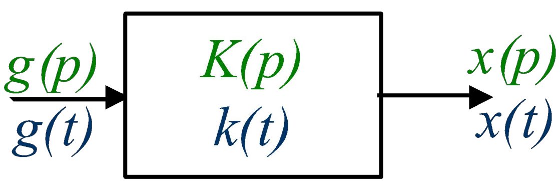
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Понятие устойчивости

Для того, чтобы замкнутая САР была работоспособной, она должна быть устойчивой.

Пусть имеется система автоматического регулирования:



Определение.
***Устойчивой* является САР, реакция которой на ограниченное воздействие является также ограниченной величиной.**

Математически это означает, что реакция САР на воздействие *g(t)* (при |*g(t)*| ≤ *M* для всех *t* ≥ 0, где *M* – конечное число) описывается выражением

$$x(t) = \int_0^t k(\tau) g(t-\tau) d\tau \le M \int_0^t k(\tau) d\tau \le M \int_0^\infty k(\tau) d\tau \le M \int_0^\infty |k(\tau)| d\tau = Mc$$

где $c = \int_0^\infty k(\tau) d\tau < \infty$ – конечное число

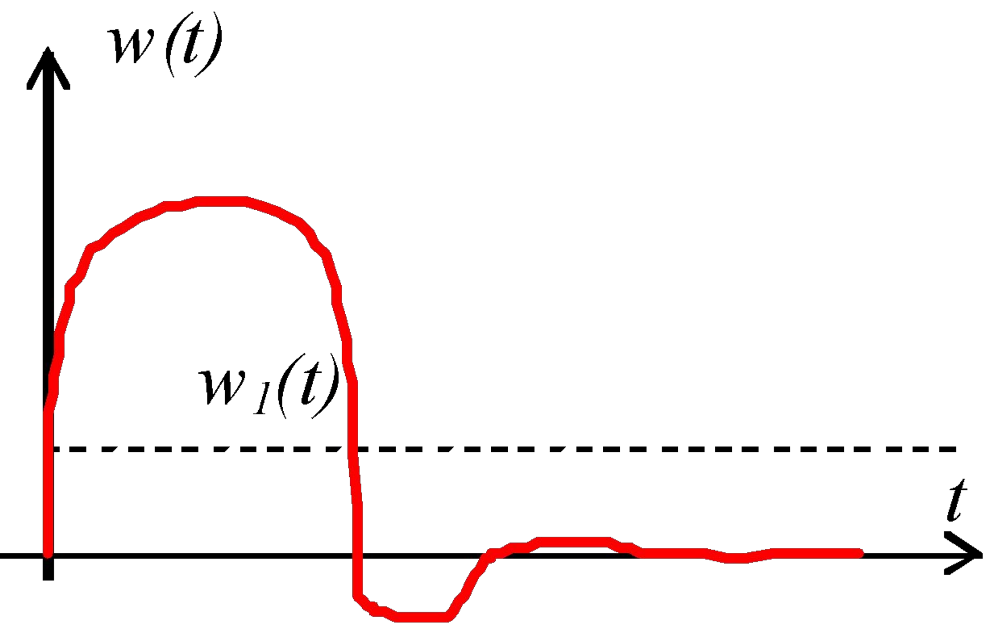
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Понятие устойчивости

Учитывая связь весовой и передаточных функций, можно определить признак 1 устойчивой системы:

Для того, чтобы САР была *устойчивой*, импульсная переходная (весовая) характеристика должна быть *абсолютно интегрируемой*.

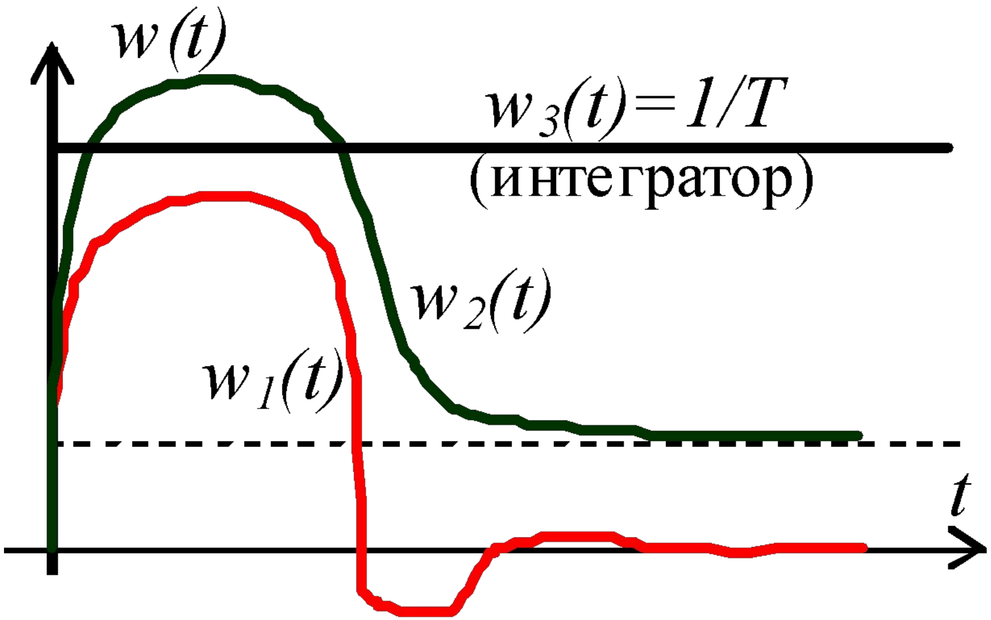
Другими словами, **если абсолютная площадь, ограниченная импульсной характеристикой *w(t)*, является ограниченной величиной, то САР *устойчива*.**



Например, САР с импульсной переходной характеристикой $w_1(t)$ является устойчивой, поскольку при $t \to \infty$ имеет место $w_1(t) \to 0$, и площадь, ограниченная импульсной характеристикой $w_1(t)$, является ограниченной величиной (интеграл конечный).

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Понятие устойчивости



САР с импульсной характеристикой $w_2(t)$ является неустойчивой, поскольку при t → ∞ имеет место $w_2(t) \rightarrow const$, и интеграл является бесконечным.

В этом плане интегратор как элемент устойчивым назвать нельзя: его импульсная характеристика $w_3(t)$ ограничивает бесконечно большую площадь. Интегратор часто называют нейтральным звеном.

Площадь, ограниченная импульсной характеристикой, будет конечной, если

$$\lim_{t \to \infty} w(t) = 0$$

В этом случае система будет приходить в состояние равновесия: $h(t) \rightarrow const$

На основании изложенного можно определить признак 2 устойчивой системы:

Устойчивой **является та система, которая, будучи выведенной из состояния равновесия, возвращается в исходное состояние после исчезновения воздействия, выведшего систему из состояния равновесия.**

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраическая трактовка устойчивости

<u>Задача.</u>

Определить алгебраическое условие, при котором $\boxed{\lim\limits_{t\to\infty} w(t) = 0}$

<u>Решение.</u>

Запишем выражение для *w(t)*, учитывая связь между весовой функцией и п. ф., используя теорему разложения и считая, что все полюсы п.ф. простые, причем нулевые полюсы отсутствуют.

$$w(t) = L^{-1}\left[K(p)\right] = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{H(p_\nu)}{G'(p_\nu)} e^{p_\nu t} = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{p_\nu t}$$

где *ν* = 1, 2, …, *n* – порядковые номера полюсов ПФ *K(p)*.

В общем случае полюсы – комплексные числа: $p_\nu = \alpha_\nu \pm j\beta_\nu$

Тогда

$$\boxed{w(t) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{\alpha_\nu t} e^{\pm j\beta_\nu t}}$$

где $e^{\pm j\beta_\nu t} = \cos\beta_\nu t \pm j\sin\beta_\nu t \le 1$ – ограниченная величина.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраическая трактовка устойчивости

<u>Решение.</u>

$$w(t) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{\alpha_\nu t} e^{\pm j\beta_\nu t}$$

Из последнего выражения видно, что САР будет устойчивой, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$$

если вещественные части α_ν всех полюсов будут отрицательными (α_ν<0).

Если же хотя бы один полюс (пусть *i*-й) имеет положительную вещественную часть (α_i> 0), то САР будет неустойчивой, поскольку

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty$$

– в системе будет иметь место расходящийся процесс.

Если хотя бы один полюс чисто мнимый (α_i =0), то САР будет нейтральной (не устойчивой), поскольку

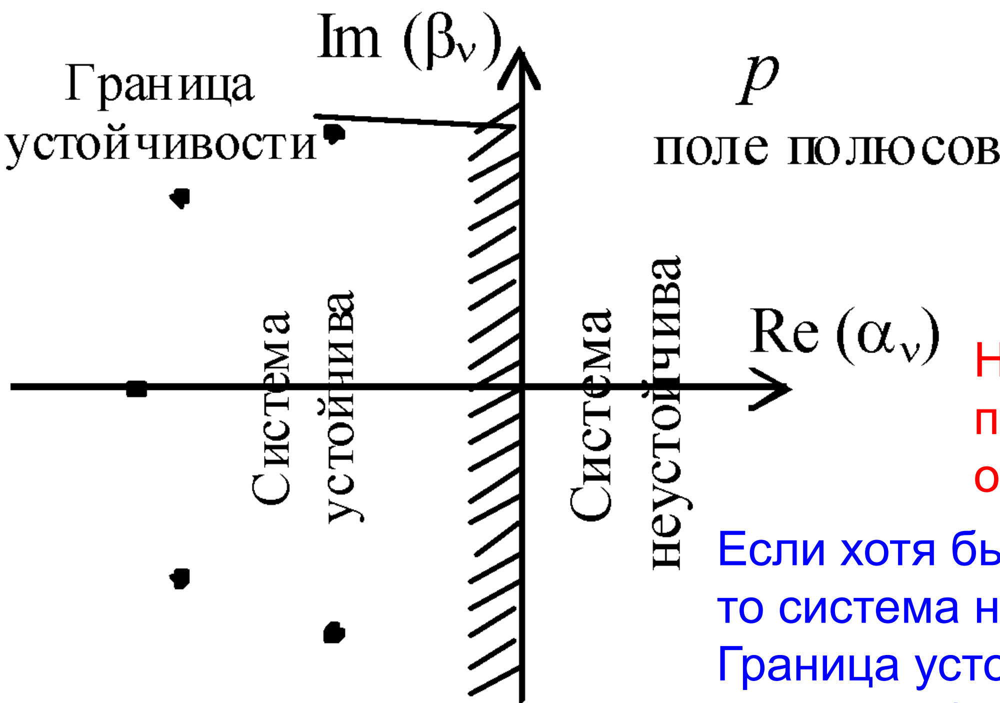
$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \lim_{t\to\infty} c_i e^{\pm j\beta_i t} > 0$$

и в системе будут иметь место незатухающие автоколебания.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Геометрическая трактовка устойчивости

Полюсы ПФ замкнутой системы можно изобразить на комплексной плоскости.



Для того, чтобы САР была *устойчивой*, необходимо и достаточно, чтобы все полюсы ПФ замкнутой системы находились в левой полуплоскости комплексного переменного *p*

Наличие хотя бы одного полюса в правой полуплоскости свидетельствует о том, что система *неустойчива*.

Если хотя бы один полюс находится на мнимой оси, то система находится *на границе устойчивости*. Граница устойчивости обозначается штриховкой в сторону области устойчивости.

Для сложных САР вычисление полюсов для установления их устойчивости или неустойчивости может представлять весьма сложную задачу. Поэтому известно большое количество так называемых *критериев устойчивости*, основанных на использовании определенных математических закономерностей в характеристиках устойчивых систем.

Различают алгебраические и частотные критерии устойчивости.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

(Hurwitz, 1895)

<u>Предварительные замечания</u>

Все известные алгебраические критерии (Гурвица, Льенара-Шипара, Рауса) основаны на выявлении требуемых алгебраических соотношений между коэффициентами характеристического полинома, гарантирующих отсутствие его правых корней.

Пусть имеется характеристический полином замкнутой САР

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

где n – порядок САР.

Из коэффициентов х.п. может быть составлена матрица Гурвица (квадратная порядка n)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

На главной диагонали выписываются элементы a_1, a_2, …, a_n. Затем при движении от этих элементов вверх записываются коэффициенты в порядке возрастания индексов, при движении вниз – в порядке убывания. Недостающие элементы заполняются нулями.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

<u>Формулировка критерия</u>

Для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все определители Гурвица были бы положительны:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

и т.д., включая $\Delta_n > 0$

<u>Примечания</u>.

1. Определители Гурвица составляются по матрице Гурвица

2. Количество определителей равно порядку САР.

3. Последний определитель может быть вычислен более просто:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$$

4. Если $a_0 < 0$, то предварительно необходимо *G(p)* умножить на –1.

$$\begin{array}{cccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \dots & \Delta_n \end{array}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 1. ***n=1***

$$G(p) = a_0 p + a_1$$

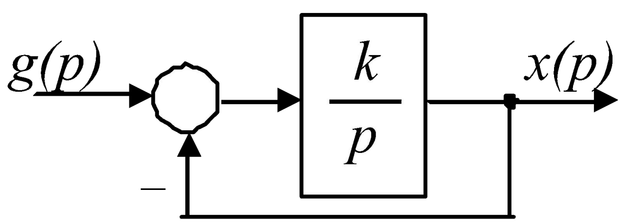
Определитель Гурвица $\Delta_n = \Delta_1 = a_1$

Условия устойчивости согласно критерия:

$$\boxed{a_0 > 0\,, \quad a_1 > 0}$$

(при этом полюс п.ф. $p_1 = -a_0 / a_1$ будет отрицательным.)

Пример 1. Определить условия устойчивости САР (n=1) по критерию Гурвица.



Решение.

ПФ замкнутой САР $K(p) = \dfrac{k/p}{1 + k/p} = \dfrac{k}{p+k}$

Характеристический полином: $G(p) = p + k$

Условие устойчивости $k > 0$

(Т.е. данная САР будет устойчива при любом положительном k, даже при $k \to \infty$)

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 2. ***n=2***

$$G(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$$

Определители Гурвица

$$\Delta_n = \Delta_1 = a_1 \; ; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2$$

Условия устойчивости согласно критерия:

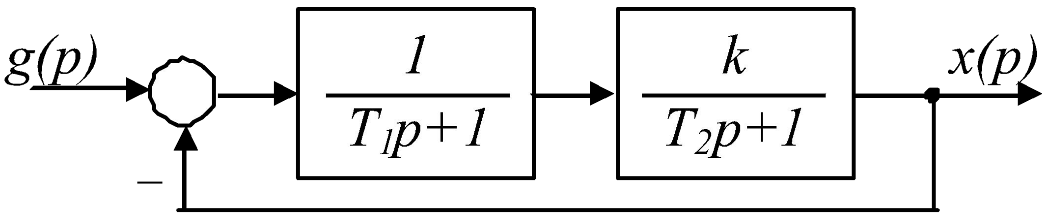
$$\boxed{a_0 > 0\,, \quad a_1 > 0\,, \quad a_1 a_2 > 0}$$

Таким образом, для САР 2-го порядка, как и для САР 1-го порядка, необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность всех коэффициентов *G(p)*.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пример 2. Определить условия устойчивости САР (*n*=2) по критерию Гурвица



Решение.

П.ф. замкнутой САР

$$K(p)=\frac{\dfrac{1}{T_1 p+1}\cdot\dfrac{k}{T_2 p+1}}{1+\dfrac{1}{T_1 p+1}\cdot\dfrac{k}{T_2 p+1}}=\frac{k}{(T_1 p+1)(T_2 p+1)+k}$$

Характеристический полином:

$$G(p)=T_1 T_2 p^2+(T_1+T_2)p+1+k$$

Условия устойчивости

$$k>-1,\qquad T_1>0,\qquad T_2>0$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 3. ***n=3***

$$G(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

Определители Гурвица

$$\Delta_n = \Delta_1 = a_1 \; ; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 \; ; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2$$

Условия устойчивости согласно критерия могут быть получены после простых преобразований:

$$a_0 > 0 \,, \quad a_1 > 0 \,, \quad a_2 > 0 \,, \quad a_3 > 0 \,,$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Таким образом, для устойчивости САР 3-го порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического полинома *G(p)* были положительны, и произведение средних коэффициентов было больше произведения крайних.

Следствие 1 из критерия Гурвица.

Для системы любого порядка положительность коэффициентов х.п. является необходимым, но не достаточным условием устойчивости.

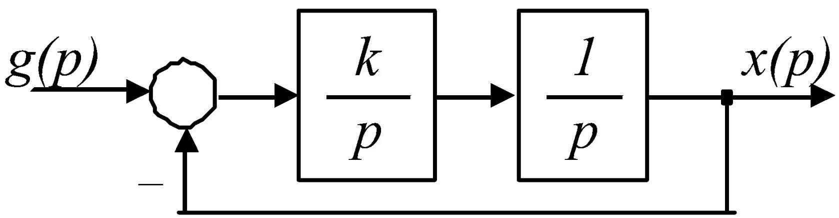
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Следствие 2 из критерия Гурвица.

Пропуск хотя бы одного члена полинома (равенство соответствующего коэффициента нулю) говорит о том, что САР не устойчива (возможно, на границе устойчивости).

Пример 3. Определить условия устойчивости САР по критерию Гурвица.



Решение. П.ф. замкнутой САР

$$K(p) = \frac{\frac{k}{p}\cdot\frac{1}{p}}{1+\frac{k}{p}\cdot\frac{1}{p}} = \frac{k}{p^2+k}$$

Характеристический полином: $G(p) = p^2 + k$

Определители Гурвица в этом случае равны нулю и критерий не выполняется.

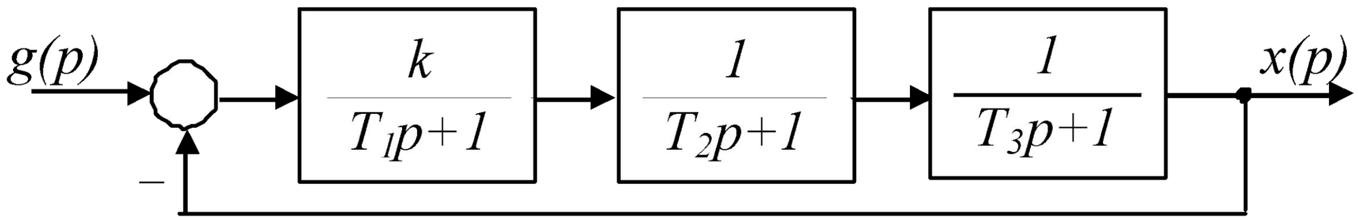
Такое звено является частным случаем колебательного звена при $\xi=0$ и называется *консервативным*, используется для формирования гармонических сигналов, поскольку ее переходной функцией есть незатухающие автоколебания (звено на границе устойчивости).

Рассмотренная САР (пример 3) называется *структурно неустойчивой*, поскольку невозможно добиться ее устойчивости только путем изменения ее параметров.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

<u>Пример 4</u>. Определить условия устойчивости САР (n=3) по критерию Гурвица



Решение.

П.ф. замкнутой САР

$$K(p)=\frac{\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}}{1+\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}}=\frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+k}$$

Характеристический полином:

$$G(p)=T_1T_2T_3p^3+(T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3)p^2+(T_1+T_2+T_3)p+1+k$$

Условия устойчивости

$$k>-1, \quad T_1>0, \quad T_2>0, \quad T_3>0$$

$$(T_1+T_2+T_3)(T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3)>(1+k)T_1T_2T_3$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пример 4. Условия устойчивости

$$k > -1, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0, \quad T_3 > 0$$

$$(T_1 + T_2 + T_3)(T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3) > (1+k)T_1T_2T_3$$

Частный случай: Если $T_1 = T_2 = T_3 = T > 0$, то из последнего условия устойчивости следует:

- что система будет устойчива при $k < 8$, независимо от величин постоянных времени;
- при $k = k_{гр} = 8$ САР будет находиться на границе устойчивости;
- при большем значении коэффициента ($k > 8$) САР будет неустойчива.

Для того, чтобы повысить коэффициент усиления разомкнутой системы, сохраняя устойчивость САР, следует постоянные времени раздвинуть в значениях. Иначе говоря, граничный коэффициент усиления $k_{гр}$ больше зависит от соотношения постоянных времени, нежели от их величины.

Например, если $T_1 = 1$, $T_2 = 1$, $T_3 = 0{,}1$. Из последнего условия устойчивости можно получить, что

$$k_{гр} = 45{,}2$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Позволяют судить об устойчивости САР по виду ее частотной характеристики (АФЧХ). Наиболее распространенные – критерии Михайлова, Найквиста.

Все частотные критерии устойчивости базируются на принципе аргумента.

Принцип аргумента

Рассмотрим полином с действительными коэффициентами

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

имеющий *n* нулей, среди которых *m* являются правыми (имеют положительную вещественную часть), а остальные *n–m* – левыми.

Теорема. Приращение аргумента вектора *D(jω)* при изменении частоты *ω* от –∞ *до +∞ равно разности между числом левых и правых нулей полинома D(p)*, умноженной на *π*, т.е.

$$\Delta Arg\left[D(j\omega)\right]_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = (n-2m)\pi$$

где *n* – общее число нулей; *m* – число правых нулей.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Принцип аргумента

Доказательство. Разложим полином *D(p)* на множители:

$$D(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_n)$$

и выполним подстановку $p = j\omega$:

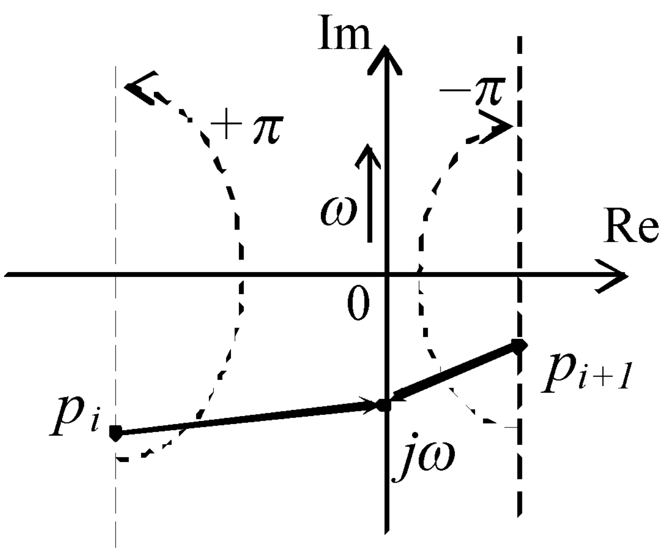
$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\cdots(j\omega - p_n)$$

Модуль этого вектора равен:

$$|D(j\omega)| = a_0|j\omega - p_1||j\omega - p_2|\cdots|j\omega - p_n|$$

а аргумент –

$$\boxed{Arg[D(j\omega)] = Arg[j\omega - p_1] + Arg[j\omega - p_2] + \cdots + Arg[j\omega - p_n]} \qquad (*)$$

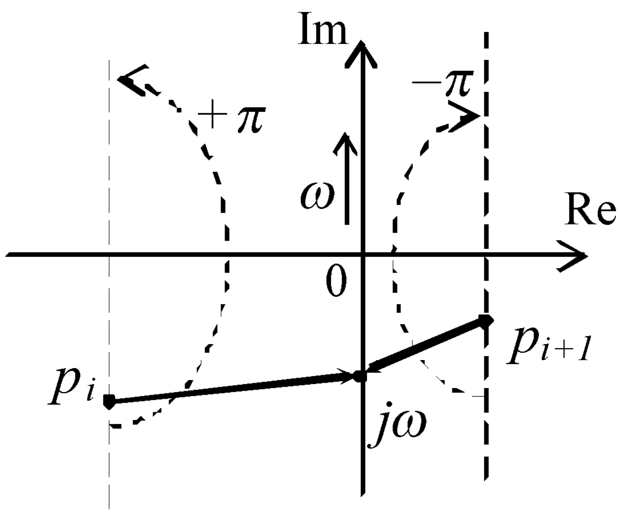


Каждый из элементарных векторов $j\omega - p_i$ может быть изображен на комплексной плоскости в виде стрелки, выходящей из точки p_i и приходящей в точку $j\omega$.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Принцип аргумента



Положительным направлением вращения есть вращение против часовой стрелки.

Изменяя ω *от* $-\infty$ *до* $+\infty$, *точка* $j\omega$ будет перемещаться вверх по мнимой оси, а аргумент вектора $j\omega - p_i$, соответствующего левому нулю, изменится от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, т.е. на $+\pi$.

Аналогично, при этом аргумент вектора $j\omega - p_{i+1}$, соответствующего правому нулю, изменится от $3\pi/2$ до $\pi/2$, т.е. на $-\pi$.

Учитывая количество левых и правых нулей, из (*) получим:

$$\Delta Arg\left[D(j\omega)\right]_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = m\cdot(-\pi) + (n-m)\cdot\pi = (n-2m)\pi$$

Теорема доказана.

Следствие. Обычно рассматривают только положительные частоты, т.е. ω изменяется от 0 до $+\infty$. В этом случае приращение аргумента будет вдвое меньше и равно

$$\boxed{\Delta Arg\left[D(j\omega)\right]_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = (n-2m)\frac{\pi}{2}}$$

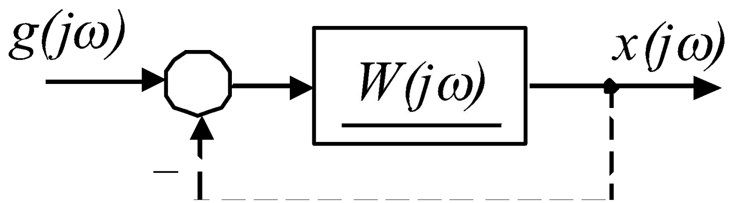
Доказательство выполняется отдельно для действительных и комплексных нулей с учетом того, что последние в общем случае образуют комплексно-сопряженные пары.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста (Nyqvist, 1932)

Предварительные замечания



П.ф. разомкнутой САР

$$W(p)=\frac{R(p)}{Q(p)}$$

Пусть система в разомкнутом состоянии является неустойчивой.

m – порядок неустойчивости разомкнутой САР, равный числу правых полюсов п.ф. разомкнутой системы (если ***m** = 0*, то САР в разомкнутом состоянии устойчива, или, по крайней мере, на границе устойчивости).

Вводится вспомогательная функция:

$$\varphi(p)=1+W(p)=1+\frac{R(p)}{Q(p)}=\frac{R(p)+Q(p)}{Q(p)}=\frac{G(p)}{Q(p)}$$

где *Q(p)* – характеристический полином разомкнутой САР;
G(p) = R(p) + Q(p) – характеристический полином замкнутой САР.

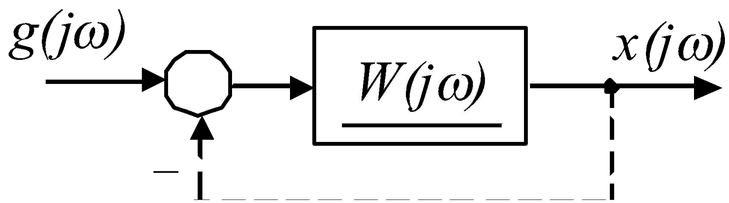
Пусть характеристическое уравнение замкнутой САР *G(p) = 0* имеет ***l*** правых корней.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Предварительные замечания



Тогда на основании принципа аргумента изменение угла поворота вектора *ϕ(jω)* при изменении частоты от 0 до +∞ *будет равно:*

$$\Delta Arg\left[\varphi\left(j\omega\right)\right]_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \Delta Arg\left[G\left(j\omega\right)\right] - \Delta Arg\left[Q\left(j\omega\right)\right] = \left(n-2l\right)\frac{\pi}{2} - \left(n-2m\right)\frac{\pi}{2} = \left(m-l\right)\pi$$

Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы все нули ее характеристического полинома были левыми, т.е. *l=0*. Тогда

$$\Delta Arg\left[\varphi\left(j\omega\right)\right]_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = m\pi = 2\pi\frac{m}{2}$$

Таким образом, если разомкнутая САР неустойчива и имеет ***m*** правых корней, то замкнутая САР будет устойчива тогда и только тогда, когда годограф вспомогательной функции *ϕ(jω)* = 1 + *W(jω)* при изменении частоты *ω* от нуля до +∞ охватывает начало координат в положительном направлении ***m/2*** раз.

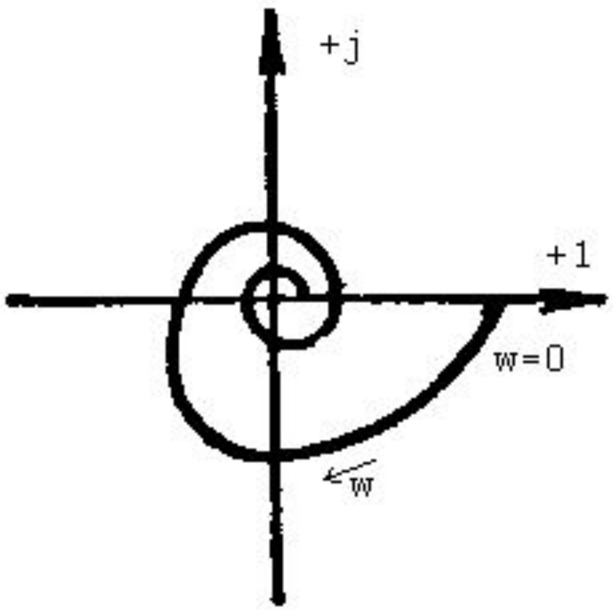
Легко заметить, что число оборотов вектора *ϕ(jω)* вокруг начала координат равно числу оборотов вектора *W(jω)* вокруг точки с координатами (–1; *j0).* Отсюда вытекает *общая формулировка критерия Найквиста.*

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Общая формулировка критерия



Теорема (Критерий)

Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы частотная характеристика разомкнутой САР с порядком неустойчивости *m* при изменении частоты *ω* от нуля до +∞ охватывала точку с координатами *(–1; j0)* в положительном направлении (при возрастании частоты) *m/2* раз.

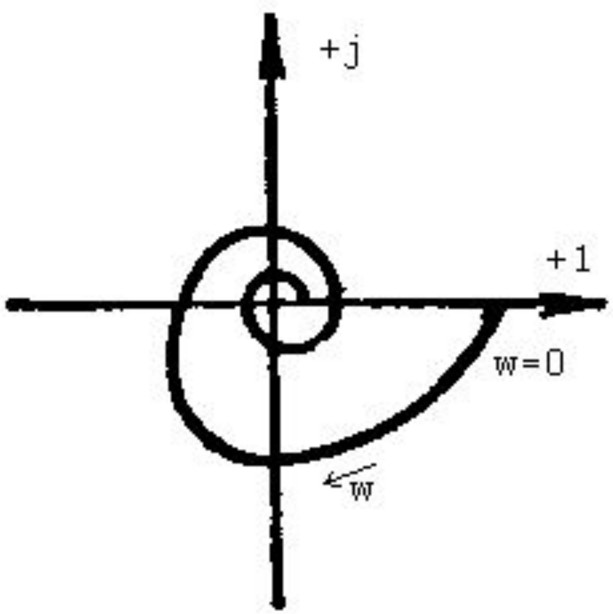
Таким образом, об устойчивости замкнутой САР можно судить, проанализировав частотную характеристику системы в разомкнутом состоянии.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Общая формулировка критерия



Для САР электромеханических объектов наиболее распространен случай, когда в разомкнутом состоянии система устойчива, или, по крайней мере находится на границе устойчивости, т.е. m=0

Частная формулировка для случая m=0

Если САР в разомкнутом состоянии устойчива или находится на границе устойчивости (m = 0), то для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы частотная характеристика разомкнутой САР при изменении частоты ω от нуля до +∞ не охватывала бы точку с координатами *(–1; j0)*.

Если ЧХ разомкнутой САР охватывает точку с координатами *(–1; j0)* – система в замкнутом состоянии будет неустойчивой.

Если ЧХ разомкнутой САР проходит через точку с координатами *(–1; j0)* – замкнутая система будет находиться на границе устойчивости.

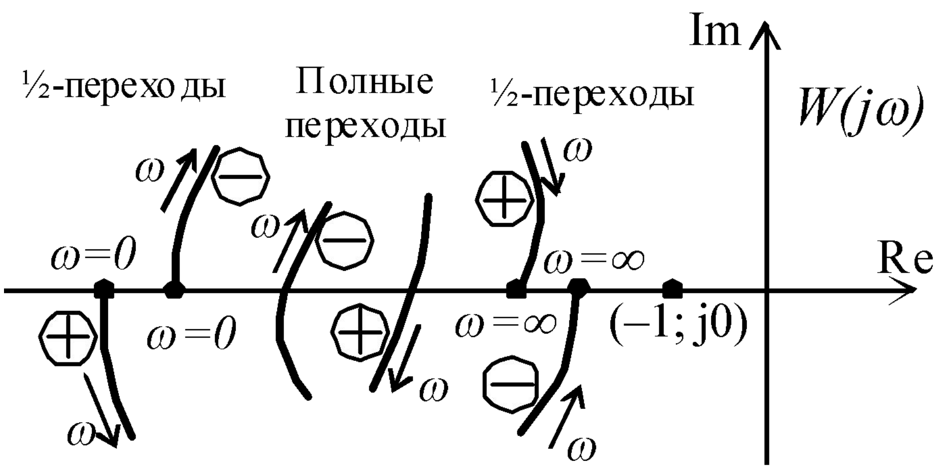
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Правило переходов

Удобно при сложной форме частотной характеристики *W(jω)*, когда бывает затруднительно определить число оборотов годографа вокруг критической точки (–1; *j0)*.



Положительным считается переход частотной характеристики *W(jω)* ***через вещественную ось левее точки с координатами (–1; j0) при возрастании частоты ω*** по направлению сверху вниз

Отрицательным считается аналогичный переход, но по направлению снизу вверх

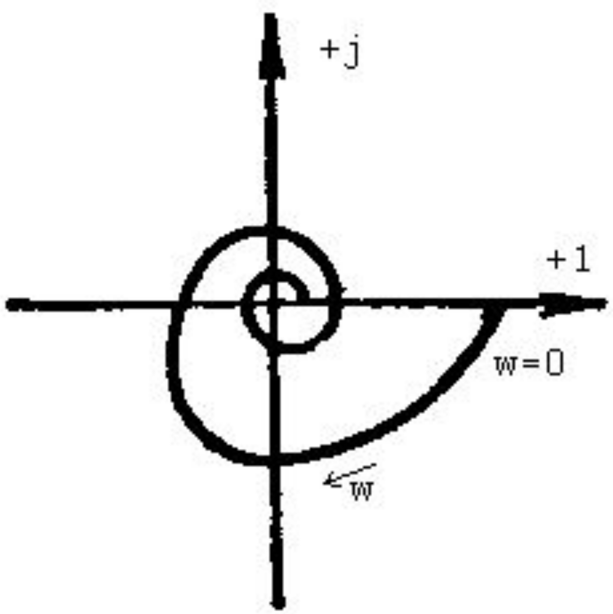
Если частотная характеристика начинается или заканчивается на действительной оси левее точки с координатами (–1; j0), то говорят о ½-переходе

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Правило переходов



Формулировка критерия, основанная на понятии переходов

Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов частотной характеристики левее точки с координатами (–1; j0) при изменении частоты ω от нуля до +∞ была равна половине порядка неустойчивости разомкнутой САР, т.е. $m/2$.

Частный случай

Если САР в разомкнутом состоянии устойчива или находится на границе устойчивости (m = 0), то для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы количество отрицательных переходов (…) равнялось бы количеству положительных.

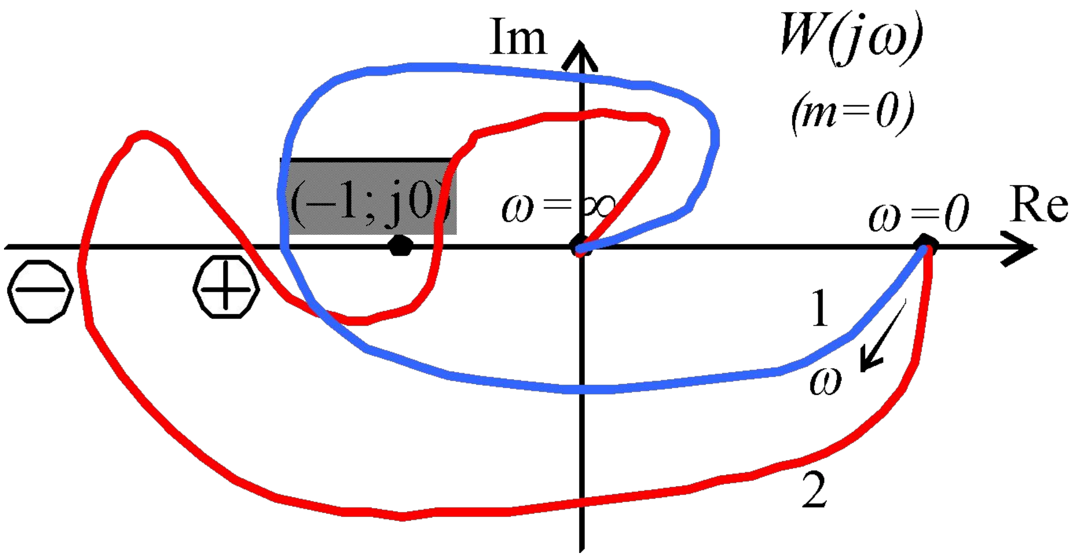
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Правило переходов

Пример. В разомкнутом состоянии САР устойчива *(m = 0)*



Замкнутая САР, имеющая в разомкнутом состоянии частотную характеристику 1, является неустойчивой, поскольку *W(jω)* охватывает точку с координатами (–1; j0) при движении в направлении возрастания частоты ω (имеет место отрицательный переход при отсутствии положительных)

Замкнутая САР, имеющая в разомкнутом состоянии частотную характеристику 2, устойчива, поскольку не охватывает точку с координатами (–1; j0) (имеет место один отрицательный переход и один положительный).

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Устойчивость астатических систем

Пусть имеется астатическая система *ν*-го порядка по управлению, имеющая в разомкнутом состоянии передаточную функцию:

$$W(p)=\frac{k_\nu}{p^\nu}\overline{W}(p)$$

где $\overline{W}(p)$ – нормированная ПФ разомкнутой САР.

Частотная характеристика разомкнутой астатической САР

$$W(j\omega)=\frac{k_\nu}{(j\omega)^\nu}\overline{W}(j\omega)=\frac{k_\nu}{\omega^\nu}e^{-j\frac{\pi}{2}\nu}\overline{W}(j\omega)$$

Из последнего выражения видно, что характеристика стремится к нулю при ω → +∞ (т.е. ЧХ заканчивается в начале координат), но при ω → 0 будет стремиться к бесконечности при угле *–νπ/2*.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

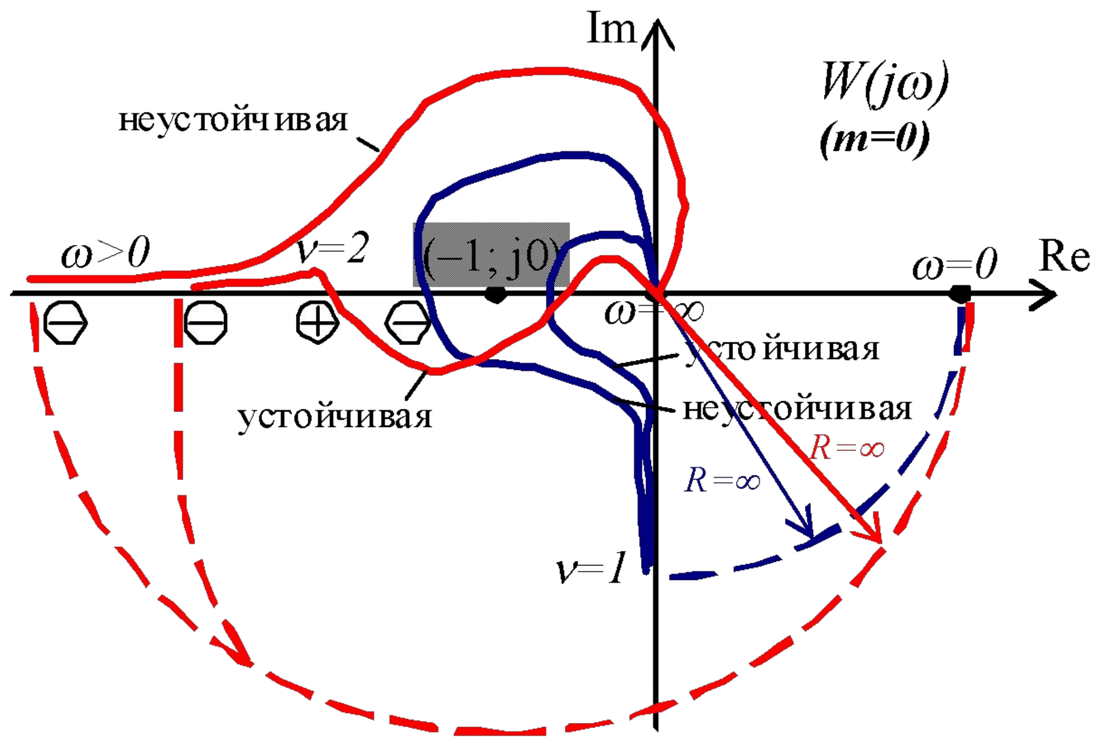
Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Устойчивость астатических систем

Во избежание неоднозначности в использовании критерия Найквиста частотные характеристики разомкнутых САР дополняются дугами длиной $-v\pi/2$ бесконечно большого радиуса таким образом, чтобы они начинались от положительной вещественной полуоси, и после этого анализируются дополненные ЧХ.

Для примера ограничимся случаем **m = 0**, распространенным в управлении электромеханическими системами.



Замкнутая САР будет устойчивой, если дополненная ЧХ разомкнутой САР не охватывает точку с координатами (–1; j0).

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

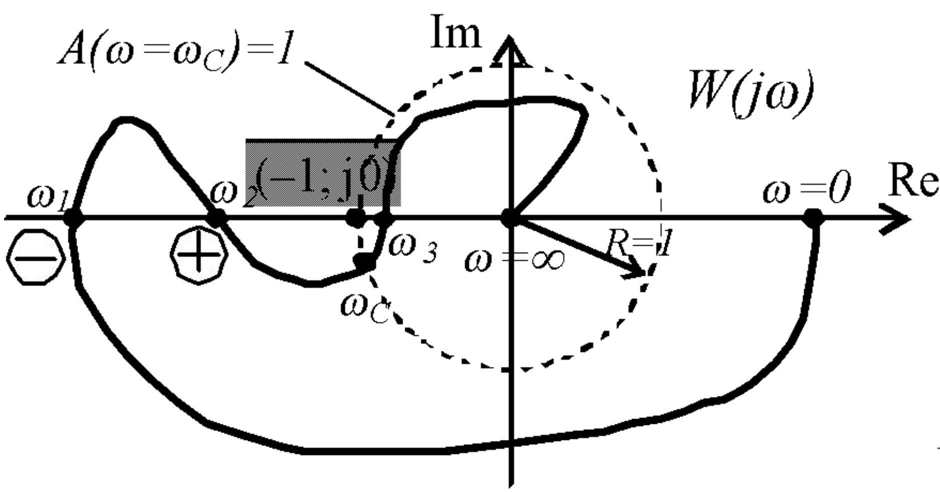
Логарифмический частотный критерий устойчивости

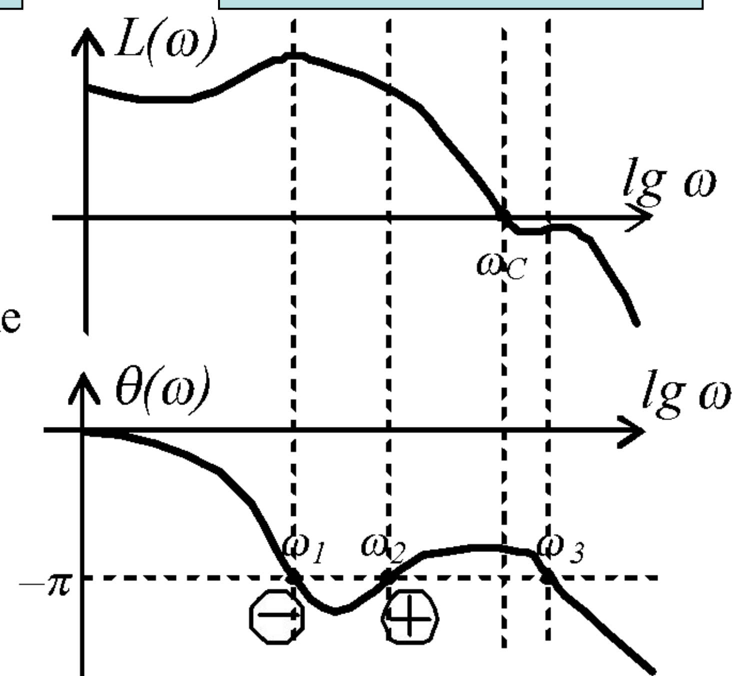
Предварительные замечания

Логарифмические амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) и фазо-частотная (ЛФЧХ) характеристики разомкнутой САР, как известно, вычисляются по формулам:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg\left|W(j\omega)\right|$$

$$\theta(\omega) = \arg\left[W(j\omega)\right]$$



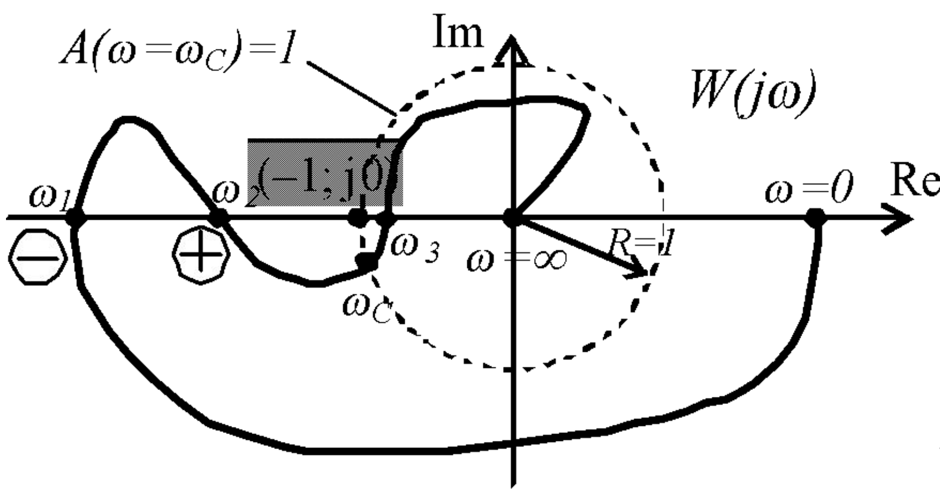


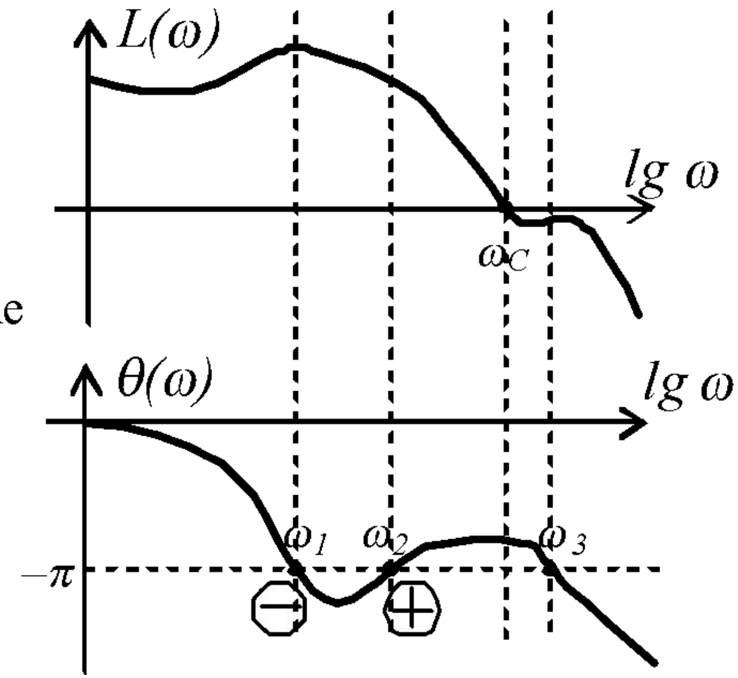
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Предварительные замечания





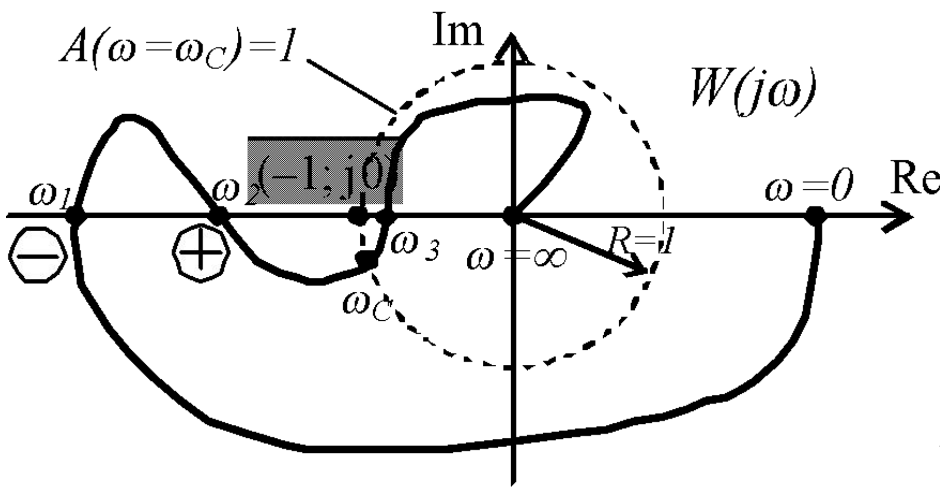
Достижению частотной характеристикой окружности радиуса 1 с центром в начале координат при определенной частоте ω_C, называемой *частотой среза* или *граничной частотой*, соответствует пересечение ЛАЧХ *L(ω) оси частот* ($L(\omega_C)=0$).

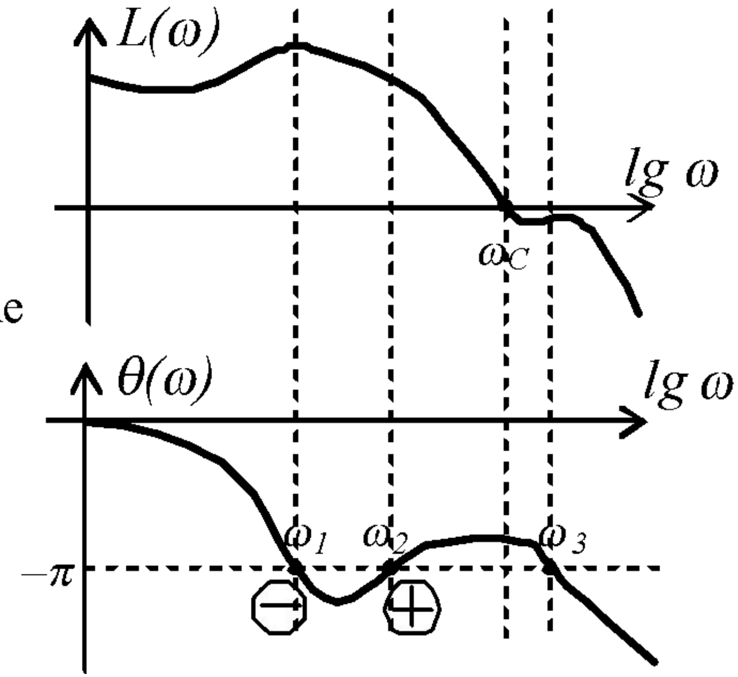
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

<u>Логарифмический частотный критерий устойчивости</u>

<u>Предварительные замечания</u>





Переходу годографа через вещественную ось при Re[*W(jω)*] < 0 соответствует переход ЛФЧХ *θ(ω)* через отметку –π *(В более сложных случаях, когда ЧХ имеет вид спирали – через отметки ±π, ±3π, ±5π, …). При этом положительному переходу* соответствует переход ЛФЧХ *снизу вверх*, а *отрицательному переходу – сверху вниз*.

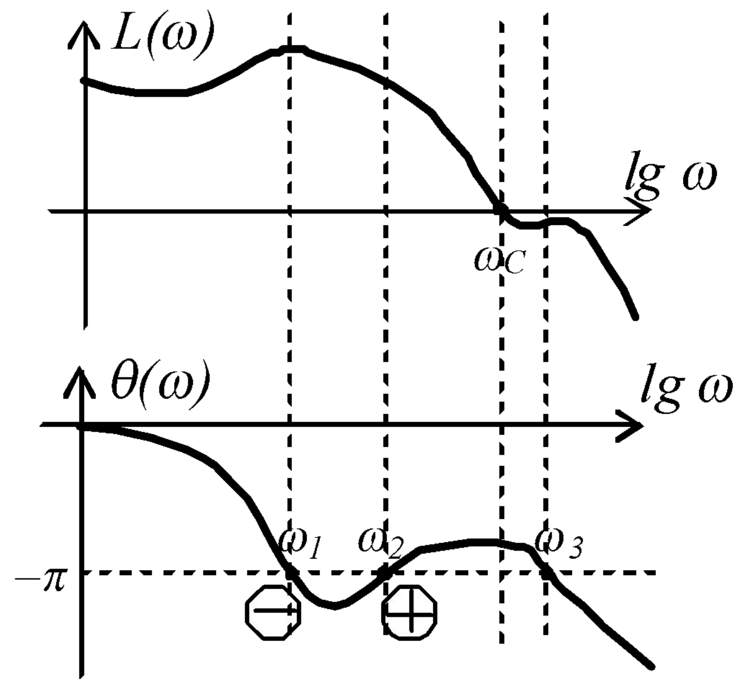
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Формулировка критерия

Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФЧХ разомкнутой САР через линию ±(2k+1)π (где *k* = 0, 1, 2, …) при частотах, когда *L(ω)* > 0, была равна *m*/2, где *m* - порядок неустойчивости разомкнутой САР.



Частный случай

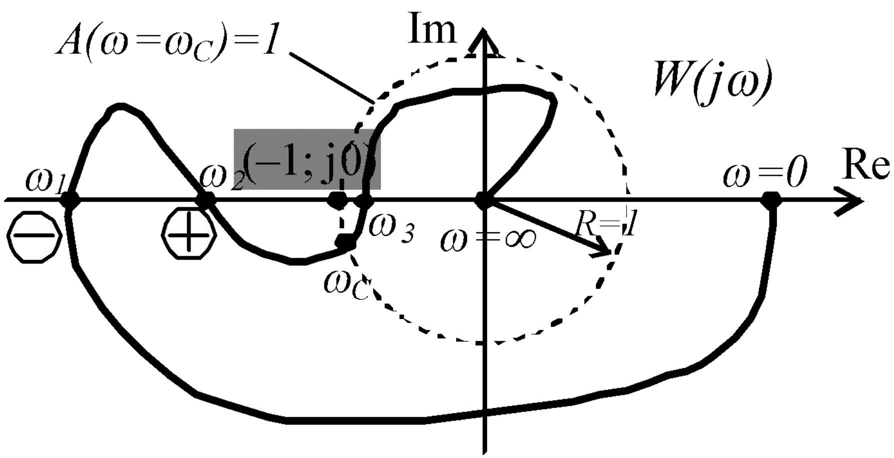
Если САР в разомкнутом состоянии устойчива или находится на границе устойчивости (*m* = 0), то для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы количество отрицательных переходов ЛФЧХ (…) равнялось бы количеству положительных.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости



Вид частотной характеристики *W(jω)* определяется параметрами САР (разомкнутой).

Путем изменения параметров САР можно из области устойчивости перевести ее в область неустойчивости, и наоборот.

Количественные параметры (т.е. степень) **изменения параметров устойчивой** (функционирующей) **САР, необходимые для перевода ее на границу устойчивости**, когда ЧХ проходит через точку с координатами (–1; j0), **характеризуют *запас устойчивости* САР**.

Наиболее удобно количественное выражение запаса устойчивости может быть определено с помощью логарифмических частотных характеристик (ЛАЧХ и ЛФЧХ), причем различают *запас устойчивости по амплитуде* (определяемый по ЛАЧХ) и *запас устойчивости по фазе* (определяемый по ЛФЧХ).

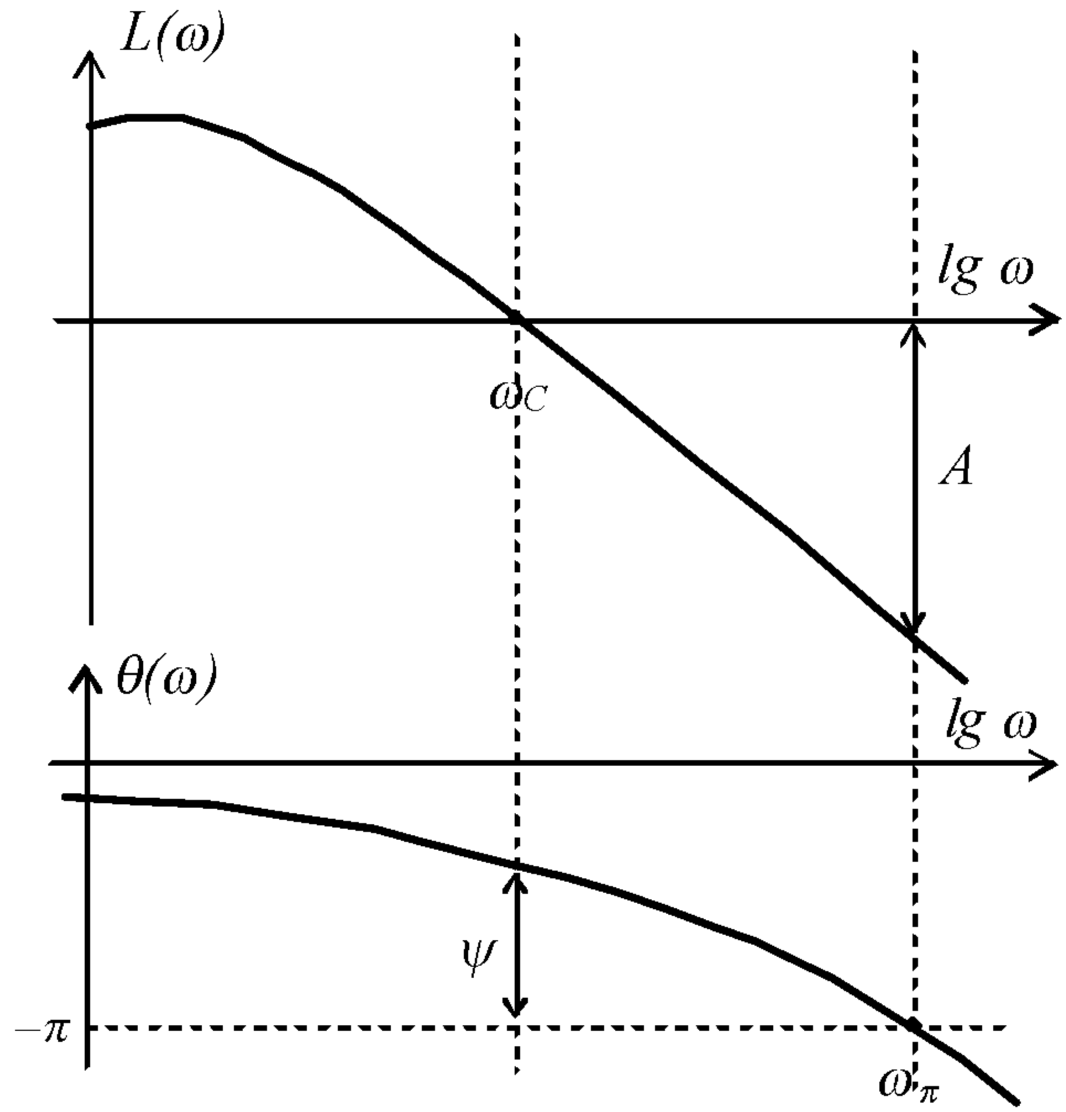
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости

Пусть известны ЛАЧХ и ЛФЧХ некоторой САР в разомкнутом состоянии



Параметр *A* называется ***запасом устойчивости по амплитуде***, определяется как отклонение ЛАЧХ от оси частот при частоте, соответствующей первому отрицательному переходу ЛФЧХ через уровень $-\pi$:

$$A = \left| L(\omega_\pi) \right|$$

(В более сложных случаях следует отталкиваться от уровней ±π, ±3π, ±5π, …)

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

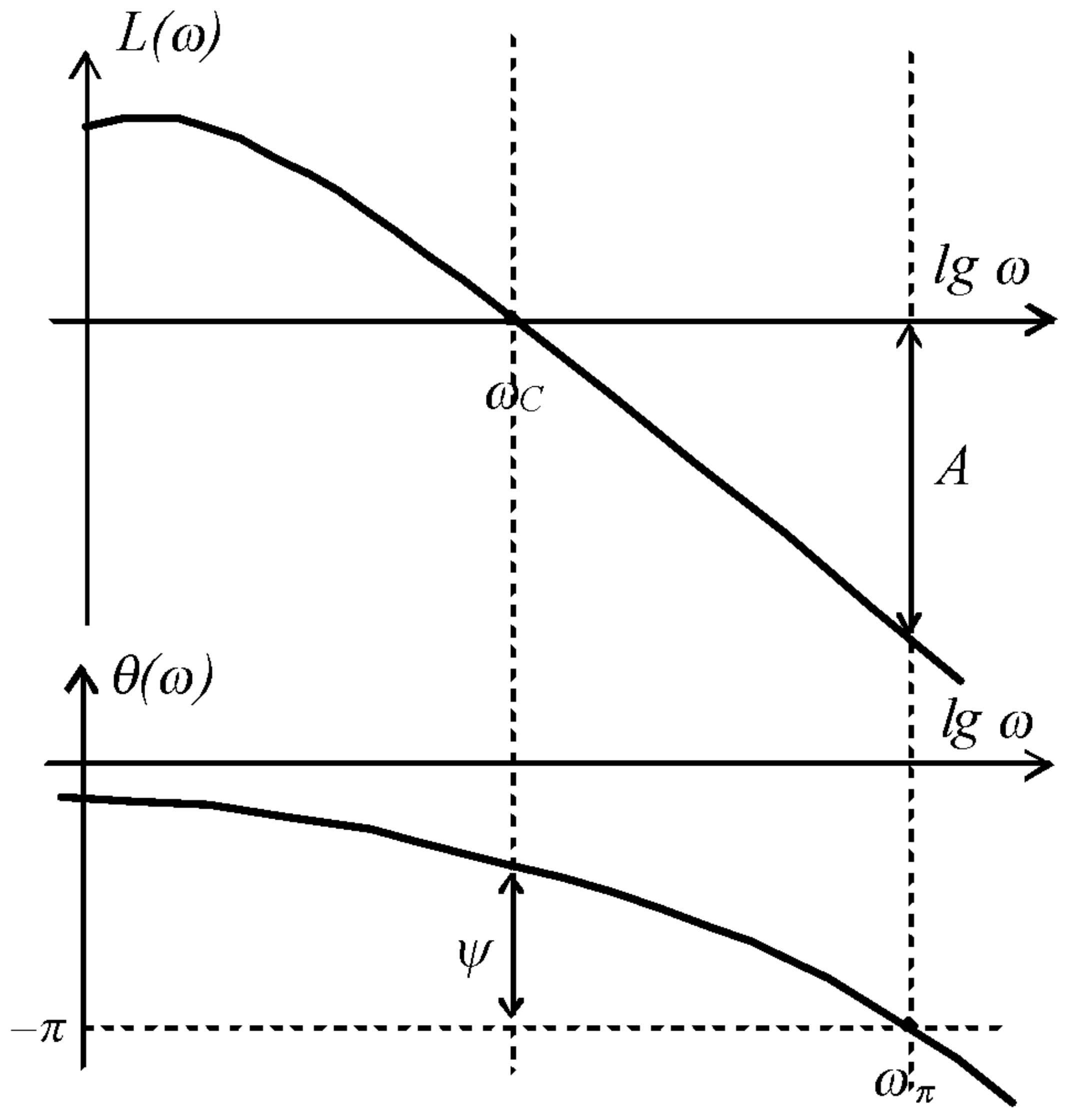
Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости

Запас устойчивости по амплитуде

$$A = \left| L(\omega_\pi) \right|$$

Предположим, что путем изменения параметров САР (путем увеличения коэффициента передачи) ее ЛАЧХ поднялась на величину *A*, и пусть при этом ЛФЧХ осталась без изменения. В этом случае САР находится на границе устойчивости.



УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

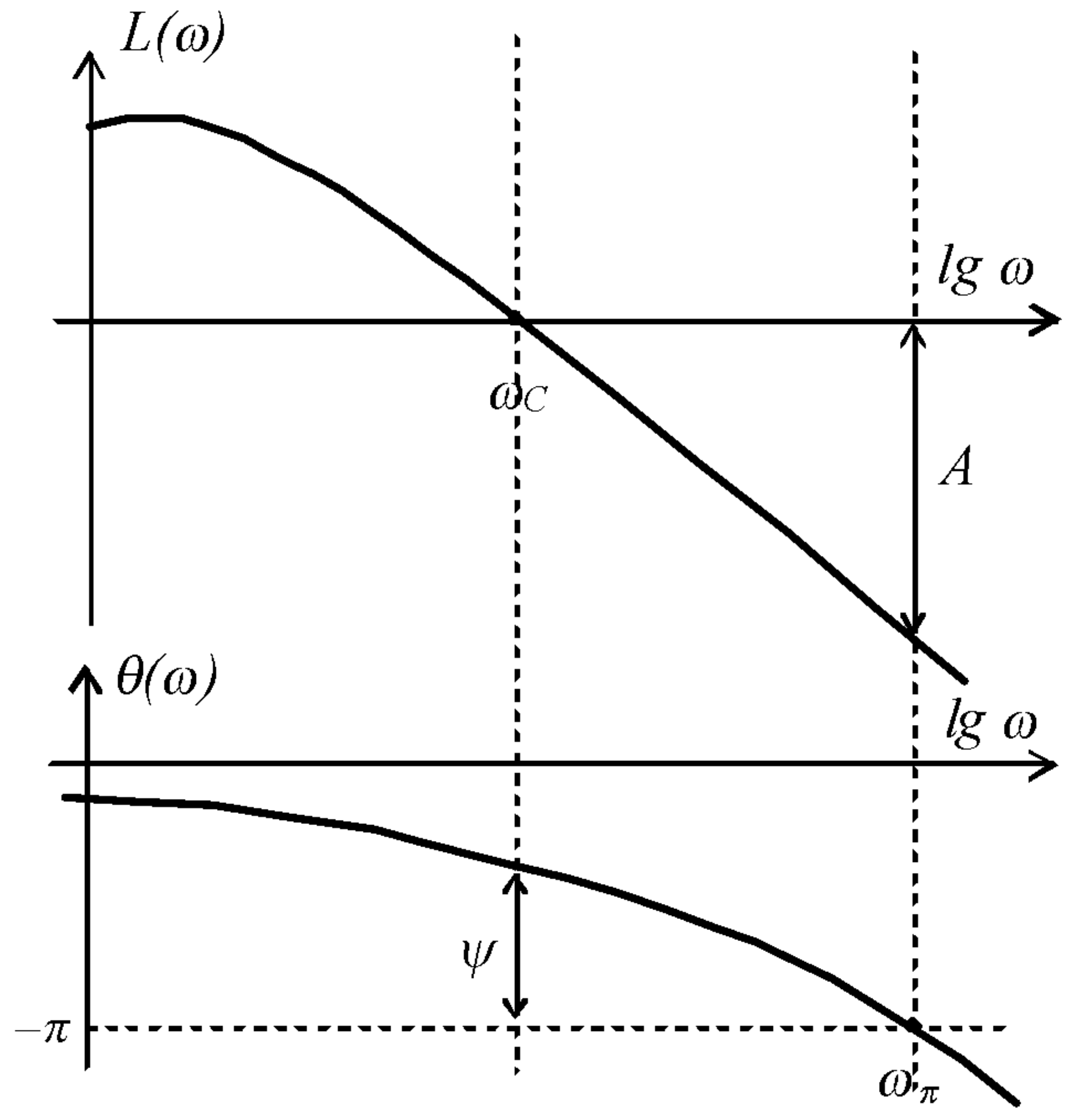
Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости

Параметр ψ называется ***запасом устойчивости по фазе***, определяется как отклонение ЛФЧХ от уровня $-\pi$ *при значении частоты* ω, равном частоте среза ω_C:

$$\psi = \pi + \theta(\omega_C)$$

Предположим, что также путем изменения параметров САР ее ЛФЧХ опустилась на угол ψ, а ЛАЧХ осталась без изменения. Теперь САР находится на границе устойчивости.



УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости

В реальных САР в процессе работы под действием внешних факторов их параметры изменяются. При этом изменяются их ЛАЧХ и ЛФЧХ.

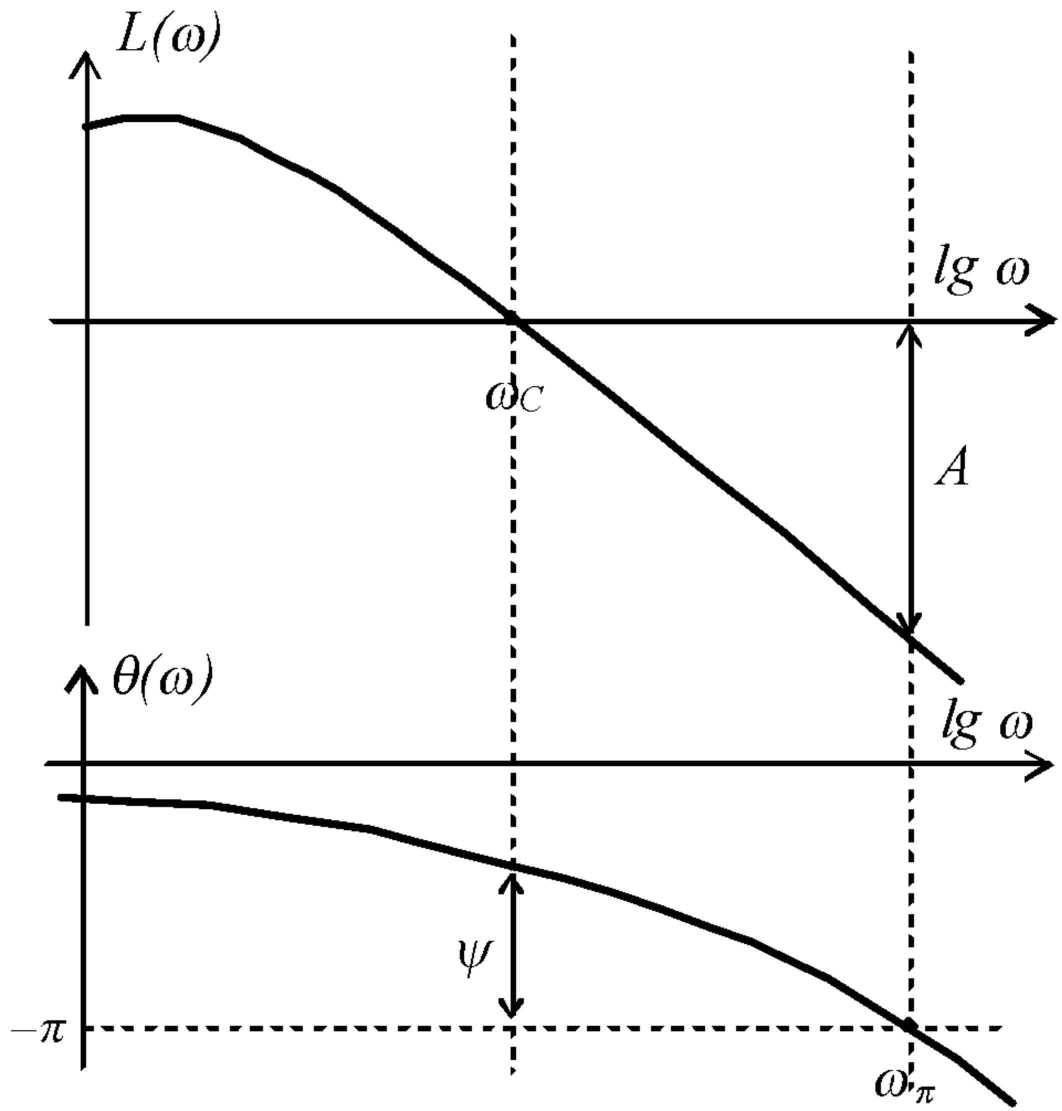
Для того, чтобы обеспечить нормальную (устойчивую) работу САР, обычно необходимо обеспечить запас устойчивости по амплитуде

A ≥ 14 дБ

и запас устойчивости по фазе

ψ ≥ 30°.

При невыполнении этих условий в процессе работы системы имеется большая вероятность того, что она окажется неустойчивой.

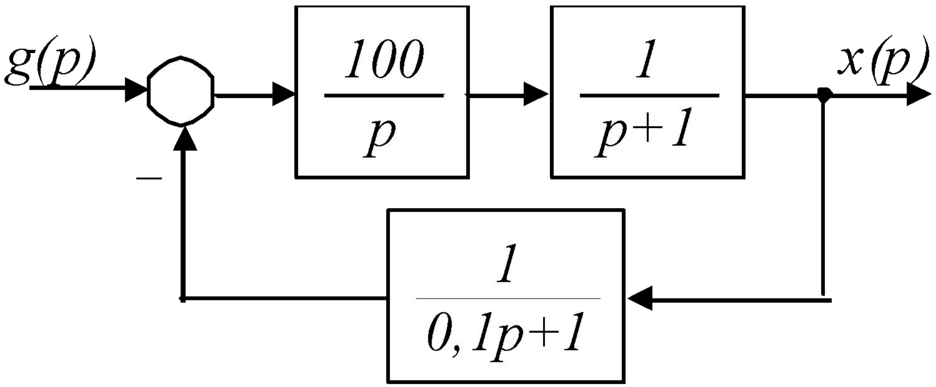


УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Пример 1.

Исследовать на устойчивость САР



1) Решение с помощью критерия устойчивости Гурвица

П.ф. разомкнутой САР:

$$W(p) = \frac{100}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{0.1p+1} = \frac{R(p)}{Q(p)}$$

Х.п. замкнутой САР:

$$G(p) = R(p) + Q(p) = p(p+1)(0.1p+1) + 100 = 0.1p^3 + 1.1p^2 + p + 100$$

т.е. $a_0 = 0{,}1 > 0$, $a_1 = 1{,}1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 100$.

Составляем матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 100 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 1.1 & 100 \end{bmatrix}$$

Находим определители:

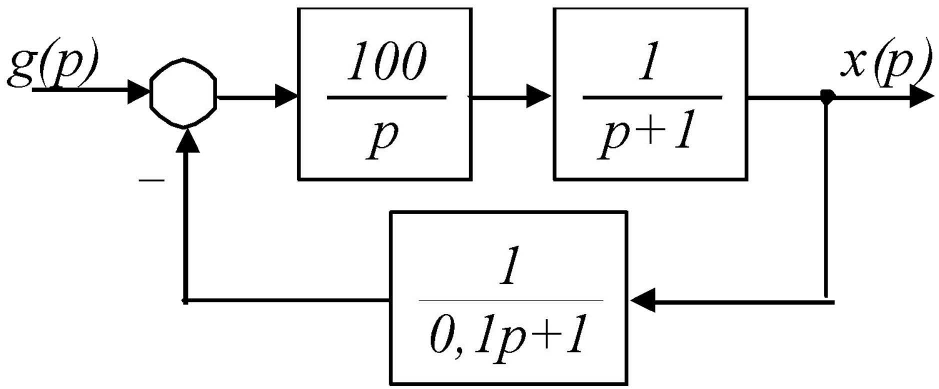
$$\Delta_1 = 1.1 > 0 \; ; \quad \Delta_2 = 1.1 \cdot 1 - 100 \cdot 0.1 = -8.9$$ – **САР неустойчива**.

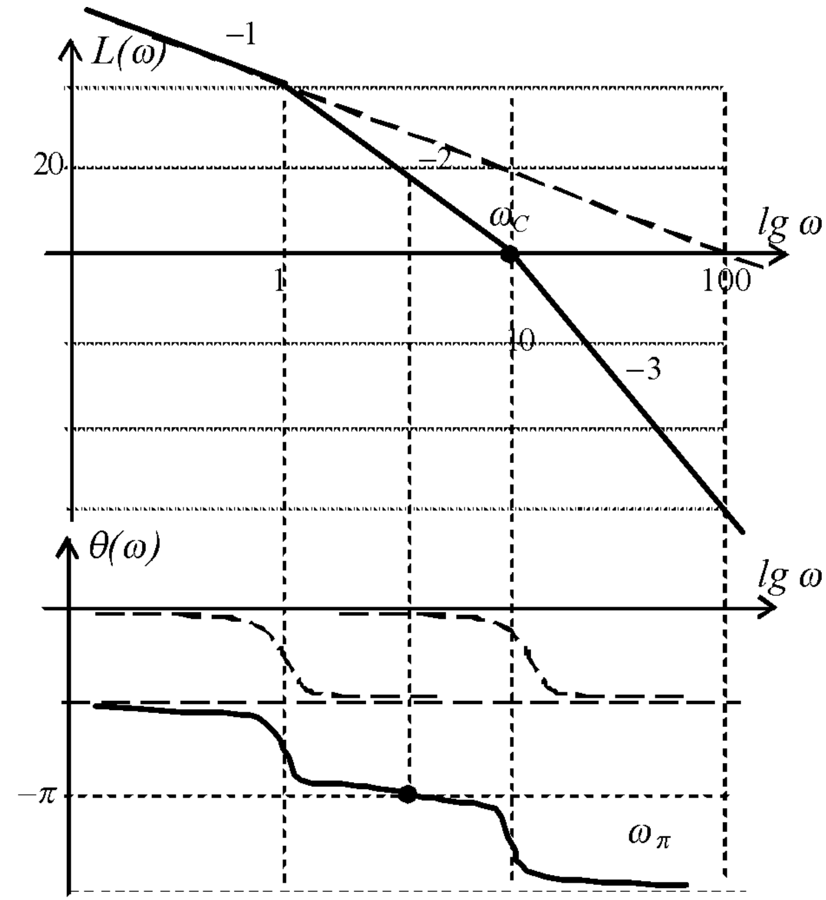
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Пример 1.

Исследовать на устойчивость САР





2) Решение с помощью логарифмического частотного критерия.

Строим ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САР

Имеем один отрицательный переход ЛФЧХ через уровень –*π*, а положительные переходы отсутствуют, т.е. разность между числом пол. и отр. переходов равна –1. Характеристический полином разомкнутой САР *Q(p)* не имеет правых корней. Таким образом, логарифмический критерий не выполняется: 0 ≠ *–1.*

– **САР неустойчива**