Численные методы

$$\left| x - x_{пр} \right| < \varepsilon$$

Величину ε также называют допустимой ошибкой, которую можно задать по своему усмотрению.

Задача решения нелинейного уравнения состоит из двух этапов:

- локализация корней, т.е. определение интервала изоляции (интервала неопределенности), в котором расположен корень;
- определение с заданной точностью точности ε приближенного значения корня.

Отделение корней

Отделение корней можно проводить графически и аналитически.
Для того чтобы графически отделить корни уравнения, необходимо построить график функции f(x). Абсциссы точек его пересечения с осью Ox являются действительными корнями уравнения.

Аналитическое отделение корней основано на следующих теоремах.

Теорема 1. Если непрерывная функция f(x) принимает на концах отрезка [a; b] значения разных знаков, т.е.

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

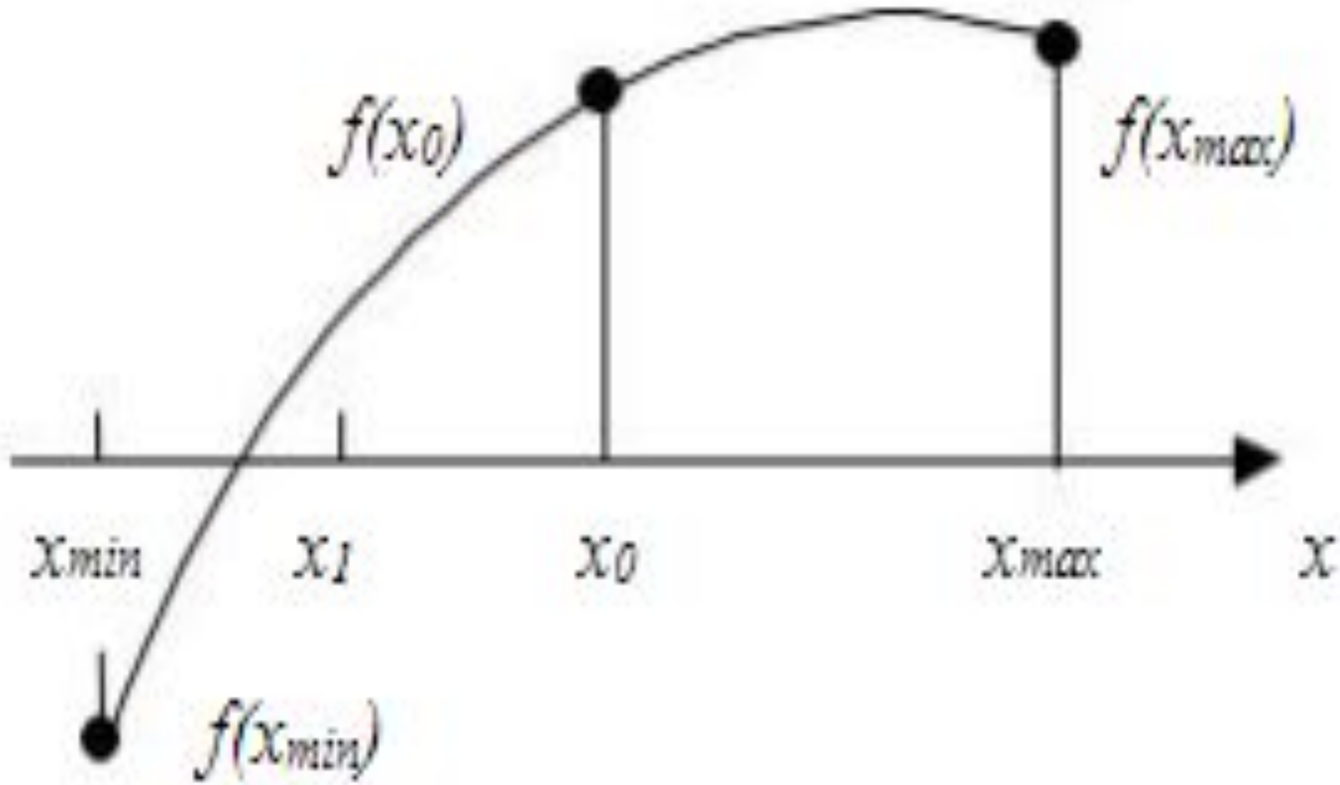
то на этом отрезке содержится, по крайней мере, один корень уравнения.

Теорема 2. Если непрерывная на отрезке [a; b] функция f(x) принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная f'(x) сохраняет знак внутри указанного отрезка, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения f(x) = 0.

Метод половинного деления (метод дихотомии)

Выбор начального приближения состоит в том, чтобы задать границы x_{min} и x_{max} конечного интервала значений x, в котором находится корень уравнения (только один корень уравнения для случая нескольких корней). Поскольку действительное положение корня уравнения внутри интервала неизвестно, примем в качестве начального приближения точку, соответствующую середине интервала

$$x_0=0{,}5(x_{min} + x_{max}).$$

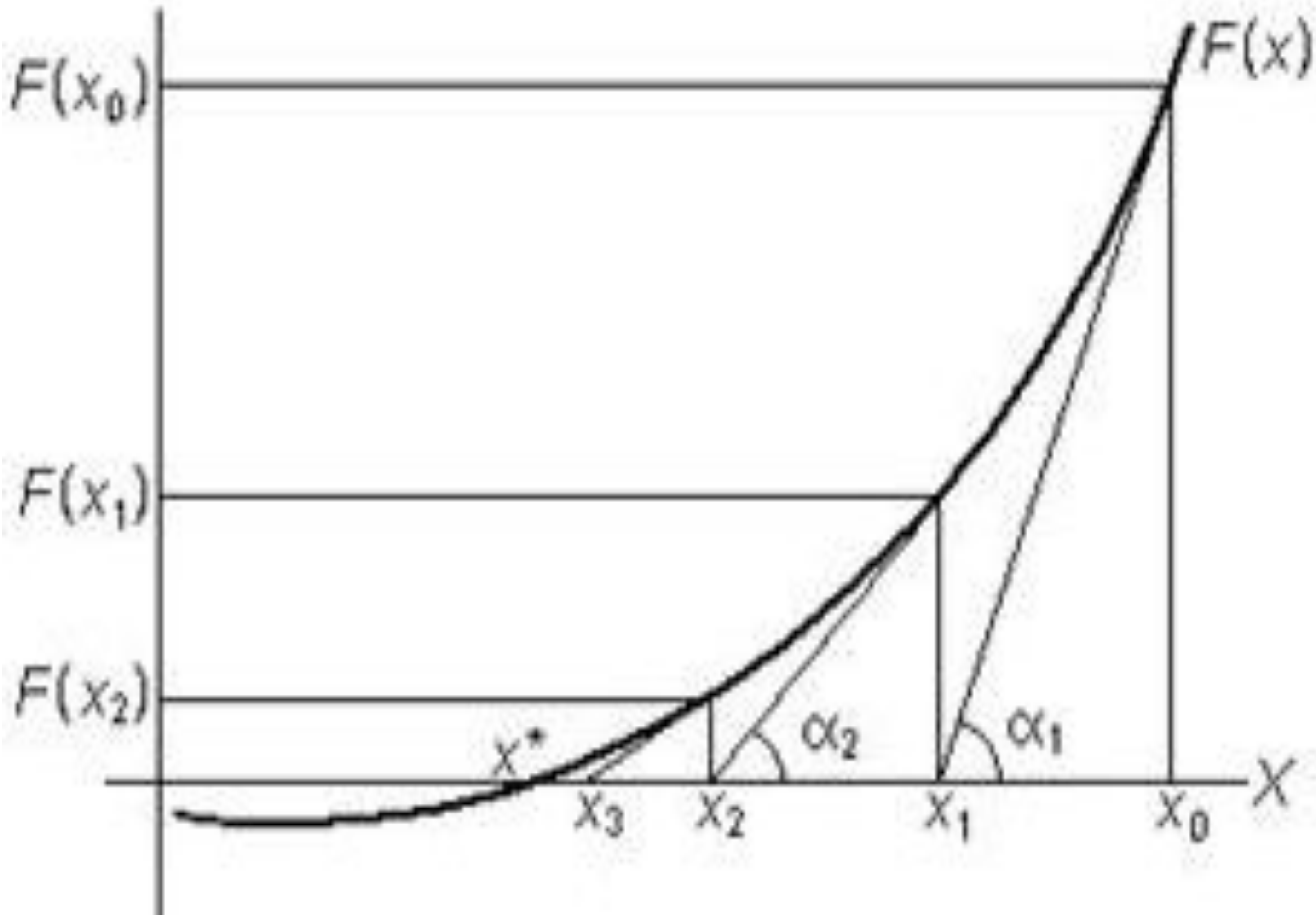


f(x0)
f(xmax)
xmin
x1
x0
xmax
x
f(xmin)

Условие остановки итерационного процесса может быть сформулировано несколькими способами:

- $n = n_{max}$, где n_{max} - заранее установленное максимальное число шагов итерационного процесса. Это условие может применяться при ограниченных ресурсах времени на решение;
- $(x_{max} - x_{min}) < \varepsilon$, где ε - требуемая точность вычисления корня уравнения определяется, исходя из условий дальнейшего практического использования полученного решения.

Метод Ньютона (метод касательных)



Графическая интерпретация метода.

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{\operatorname{tg}\alpha_1} = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

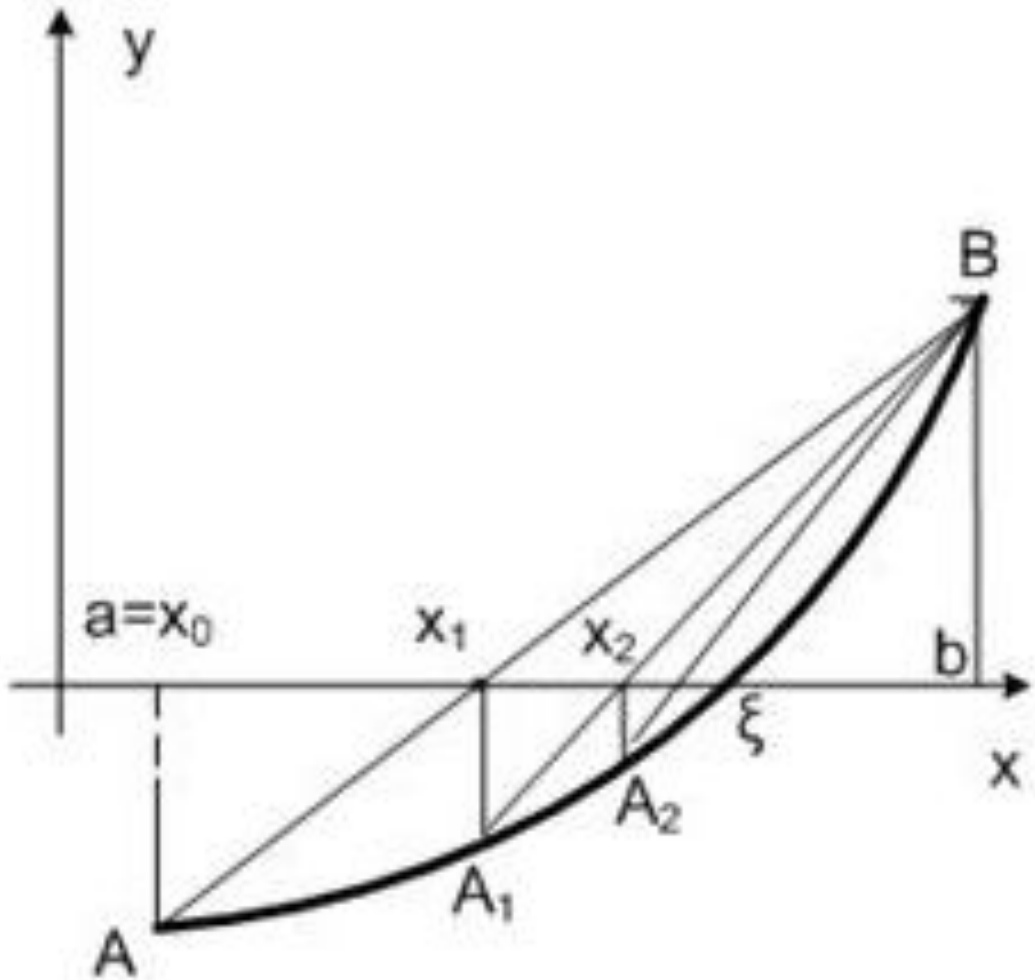
$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}.$$

В общем случае вычислительный процесс метода Ньютона выражается формулой:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})},}$$

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

Метод хорд (метод секущих)



Геометрическая интерпретация метода хорд

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Положим y = 0 и найдем значение $x = x_1$ (очередное приближение):

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}\cdot(b-a).$$

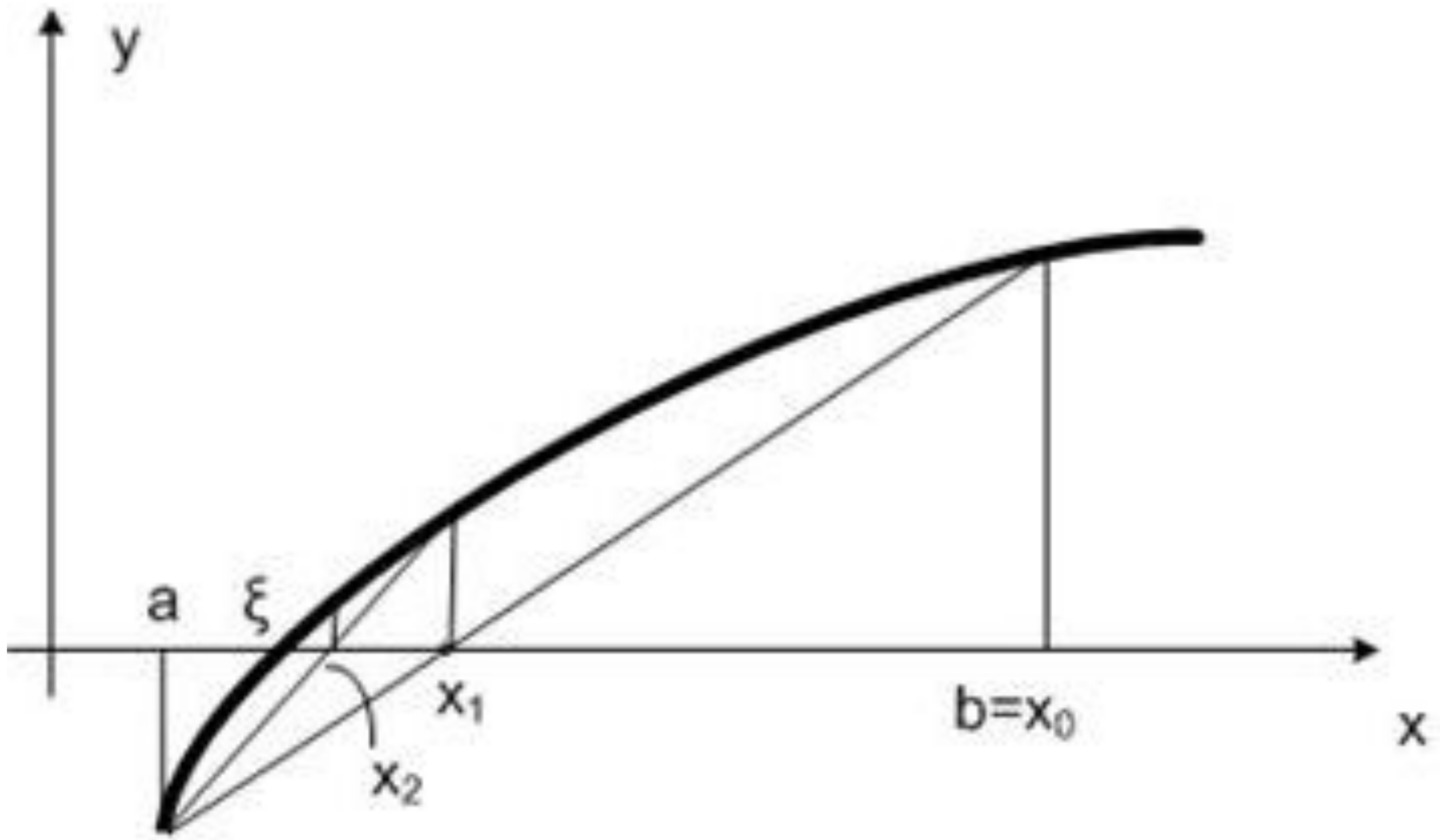
Повторим процесс вычислений для получения очередного приближения к корню - x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}\cdot(b-x_1).$$

В случае $f''(x) > 0$ расчетная формула метода хорд будет иметь вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n).$$

Эта формула справедлива, когда за неподвижную точку принимается точка b, а в качестве начального приближения выступает точка a.



когда $f''(x) < 0$

Уравнение прямой для этого случая имеет вид

$$\frac{b-x}{b-a}=\frac{f(b)-y}{f(b)-f(a)}.$$

Очередное приближение x_1 при $y = 0$

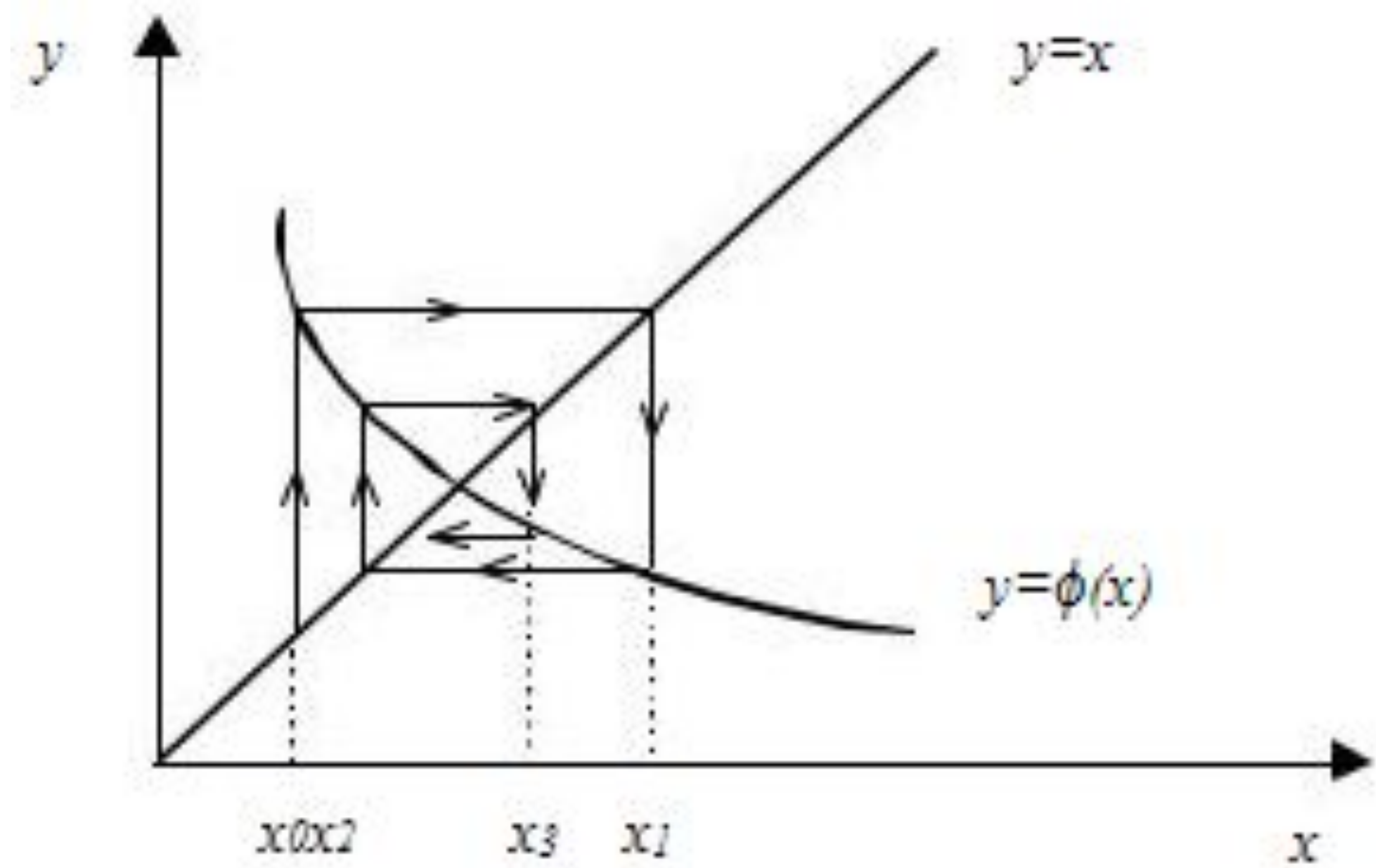
$$x_1=b-\frac{f(b)}{f(b)-f(a)}\cdot(b-a).$$

Тогда формула метода хорд для этого случая имеет вид

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}\cdot(x_n-a).$$

Метод простых итераций

Для реализации этого метода исходное уравнение f(x)=0 предварительно преобразуется к виду x=ϕ(x). Обычно это можно осуществить несколькими способами. Выбрав начальное приближение x_0 (реализуют следующий итерационный процесс: x1=ϕ(x0) ,x2=ϕ(x1), и т.д.



Ход итерационного процесса удобно представить графически. $x_{n+1} – x_n < ε$

Задача численного интегрирования

В ряде задач возникает необходимость вычисления определенного интеграла от некоторой функции:

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

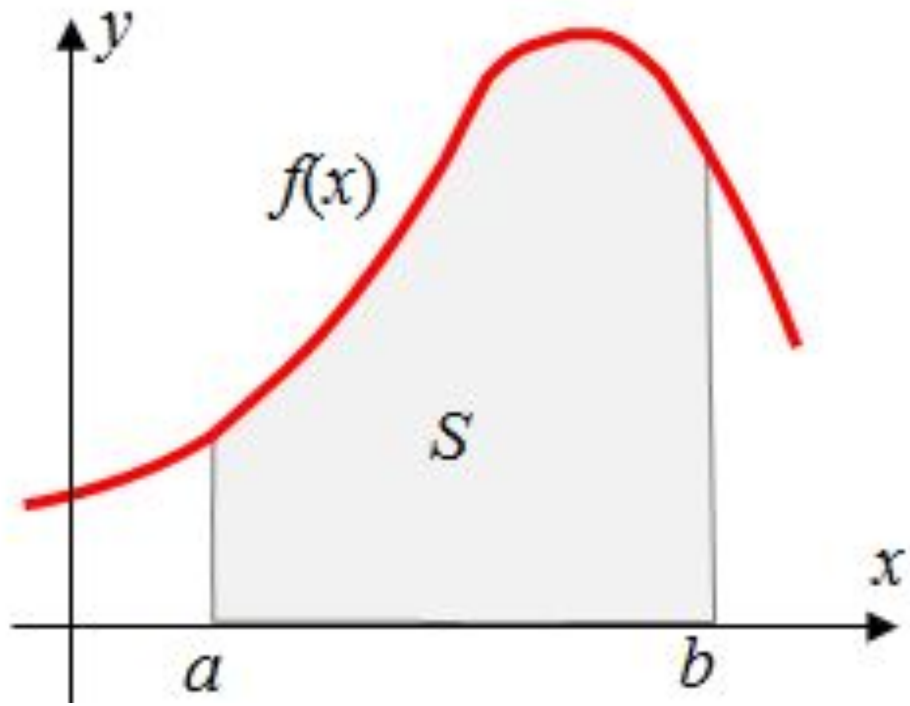
где *f(x)* – подынтегральная функция, непрерывная на отрезке [a, b].

Геометрический смысл интеграла заключается в том, что если *f(x)>0* на отрезке [a, b], то интеграл

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции *y=f(x),* отрезком оси абсцисс, прямой *x=a* и прямой *x=b.*

Вычисление интеграла равносильно вычислению площади криволинейной трапеции.



Задача **численного интегрирования** состоит в замене исходной подынтегральной функции некоторой аппроксимирующей функцией (обычно полиномом).

Численное интегрирование применяется, когда:

- сама подынтегральная функция не задана аналитически, а например, представлена в виде таблицы значений;
- аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции.

Способы численного вычисления определенных интегралов основаны на замене интеграла конечной суммой:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot f(x_j)$$

где Cj– числовые коэффициенты, выбор которых зависит от выбранного метода численного интегрирования,

x_j – узлы интегрирования $(x_j \in [a,b], j = 1,\ldots,N)$.

Выражение называют **квадратурной формулой**.

Разделим отрезок [a, b] на *N* равных частей, то есть на *N* элементарных отрезков. Длина каждого элементарного отрезка: $h = \dfrac{b-a}{N}$

Тогда значение интеграла можно представить в виде:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cdot dx$$

Из этого выражения видно, что для численного интегрирования на отрезке [a, b] достаточно построить квадратурную формулу на каждом частичном отрезке

$[x_{j-1}, x_j]$.

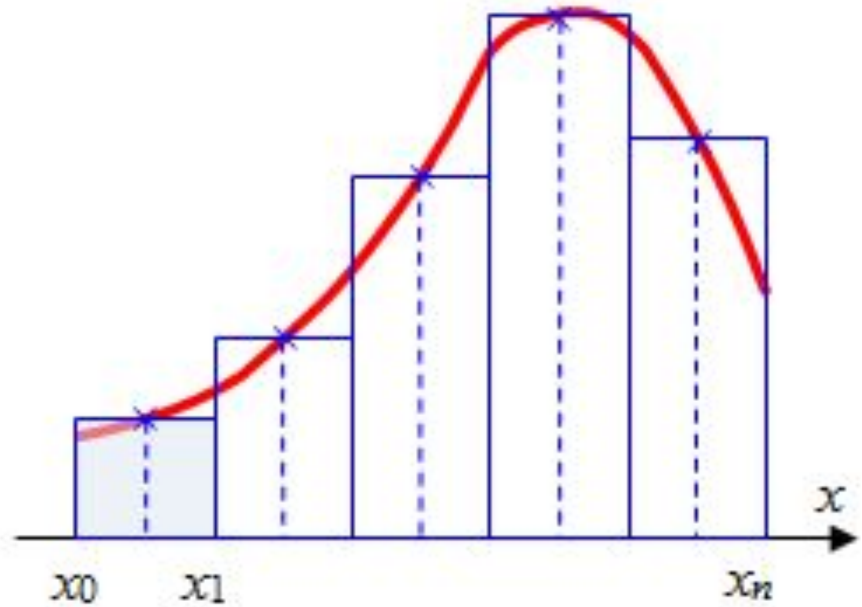
Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$\Psi_N = \int_a^b f(x) \cdot dx - \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot f(x_j)$$

и зависит от выбора коэффициентов *Cj* и от расположения узлов x_j

Метод прямоугольников

Графически метод средних прямоугольников представлен



Длина каждой части

$$h = \frac{b - a}{n}$$

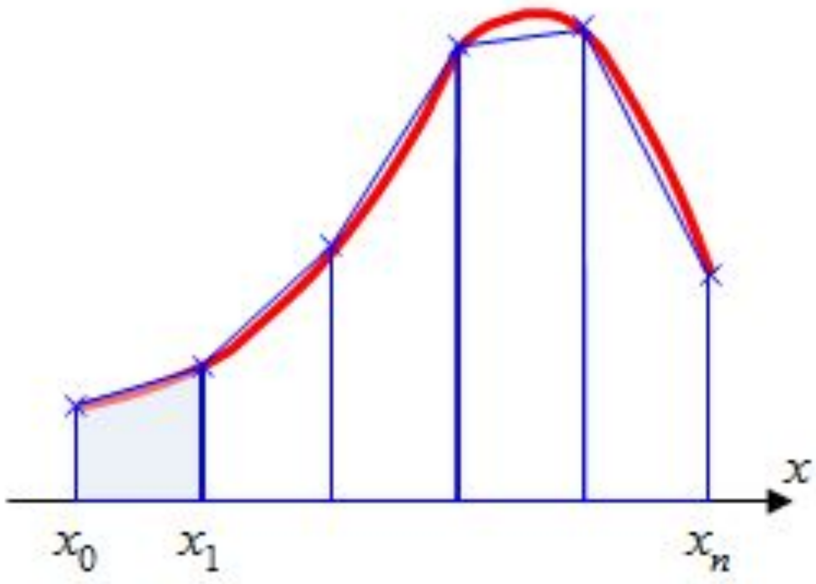
Тогда границы элементарных отрезков $x_i = a + i \cdot h$, а значения функции в этих точках $f_i = f(x_i)$, где i = 0, 1, …, n.

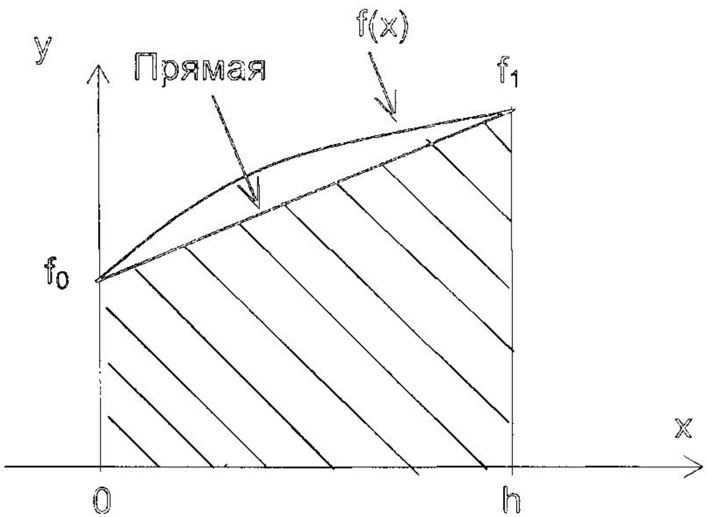
$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + \ldots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})$$

Метод трапеций

Графически метод трапеций





$$y = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} \cdot x$$

$$\int_0^h y(x)dx = \int_0^h \left(f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} \cdot x\right)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

формула трапеций имеет вид $\int\limits_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2} * (f_0 + f_1)$

$h = \frac{b-a}{n}$ Тогда границы элементарных отрезков x_i =a + i*h, а значения функции в этих точках $f_i = f(x_i)$, где i= 0, 1, …, n.

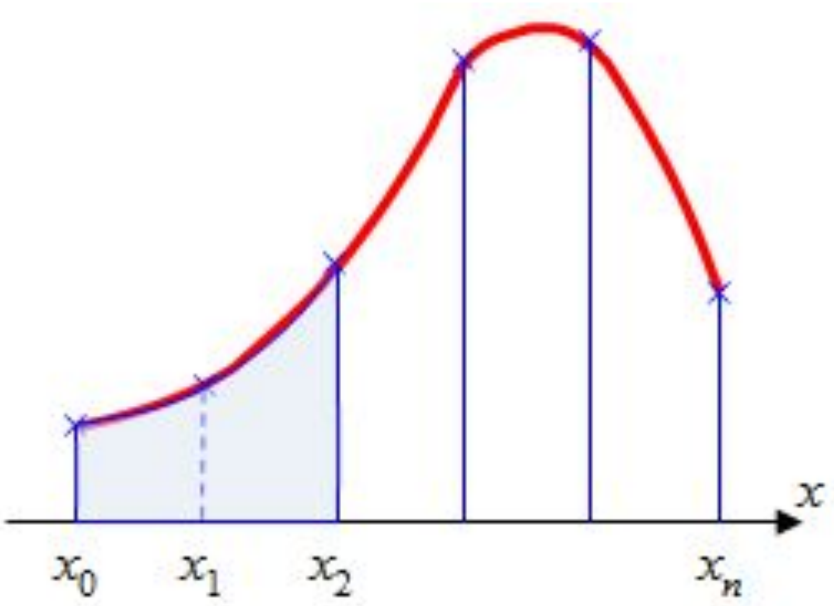
Для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ длины h $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h \cdot (f_i + f_{i+1})$

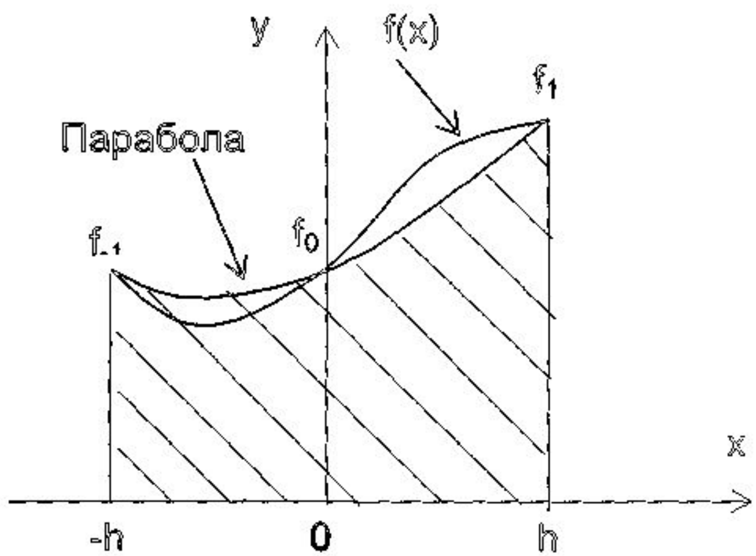
Суммируя левую и правую части этого соотношения от i=0 до i=n-1

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h \cdot (\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 ... + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}) = h \cdot (\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i)$$

Метод Симпсона (метод парабол)

Графическое представление метода Симпсона





Указанная парабола задается уравнением

$$y = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \cdot x + \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} \cdot x^2$$

$$\int_{-h}^{h} y(x)dx = \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1)$$

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1)$$

$$h = \frac{b-a}{2 \cdot n}$$

Тогда границы элементарных отрезков $x_i = a + i \cdot h$

а значения функции в этих точках $fi = f(x_i)$, где $i = 0,1,..,2 \cdot n$

Перепишем каноническую квадратурную формулу Симпсона применительно к отрезку $[x_{2i}, x_{2i+2}]$

длины 2·h

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+21})$$

Суммируя левую и правую части этого соотношения от $i = 0$ до $i = n-1$, получаем усложненную квадратурную формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 4f_{2N-1} + f_{2N}) = \frac{h}{3}(f_0 + f_{2N} + 4\sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_{2i})$$

D27 | =D2*((D5+D25)/2+E5)

	A	B	C	D	E	F
1	x^2*Cos(x)	a	b	h		
2	[1,3]	1	3	0,1		
4		i	x_i	F(x_i)		
5		0	1	0,5403	-47,79	
6		1	1,1	0,54885		
7		2	1,2	0,5218		
8		3	1,3	0,45207		
9		4	1,4	0,33314		
10		5	1,5	0,15916		
11		6	1,6	-0,0748		
12		7	1,7	-0,3724		
13		8	1,8	-0,7361		
14		9	1,9	-1,1671		
15		10	2	-1,6646		
16		11	2,1	-2,2264		
17		12	2,2	-2,8483		
18		13	2,3	-3,5246		
19		14	2,4	-4,2474		
20		15	2,5	-5,0071		
21		16	2,6	-5,7926		
22		17	2,7	-6,5907		
23		18	2,8	-7,387		
24		19	2,9	-8,1658		
25		20	3	-8,9099		
26		Значение интеграла по формуле				
27				-5,1975		

1. Общие сведения. Классы электромеханических приборов, измеряющих напряжение и силу тока. Цифровые вольтметры.
2. Универсальные осциллографы. Техника осциллографирования непрерывных и импульсных сигналов.
3. Цифровые и аналоговые методы измерения частоты и интервалов времени.