ЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
Логика высказываний
Основы логики высказываний

- Употребление термина «логика» в словаре С.И. Ожегова имеет три основных значения:
- 1) наука о законах и формах мышления;
- 2) ход рассуждений или умозаключений;
- 3) разумность, внутренняя закономерность чего-либо. Таким образом, логику можно рассматривать с различных точек зрения. Логика будет рассматриваться как формализм для представления знаний.
- Как самостоятельная научная дисциплина логика сформировалась в силлогистике гениального мыслителя древности Аристотеля.
- . Особая роль принадлежит Эрбрану и Робинсону, предложившим автоматический метод доказательства теорем.
- После того как Р. Ковальски показал, как процесс логического доказательства преобразуется в традиционный процесс вычисления, логика перестала быть сугубо теоретической дисциплиной, став основой для создания языка программирования ПРОЛОГ и породив новое направление в программировании – логическое.

- простейшая математическая логика – логика высказываний, или логика нулевого порядка. Здесь основным понятием является высказывание – всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, – и при этом можно сказать, истинно высказывание или ложно, но ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.
- более общая система – логика первого порядка. Логика предикатов первого порядка позволяет выразить большее разнообразие утверждений благодаря тому, что в нее добавлены термы, предикаты и кванторы.

- В логике высказываний предполагается, что мир может быть описан элементарными предложениями, или высказываниями, и логическими связями между ними. Кроме этого, принято еще два допущения:
- 1) простому предложению или высказыванию можно приписать истинностное значение;
- 2) сложные предложения образуются путем видоизменения некоторого предложения с помощью слова «НЕ» (~) или путем связывания простых предложений с помощью слов «И» ($\wedge$); «ИЛИ» ($\vee$);
- «ЕСЛИ, ТО» ($\rightarrow$); «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА» ($\leftrightarrow$). Эти пять слов называют сентенциональными, пропозициональными или логическими связками, каждая из них имеет свое название: « ~ » – отрицание; « $\wedge$ » – конъюнкция; « $\vee$ » – дизъюнкция; « $\rightarrow$ » – импликация; « $\leftrightarrow$ » – эквиваленция.

- высказывание – это неразлагаемое и неанализируемое повествовательное предложение, которое может быть истинным или ложным, но не тем и другим одновременно. Высказывание, состоящее из одного предложения, называют простым или элементарным.

- два подхода к установлению истинности высказываний: эмпирический и логический. Первый устанавливает истинность высказываний путем выполнения некоторых действий (наблюдений, измерений, эксперимента). Например, пусть есть утверждение «Петя старше Вани», установить истинность данного утверждения можно различными способами: посмотреть их свидетельства о рождении, попытаться определить их возраст визуально. Во втором подходе истинность высказывания устанавливается на основе истинности других высказываний с помощью рассуждений, выявляя связи между высказываниями, входящими в рассуждение. Продолжая рассуждать о возрасте детей... Пусть мы имеем два следующих утверждения, истинность которых установлена: «Петя старше Коли», «Коля старше Вани». Тогда можно сделать вывод, что «Петя старше Вани».

- Для краткости «истина» обозначается как И, а «ложь» – Л. Высказывания обозначаются заглавными буквами или цепочкой букв. Например, Козьма Прутков считает:
- P: «Военные люди защищают отечество»;
- Q: «Ветер есть дыхание природы»;
- R: «Новые сапоги всегда жмут».
- Символы P, Q, R и др., которые используются для обозначения элементарных высказываний, называются атомарными формулами или атомами.

- Примеры сложных высказываний от Козьмы Пруткова:
- «Чиновник умирает, а его ордена остаются на лице земли»;
- «Хочешь быть красивым, поступи в гусары». Примем следующие обозначения:
- M: чиновник умирает;
- L: ордена чиновника остаются на лице земли;
- B: хотеть быть красивым;
- G: поступать в гусары.
- Тогда два последних предложения могут быть записаны в виде формул как
- $M \wedge L$, $B \rightarrow G$ или правильнее $G \rightarrow B$?

Символизация естественного языка средствами логики высказываний

- Операция конъюнкции в логике высказываний и союз «и» в повседневной речи употребляются в одном и том же смысле. Однако в обыденной речи не принято соединять союзом «и» два далеких по смыслу предложения (ироничное: «в огороде бузина, а в Киеве дядька»), в то время как в логике высказываний операция конъюнкции соединяет два любых высказывания. Операции конъюнкции соответствуют следующие выражения:
- А и В;
- не только А, но и В;
- В, хотя и А;
- А, а также В;
- как А, так и В;
- А вместе с В.

ИЛИ

- В повседневной речи союз «или» употребляется в двух различных смыслах: исключающем и неисключающем, а операция дизъюнкции всегда употребляется в неисключающем смысле.
- Пример – Чай или кофе? Остаться дома или пойти в университет? (исключающий пример, хотя первый пример может допускать и кофе и чай)

Употребление слов «если ..., то ...»

- в повседневной речи существенно отличается от применения в логике высказываний. В предложении «если А, то В» обыденной речи подразумевается, что В логически следует из А, в то время как в логике высказываний, не рассматривающей смысла предложений, этого не требуется. Кроме того, ложность предложения А в повседневной речи влечет либо ложность В, либо потерю смысла всего предложения «если А, то В». Таким образом, трансляция естественно-языкового предложения в предложение логики высказываний при кажущейся простоте таковой не является.
- Здесь требуется понять смысл предложения, а затем уже конструировать формулы логики высказываний

Операции импликации ($A \rightarrow B$) соответствуют следующие выражения естественного языка:

- B, если A;
- A влечет B;
- A является причиной B;
- B является следствием A;
- в случае A имеет место B;
- коль скоро A, то B;
- B, так как A;
- B, потому что A.
- «Если выглянет солнце, то станет тепло».

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Если B истинно, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности A. То есть истинное утверждение может быть обосновано с помощью любого утверждения. Пример: утверждение «если дважды два равно пяти, то снег белый» является истинным.

- Если A ложно, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности B. То есть с помощью ложного утверждения можно обосновать всё что угодно. Пример: утверждение «если дважды два равно пяти, то снег красный» является истинным.

- Если A является противоречивым (тождественно ложным) утверждением, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности B. То есть из противоречивого утверждения можно вывести всё что угодно. Пример: утверждение «если дважды два равно четырём и дважды два не равно четырём, то Луна сделана из зелёного сыра» является истинным.

- Если B является тавтологией (то есть утверждением, истинным при любом содержании; такие утверждения выражают логические законы), то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности A. То есть логические законы следуют из любых утверждений. Пример: утверждение «Если снег белый, то дважды два равно четырём или дважды два не равно четырём» является истинным.
- «Если снег красный, то дважды два равно четырём или дважды два не равно четырём» является истинным.

- Эта особенность материальной импликации является прямым следствием двух основных допущений классической логики:

- Всякое утверждение либо истинно, либо ложно, а третьего не дано;
- Истинностное значение сложного утверждения зависит только от истинностных значений входящих в него простых утверждений, а также от характера связи между ними, и не зависит от их содержания.

- В рамках этих двух допущений более удачное построение условных утверждений невозможно.

- Ясно, что материальная импликация плохо выполняет свою функцию обоснования. Подобное положение дел, отстаиваемое классической логикой, получило название «парадоксов материальной импликации».

Операции эквиваленции ($A \leftrightarrow B$) соответствуют следующие выражения естественного языка:

- A, если и только если B;
- если A, то B, и обратно;
- A, если B, и B, если A;
- A эквивалентно B;
- A равносильно B.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Формулы

Правильно построенные формулы, или просто формулы, в логике высказываний определяются рекурсивно следующим образом:

- атом есть формула;
- если G – формула, то (~G) – формула;
- если G и H – формулы, то $(G \vee H)$, $(G \wedge H)$, $(G \rightarrow H)$ и $(G \leftrightarrow H)$ – формулы;
- других формул нет.
- Логическим связкам приписан следующий убывающий ранг:
- $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, ~ .
- Таким образом, связка с большим рангом имеет большую область действия. Формула $P \leftrightarrow {\sim}Q \vee R \rightarrow S$ означает $(P \leftrightarrow ((({\sim}Q) \vee R) \rightarrow S))$.

- Если G, H – две формулы, тогда истинность формул (~G) , (G ∨ H), (G ∧ H), (G → H), (G ↔ H) определяется по истинностным значениям атомов, входящих в эту формулу, по следующей таблице.

G	H	~G	G ∧ H	G ∨ H	G → H	G ↔ H
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	И

Интерпретацией формулы является такое приписывание истинностных значений атомам, входящим в формулу, при котором каждому из них приписано либо И, либо Л, но не оба одновременно. Если формула содержит n различных атомов, то эта формула имеет 2^n интерпретаций.

истинностная таблица для формул $P \to (Q \to P)$ и $(P \to Q) \to P$

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \to (Q \to P)$	$(P \to Q) \to P$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	Л
Л	Л	И	И	И	Л

- Интерпретацию формулы, содержащей атомы A_1, A_2, ..., A_n, удобно представлять в виде
- $I = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$,
- где m_j есть A_j или $\sim A_j$. Если m_j есть A_j, то атому A_j присвоено значение И, в противном случае Л. Например, в интерпретации $\{\sim P, Q\}$ формула $(P \to Q) \to P$ «ложна», а в интерпретации $\{P, \sim Q\}$ эта же формула «истинна».
- Формула, истинная при всех возможных интерпретациях, называется общезначимой формулой, или тавтологией. Формула, ложная при всех возможных интерпретациях, называется противоречивой (или невыполнимой). Общезначимую и противоречивую формулу обозначают обычно «■», «о» соответственно. Формула, которая не является общезначимой или противоречивой, называется необщезначимой, непротиворечивой или выполнимой

- Общезначимость и противоречивость формулы может быть определена с использованием таблицы истинности, но в силу экспоненциального роста размерности числа интерпретаций с ростом числа входящих в формулу атомов такой метод не всегда является приемлемым.
- Такое положение привело к необходимости разработки правил преобразования формул. Преобразования выполняются путем замены в преобразуемой формуле некоторой ее части на подформулу, эквивалентную заменяемой. Две формулы эквивалентны, если их истинностные значения совпадают при всех интерпретациях. Например, формула $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ эквивалентна формуле P.

- Для ведения преобразований необходимо иметь минимальный запас эквивалентных формул. Ниже приведены десять законов преобразования, здесь F, G и H являются формулами, символ « = » – это знак эквивалентности.

1. $F \leftrightarrow G = (F \to G) \wedge (G \to F)$.
2. $F \to G = \sim F \vee G$.
3. $F \vee G = G \vee F$;
4. $(F \vee G) \vee H = F \vee (G \vee H)$;
5. $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$;
6. $F \vee o = F$;
7. $F \vee F = F$;
8. $F \vee \blacksquare = \blacksquare$;
9. $F \vee \sim F = \blacksquare$;
10. $\sim(\sim F) = F$;
11. $\sim(F \vee G) = \sim F \wedge \sim G$;
12. $F \wedge G = G \wedge F$.
13. $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$.
14. $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$.
15. $F \wedge \blacksquare = F$.
16. $F \wedge F = F$;
17. $F \wedge o = o$; $F \wedge \sim F = o$; $\sim(F \wedge G) = \sim F \vee \sim G$.

- Законы преобразования под номером три называются коммутативными законами; законы под номером четыре – ассоциативными законами; законы под номером пять – дистрибутивными законами; семь – закон идемпотентности; девять – законы дополнения; десять – закон двойного отрицания; одиннадцать – законы де Моргана.

ДНФ и КНФ

- В логике высказываний определены две нормальные формы: дизъюнктивная и конъюнктивная. Формула находится в дизъюнктивной нормальной форме, если она имеет следующий вид:
- $F1 \lor F2 \lor \ldots \lor Fn$,
- где каждая подформула Fi – это конъюнкция атомов или отрицания атомов. Формула находится в конъюнктивной нормальной форме, если она имеет следующий вид:
- $F1 \land F2 \land \ldots \land Fn$, где каждая подформула Fi – это дизъюнкция атомов или отрицания атомов.

- Литера – это атом или отрицание атома. Дизъюнкт – это дизъюнкция литер.
- Единичный дизъюнкт – это дизъюнкт, состоящий из одной литеры. Дизъюнкт, не содержащий никаких литер, называется пустым дизъюнктом. Формула, находящаяся в конъюнктивной нормальной форме, может быть представлена как множество входящих в форму дизъюнктов. Например, формула
- $(P \lor Q) \land (P \lor R \lor \sim Q) \land (\sim Q \lor P) \land \sim P$ может быть представлена как множество
- $\{P \lor Q, P \lor R \lor \sim Q, \sim Q \lor P, \sim P\}$.

Вывод в логических моделях нулевого порядка

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны формулы F1, F2, ..., Fn и формула G. Формула G есть логическое следствие формул F1 , F2 , ..., Fn , если для всякой интерпретации, в которой формула

$F1 \land F2 \land \ldots \land Fn$ истинна, G также истинна. Формулы F1 , F2 , ..., Fn называются посылками, G – заключением.

- ТЕОРЕМА 1. Пусть даны формулы F1, F2, ..., Fn и формула G. Тогда G есть логическое следствие формул F1, F2, ..., Fn, если формула $((F1 \land F2 \land \ldots \land Fn) \to G)$ общезначима.
- ТЕОРЕМА 2. Пусть даны формулы F1, F2, ..., Fn и формула G. Тогда G есть логическое следствие формул F1, F2, ..., Fn, если формула $(F1 \land F2 \land \ldots \land Fn \land \sim G)$ противоречива.

- Таким образом, вопрос о том, какие высказывания представляют собой логические следствия других высказываний, сводится к вопросу о том, какие высказывания общезначимы или противоречивы. Это, в свою очередь, дает возможность превратить ОПРЕДЕЛЕНИЕ и ТЕОРЕМЫ 1 и 2 в рабочий аппарат для логического вывода. Далее приведем восемь способов логического вывода в логике высказываний. В качестве примера рассматриваются следующие формулы: F1: P; F2: R; F3: $Q \land R \to \sim R$; G: $\sim Q$.

Способ 1− вычисление истинностного значения. Здесь вывод основан на определении логического следствия и на истинностных таблицах

F1: P; F2: R; F3: Q ⋀ R → ~R; G: ~ Q.

P	R	Q	$Q \wedge R$	$\sim R$	$Q \wedge R \rightarrow \sim R$	$P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R)$	$\sim Q$
И	И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И	И	Л	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	Л	И

Способ таблиц истинности 2. Здесь в качестве аппарата для логического вывода может быть использована ТЕОРЕМА 1 и метод истинностных таблиц.

P	R	Q	$Q \wedge R$	~R	$Q \wedge R \to$ ~R	$P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \to$ ~R)	~ Q	$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \to G$
И	И	И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	И	Л	Л	Л	И	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	Л	Л	И
И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	И	И	Л	И	И

Из таблицы видно, что формула $P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \to \sim R) \to \sim Q$ является общезначимой, значит, формула ~Q является логическим следствием формул P, R, $Q \wedge R \to \sim R$.

Способ таблиц истинности 3. В качестве аппарата для логического вывода может быть использована ТЕОРЕМА 2 и метод истинностных таблиц.

P	R	Q	$Q \wedge R$	$\sim R$	$Q \wedge R \rightarrow \sim R$	$P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R)$	$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \sim G$
И	И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	Л
И	Л	И	Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	Л	Л

Из таблицы видно, что формула $P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R) \wedge \sim Q$ является противоречивой, значит, формула $\sim Q$ является логическим следствием формул $P, R, Q \wedge R \rightarrow \sim R$.

Способ 4 – алгебраический. Здесь в качестве аппарата для логического вывода используется ТЕОРЕМА 1, а для доказательства общезначимости формулы – одиннадцать законов эквивалентных преобразований.

$$P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \to \sim R) \to \sim Q =$$

$$\sim(P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \to \sim R)) \vee \sim Q =$$

$F \to G = \sim F \vee G.$

$$=\sim(P \wedge R \wedge (\sim(Q \wedge R) \vee \sim R)) \vee \sim Q =$$

$\sim(F \wedge G) = \sim F \vee \sim G.$

$\sim(F \vee G) = \sim F \wedge \sim G;$

$$=\sim P \vee \sim R \vee (Q \wedge R \wedge R) \vee \sim Q =$$

$$=\sim P \vee \sim R \vee (Q \wedge R) \vee \sim Q =$$

$F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H);$

$$=\sim P \vee \sim R \vee (\cancel{Q \wedge \sim Q}) \vee (R \vee \sim Q)=$$

$$=\sim P \vee \sim R \vee R \vee \sim Q =$$

$$= \sim P \vee \blacksquare \vee \sim Q = \blacksquare.$$

также алгебраический, только здесь использована ТЕОРЕМА 2, а для доказательства противоречивости формулы – десять законов эквивалентных преобразований.

- $P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R) \wedge Q =$
- $=P \wedge R \wedge (\sim(Q \wedge R) \vee \sim R) \wedge Q =$
- $=P \wedge R \wedge (\sim Q \vee \sim R \vee \sim R) \wedge Q =$
- $=P \wedge R \wedge (\sim Q \vee \sim R) \wedge Q =$
- $=P \wedge R \wedge ((\sim Q \wedge Q) \vee (\sim R \wedge \sim Q)) =$
- $=P \wedge R \wedge \sim R \wedge \sim Q =$
- $=P \wedge o \wedge \sim Q = o$

Способ 6 − алгоритм редукции. Этот способ позволяет доказывать общезначимость формул приведением их к абсурду. Этот способ удобен, когда формула содержит много импликаций.

- Пусть посылка $(P \land Q) \to R$, а заключение $P \to (Q \to R)$, тогда заключение является логическим следствием посылки, если формула $((P \land Q) \to R) \to (P \to (Q \to R))$ является общезначимой. Предположим, что в некоторой интерпретации эта формула ложна. Это возможно только тогда, когда формула $(P \land Q) \to R$ истинна, а формула $P \to (Q \to R)$ ложна. Формула $P \to (Q \to R)$ ложна только тогда, когда P = И, Q = И, R = Л, что противоречит предположению $(P \land Q) \to R$ = И, следовательно, формула $((P \land Q) \to R) \to (P \to (Q \to R))$ является общезначимой.

Способ 7− алгоритм Девиса и Патнема. Данный алгоритм основан на использовании конъюнктивной нормальной формы, представленной как множество дизъюнктов S. Алгоритм состоит из четырех правил.

- 1. Правило тавтологии. Из множества дизъюнктов S вычеркиваются все тавтологичные дизъюнкты.
- 2. Правило однолитерных дизъюнктов. Если в множестве S есть единичный дизъюнкт C, то, вычеркнув из множества S дизъюнкт C, получим множество S'. Если S' пусто, то S выполнимо; иначе, вычеркнув из множества S' дизъюнкт ~C, получим множество S''. Множество S невыполнимо, когда невыполнимо S''. Если ~C является единичным дизъюнктом, то при его вычеркивании он превращается в противоречивую формулу
- 3. Правило чистых литер. Литера L в дизъюнкте из S называется чистой, если ~L не появляется ни в каком дизъюнкте из S. Если литера L чистая в S, то, вычеркнув из множества S все дизъюнкты, содержащие L, получим множество S'. Множество S невыполнимо, когда невыполнимо S'.
- 4. Правило расщепления. Если множество дизъюнктов S может быть представлено следующим образом:

$(A1 \vee L) \wedge ... \wedge (An \vee L) \wedge (B1 \vee \sim L) \wedge ... \wedge (B\,m \vee \sim L) \wedge R$,

где Ai, Bj, R не содержат литер L и ~L, то получим два множества

расщепления $S' = A1 \wedge ... \wedge An \wedge R$ и $S'' = B1 \wedge ... \wedge Bm \wedge R$. Множество S невыполнимо, когда невыполнимы множества S' и S''.

- Используя алгоритм Девиса и Патнема, покажем, что формула $(P \lor Q) \land (P \lor R) \land (\sim Q \lor \sim R) \land \sim P \land U$ невыполнима.
- $S = \{ P \lor Q , P \lor R, \sim Q \lor \sim R, \sim P, U \}$;
- правило 2, единичный дизъюнкт $C = \sim P$;
- $\{ Q, R, \sim Q \lor \sim R, U \}$

правило 2, единичный дизъюнкт $C = Q$;

$\{ R, \sim R, U \}$

правило 2, единичный дизъюнкт $C = R$.

- $\{ O,U \}$

Так как множество содержит невыполнимый дизъюнкт, то оно невыполнимо.

- Задача о влюбленном логике
- Перед нами три девушки: Сью, Марция и Диана. Предположим, что юноша, занимающийся математической логикой, высказывает следующее.
- Я люблю, по крайней мере, одну из этих трех девушек.
- Если я люблю Сью, а не Диану, то я также люблю Марцию.
- Я либо люблю Диану и Марцию, либо не люблю ни одну из них.
- Если я люблю Диану, то я также люблю Сью.
- Требуется определить, любит ли автор высказываний Диану?
- Запишем формулами четыре высказывания и предполагаемое следствие:
- F1: C v M v D
- F2: C & ~ D => M
- F3: D & M v ~ D & ~ M
- F4: D => C
- G: D
- Формулу, построенную согласно теореме 2 о логическом следствии:
- (C v M v D) & (C & ~ D => M) & (D & M v ~ D & ~ M) & (D => C) & ~ D
- приведем к КНФ и получим интересующее нас множество дизъюнктов:
- S = {C v M v D, ~ C v M v D, M v ~ D, ~ M v D, ~ D v C, ~ D}.

$S = \{C \vee M \vee D, \sim C \vee M \vee D, M \vee \sim D, \sim M \vee D, \sim D \vee C, \sim D\}.$

- Вычеркиваем одиночный дизьюнкт $\sim D$ (правило 2)

$S'' = \{C \vee M, \sim C \vee M, M, \sim M, C\}.$

- Вычеркиваем одиночный дизьюнкт C (правило 2)

$S'' = \{M, M, M, \sim M\}.$

- Получаем невыполнимое множество S'', значит по второй теореме логик любит Диану

Способ 8 − метод резолюций.
Данный метод является обобщением правила однолитерных дизъюнктов Девиса и Патнема и также основан на использовании конъюнктивной нормальной формы, представленной как множество дизъюнктов S. Обобщение правила связано с тем, что оно применяется к любой паре дизъюнктов, не обязательно единичных.

Правило резолюций и формулируется следующим образом:

- Если в дизъюнкте C1 существует литера L, а в дизъюнкте C2 существует литера ~L, то, вычеркнув литеры L и ~L из C1 и C2, соответственно, построим дизъюнкцию оставшихся дизъюнктов, которая называется резольвентой дизъюнктов C1 и C2.
- Рассмотрим, например, дизъюнкты C1: $P \vee Q$, C2: $\sim Q \vee \sim R \vee U$, резольвентой дизъюнктов C1 и C2 будет следующий дизъюнкт: $P \vee \sim R \vee U$.
- Основное свойство резольвенты. Любая резольвента дизъюнктов C1 и C 2 является логическим следствием дизъюнктов C1 и C2. Для невыполнимого множества дизъюнктов применением метода резолюций можно получить пустой дизъюнкт

- Метод резолюций основан на проверке того, содержит ли исходное множество дизъюнктов пустой дизъюнкт: если множество содержит пустой дизъюнкт, то это множество невыполнимо, в противном случае проверяется, можно ли получить пустой дизъюнкт из исходного множества. Такой процесс проверки называется выводом. Выводом из конечного множества дизъюнктов S называется конечная последовательность C1, C2, ..., Cn дизъюнктов, всякий элемент Ci которой или принадлежит множеству S, или является резольвентой дизъюнктов, предшествующих данному элементу Ci. Вывод пустого дизъюнкта из S называется опровержением или доказательством невыполнимости S.

Основа метода

- (~C or K) and (C or P)

Если C = 1

то K

Если C=0

то P

Фактически нужно проверить P or K

- Используя метод резолюций, проведем вывод и покажем, что формула $(P \lor Q) \land (P \lor R) \land (\sim Q \lor \sim R) \land \sim P \land U$ невыполнима. Запишем множество дизъюнктов $S = \{ P \lor Q, P \lor R, \sim Q \lor \sim R, \sim P, U \}$ следующим образом:
- 1) $P \lor Q$;
- 2) $P \lor R$;
- 3) $\sim Q \lor \sim R$;
- 4) $\sim P$;
- 5) U;
- 6) из п.п. 2, 3 получим резольвенту $P \lor \sim Q$;
- 7) из п.п. 1, 6 получим резольвенту P;
- 8) из п.п. 4, 7 получим резольвенту Ǿ.
- Так как есть логическое следствие множества дизъюнктов S, то S невыполнимо.

- Доказать невыполнимость конечного множества дизъюнктов S можно с помощью следующего алгоритма.
- Шаг 1. Если множество S содержит пустой дизъюнкт, то останов с сообщением «Множество невыполнимо».
- Шаг 2. Если возможно найти резольвенту, то вычислить резольвенту R, иначе останов с сообщением «Множество выполнимо».
- Шаг 3. $S := S \cup \{ R \}$. Перейти на шаг 1.
- Приведенный алгоритм – недетерминированный, на шаге 2 возможно вычисление различных резольвент, некоторые резольвенты могут оказаться ненужными и вычисляться несколько раз, а алгоритм без надлежащих проверок может зациклиться.

- Алгоритмы доказательства выводимости A $\rightarrow$ B, построенные на основе этого метода, применяются во многих системах искусственного интеллекта, а также являются фундаментом, на котором построен язык логического программирования «Пролог».

- «Яблоко красное и ароматное.»
- «Если яблоко красное, то яблоко вкусное.»

- Докажем утверждение «яблоко вкусное». Введем множество формул, описывающих простые высказывания, соответствующие вышеприведенным утверждениям. Пусть

- $X1$ — «Яблоко красное»,
- $X2$ — «Яблоко ароматное»,
- $X3$ — «Яблоко вкусное».

- Тогда сами утверждения можно записать в виде сложных формул:

- $X1 \wedge X2$ — «Яблоко красное и ароматное.»
- $X1 \rightarrow X3$ — «Если яблоко красное, то яблоко вкусное.»

- Тогда утверждение, которое надо доказать, выражается формулой $X3$.
- Итак, докажем, что $X3$ является логическим следствием
- $(X1 \wedge X2)$ и $(X1 \rightarrow X3)$.

- Если возможно описать задачу в терминах логики высказываний, то, применив любой из указанных восьми способов вывода, можно, доказав противоречивость или общезначимость формулы, решить поставленную задачу.