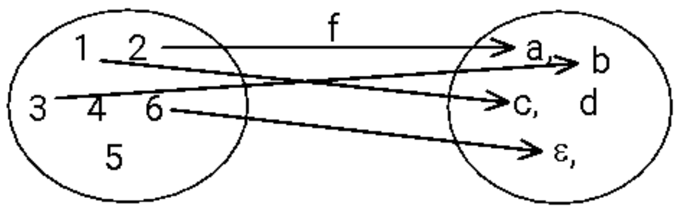
Лекция 5. Числовые последовательности; предел числовой последовательности. Основные элементарные функции. Предел функции при $x \to a$, $x \to \infty$, бесконечный предел.

Последовательность. Предел последовательности. Свойства последовательностей

Определение. Числовой последовательности.

Если каждому $\forall n \in N$ можно поставить в соответствие действительное число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$, n=1,2,3,..., x_n- члены числовой последовательности.



Определение. Числовой последовательности, как функции натурального аргумента.

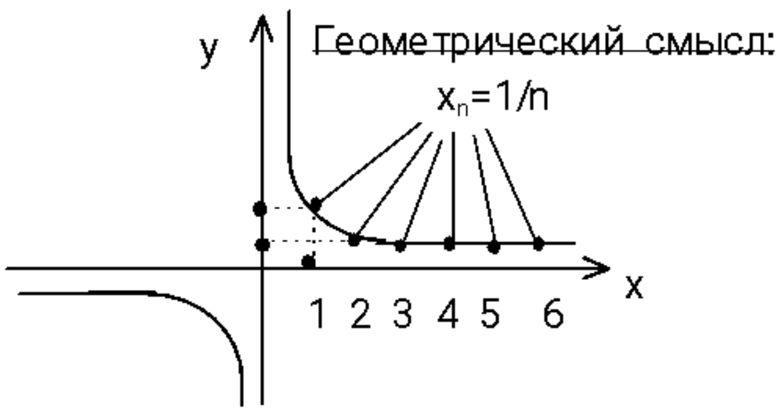
Любую функцию, определенную на множестве натуральных чисел, принимающую свои значения на множестве действительных чисел (функцию натурального аргумента) будем называть числовой последовательностью. Члены последовательности- значения функции натурального аргумента.

Пример.

Рассмотрим $\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\}$, n=1,2,3...

Члены этой последовательности

$1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}...\frac{1}{n};...$ есть значения функции $f(x)=\frac{1}{x}$ в точках x=n.

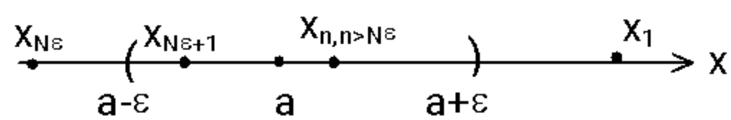


Определение. Предела числовой последовательности.

Число а называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon$ (существует номер N_ε): $\forall n>N_\varepsilon \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$, при этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

<u>Геометрический смысл определения:</u>

В ε- окрестности т. а лежит бесконечно много членов последовательности для $\forall n>N$, а вне этой окрестности лежит лишь конечное число членов последовательности.



Чем больше индекс члена числовой последовательности, тем ближе точка, отвечающая этому члену последовательности, располагается к точке а.

Определение. Ограниченной числовой последовательности.

Если $\exists$ числа $M>0$ и $\exists N>0$ такие, что $\forall n>N \Rightarrow |x_n|<M$, то говорят, что $\{x_n\}$- ограниченная последовательность.

Определение. Ограниченные сверху (снизу) числовые последовательности.

Если $\exists M$ и $\exists N>0$ такие, что: $\forall n>N \Rightarrow x_n<M$ $(x_n>M)$, то говорят, что числовая последовательность ограничена сверху (снизу).

Если для $\forall M>0$ $\exists N$: $\forall n>N \Rightarrow |x_n|>M$, то говорят, что предел числовой последовательности равен ∞ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

В том случае, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или предел последовательности $\{x_n\}$ не существует, говорят, что последовательность $\{x_n\}$- расходится.

Когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$- существует и конечен, то говорят, что числовая последовательность сходится.

Для исследования сходимости последовательностей $\{x_n\}$ используются достаточные признаки сходимости числовых последовательностей.

Теорема.

Если для последовательности $f(n)$, $n=1,2,\ldots$ $\exists f(x)$, определенная при $x\to+\infty$, такая, что ее значения в точках натурального ряда чисел совпадают со значениями числовой последовательности, тогда из $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$

(числовая последовательность- частный случай функции).

ЗАМЕЧАНИЕ: обратное неверно, т.е.

из $\exists \lim\limits_{n+\infty} f(n) \not\Rightarrow \exists \lim\limits_{x+\infty} f(x)$ (не следует).

Пример.

Рассмотрим последовательность $f(n)=\sin n\pi$. Хотя предел ее равен 0 $\lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 0$, но $\lim_{x\to\infty}\sin \pi x = \nexists$

Теорема.

Если для f(n), n=1,2,3... $\exists f(1/x)$, определенная при $x\to 0+0$, тогда из $\exists \lim_{x\to 0+0} f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to 0+0} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Характеристика последовательностей.

Если для $\forall n\in N$

а) $x_n \geq x_{n+1}$, то последовательность не возрастает,

б) $x_n > x_{n+1}$ - последовательность убывает,

в) $x_n \leq x_{n+1}$ - не убывает,

г) $x_n < x_{n+1}$ - возрастает.

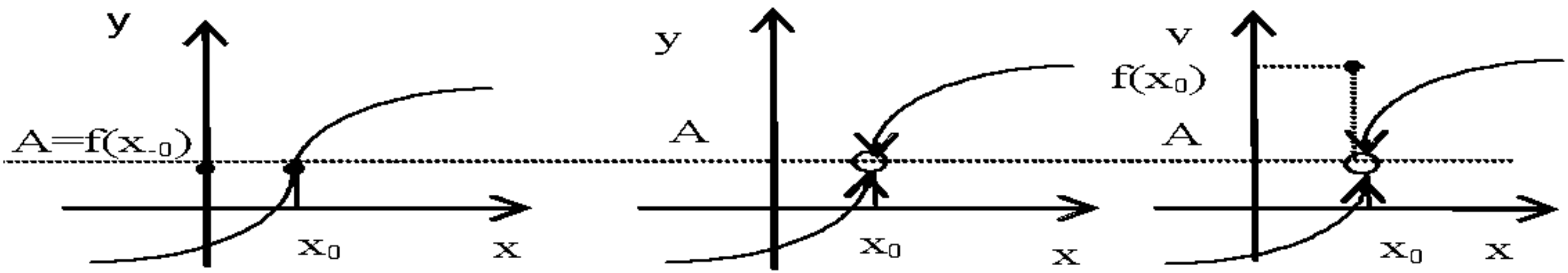
Последовательности вида а), б), в), г)- называются монотонными.

Критерий сходимости числовых последовательностей

Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Понятие предела функций

Если функция $y=f(x)$ определена хотя бы в проколотой окрестности точки x_0, то ее график в этой окрестности можно представить одним из следующих способов:



$f(x_0)=A$ Число A - $\exists$ Число A - $\exists$

Значение $f(x_0)\neq\exists$ $f(x_0)\neq A$

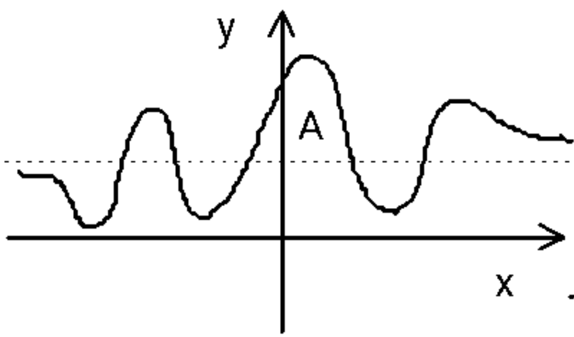
Во всех трех случаях существует число A к которому стремятся значения функции $y=f(x)$ когда $x\to x_0$, причем его существование не определяется значением функции $y=f(x)$ в т. x_0. Существование числа A определяется "поведением" функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ ($x\neq x_0$), т.е. в окрестности точки x_0.

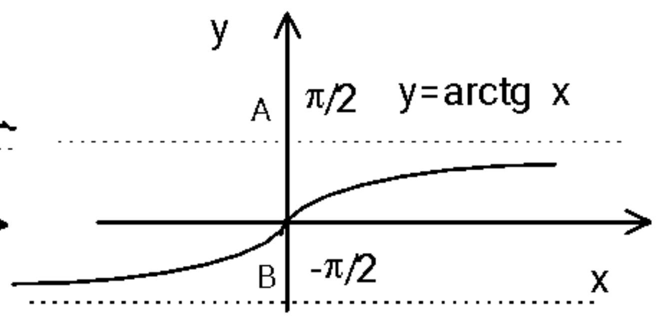
Если такое число A существует, то его называют пределом функции $y=f(x)$ в т. x_0 (при $x\to x_0$).

Определение.

Число A называют пределом функции $y=f(x)$ в т. x_0 и при этом пишут $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для $\forall$(любого числа) $\varepsilon>0$ (сколь угодно малого) $\exists$(найдется число) $\delta_\varepsilon>0$ (зависящее от ε) такое, что для $\forall x$ из неравенства: $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

Если же функция определена при любых достаточно больших $x\in R$, то ее график может иметь следующий вид:





Значит и при достаточно больших x значения функции могут стремиться к некоторым числам, которые называют пределами функции в бесконечности (при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$).

Дадим определение и для этих случаев.

Определение.

Число А (В,С) называют пределом функции $f(x)$ при $x\to\infty$ ($x\to+\infty$, $x\to-\infty$), и при этом пишут $A=\lim_{x\to\infty} f(x)$ ($B=\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $C=\lim_{x\to-\infty} f(x)$) если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ число $N_\varepsilon>0$ такое, что при $\forall |x|>N_\varepsilon$ ($\forall x>N_\varepsilon$, $\forall x<-N_\varepsilon$) выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ ($|f(x)-B|<\varepsilon$, $|f(x)-C|<\varepsilon$).

Примечание.

Число А- называют пределом $y=f(x)$ в бесконечности, число В- в $+\infty$, число С- в $-\infty$.

Среди функций, имеющих предел, есть функции, предел которых равен 0. Рассмотрим такие функции.