потокосцепление*)

Природа электромагнитной индукции

Возбуждение ЭДС в контуре при его движении в постоянном магнитном поле



$\boldsymbol{v}$ – скорость элемента контура $d\boldsymbol{l}$ и электронов проводимости

Сторонняя сила – магнитная составляющая силы Лоренца

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{F}/e = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

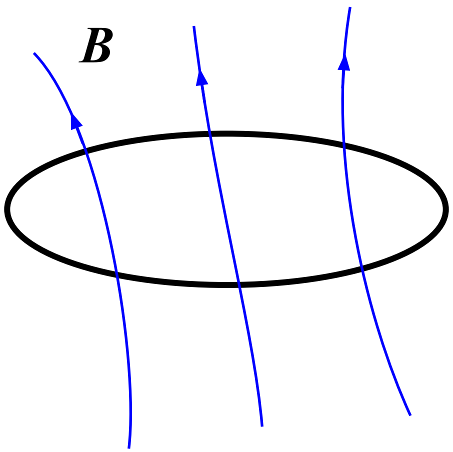
$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{l}$$

$$\mathcal{E} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, d\boldsymbol{l}) = -\oint (\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Природа электромагнитной индукции

Возбуждение ЭДС в контуре в переменном магнитном поле



Сторонняя сила – электрическое (вихревое) поле, поскольку магнитная составляющая силы Лоренца отсутствует (контур покоится).

$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ – потенциальное электрическое поле

$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ – вихревое электрическое поле

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int \operatorname{rot}\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} d\boldsymbol{S}$$

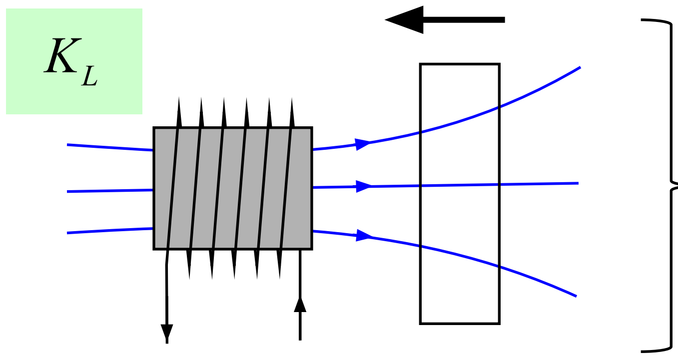
$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

В общем случае

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

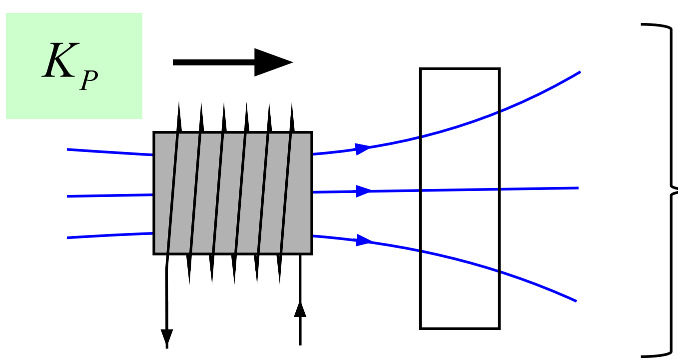
Природа электромагнитной индукции

О единой природе ЭДС индукции



ЭДС индукции обусловлена магнитной составляющей силы Лоренца

$$\boldsymbol{F}_B = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

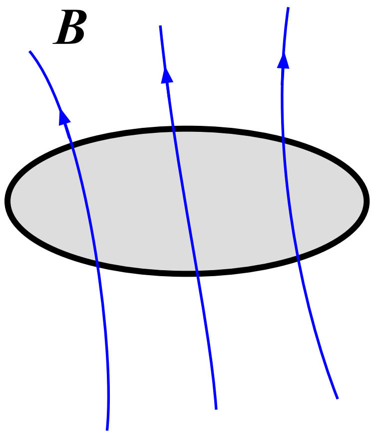


ЭДС индукции обусловлена электрической составляющей силы Лоренца

$$\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$$

Природа (причина) электромагнитной индукции во всех случаях одна – <u>взаимодействие электрических зарядов.</u>

Явление самоиндукции



Явление *самоиндукции* – при изменении тока в контуре возникает ЭДС (само)индукции в этом же контуре.

Так как $B \propto I$ ⇒

$$\boxed{\Phi = LI}$$

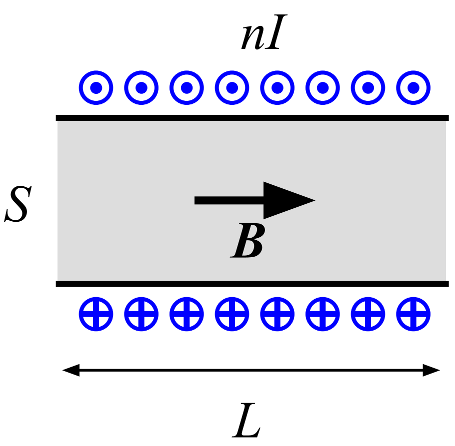
L – индуктивность контура ($L > 0$)

При изменении тока ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Явление самоиндукции

Индуктивность соленоида



$$B = \mu_0 nI$$

$$n = \frac{N}{L}$$ – плотность намотки

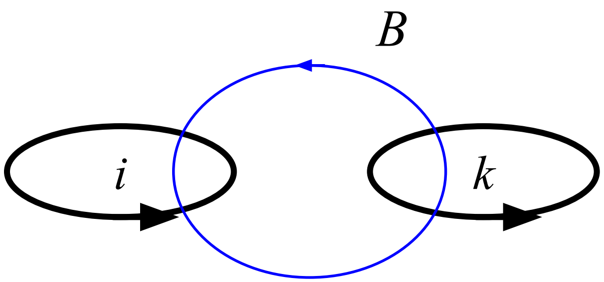
$$\Phi_1 = BS = \mu_0 nIS$$ – поток через один виток

$$\Phi = N\Phi_1$$ – полный поток

$$\Phi = NBS = nLBS = \mu_0 n^2 VI$$

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 V}$$

Взаимная индукция



Благодаря взаимной индукции контуры электрически связанны между собой.

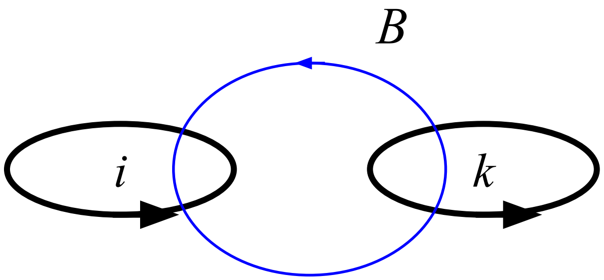
Так как $B \propto \{I_n\}$ $\Rightarrow$

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k$$

L_{ik} $(i \neq k)$ – *взаимная индуктивность* контуров (коэффициент взаимной индукции)

<u>Теорема взаимности:</u> $L_{ik} = L_{ki}$

Магнитная энергия токов



Контуры неподвижны.
A – работа по возбуждению токов
(против ЭДС индукции)

$$dA = -\sum \mathcal{E}_i I_i dt$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad dA = \sum I_i d\Phi_i$$

Работа не зависит от последовательности включения токов

$$\Rightarrow \quad A = \left(\sum I_i \Phi_i\right)\int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2}\sum I_i \Phi_i$$

<u>Примечание:</u> при вычислении работы текущие значения токов считались пропорциональными конечным значениям.

Магнитная энергия токов

Таким образом $$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum I_i \Phi_i} \Rightarrow \; \ldots\ldots$$

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,dV$$

Соленоид:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi = nlBS = nBV \\ &B = \mu_0 nI \end{aligned}\right\} \Rightarrow W = \frac{I\Phi}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}V \Rightarrow$$

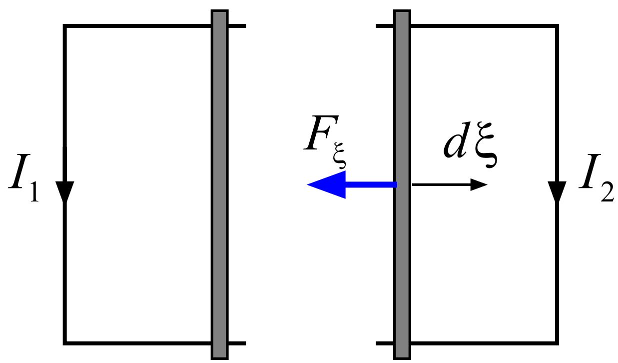
$$\boxed{W = \int w\,dV\,, \quad w = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

w – объемная плотность энергии магнитного поля

Энергетический метод определения сил

Система токов в вакууме (все сопротивления = 0)

а) $\Phi = \text{const}$



F_ξ – (обобщенная) сила магнитного взаимодействия

ξ – (обобщенная) координата

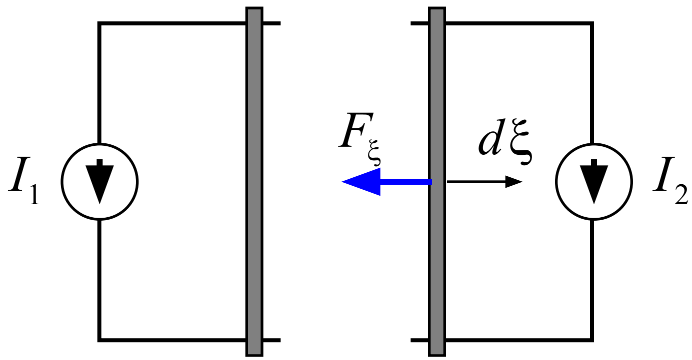
$dA_\xi = F_\xi d\xi$ – работа обобщенной силы

По закону сохранения энергии:

$$dA_\xi = -(dW)_\Phi \quad \Rightarrow \quad F_\xi = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_\Phi$$

Энергетический метод определения сил

б) $I = \text{const}$



$dA_\xi = F_\xi d\xi$ – работа обобщенной силы

$dA_\varepsilon = -\sum I_i d\Phi_i$ – работа ЭДС индукции

$$(dW)_I = \frac{1}{2}\sum_i I_i d\Phi_i \quad \Rightarrow$$

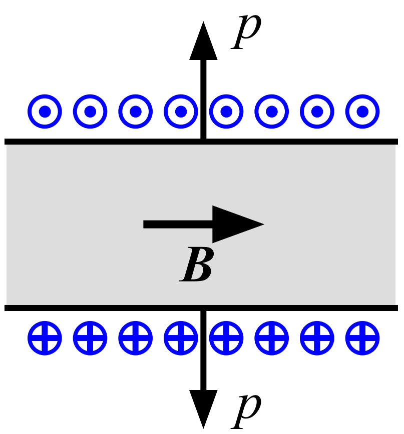
$$dA_\varepsilon = -2(dW)_I$$

По закону сохранения энергии:

$$dA_\xi + dA_\varepsilon = -(dW)_I \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_\xi = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_I}$$

Энергетический метод определения сил

Пример: давление магнитного поля на стенку соленоида



$$W = LI^2/2 = \Phi^2/2L$$

$$L = \mu_0 n^2 V$$

$$dA = p\,dV$$

$$p = -\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right)_{\Phi} = \frac{\Phi^2}{2LV} = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad p' = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{LI^2}{2}\right)_{I} = \frac{LI^2}{2V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$p = p'$$