

Лекция 9

Контур с током в магнитном поле

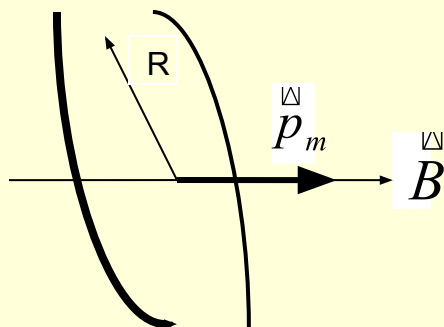
- 3.4. Магнитный момент тока.
- 3.5. Магнитное поле на оси кругового витка с током.
- 3.6. Момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле.
- 3.7. Энергия контура с током в магнитном поле.
- 3.8. Контур с током в неоднородном магнитном поле.
- 3.9. Работа, совершаемая при перемещении контура с током в магнитном поле.

3.4. Магнитный момент тока.

Во многих случаях приходится иметь дело с замкнутыми токами, размеры которых *малы* по сравнению с расстоянием от них до точки наблюдения. Такие токи будем называть *элементарными*. Пример подобных токов мы имеем во всех атомах – это движущиеся по замкнутым орбитам электроны. Эти токи, вследствие малости атомных размеров можно считать элементарными.

Рассмотрим плоский круговой виток с током радиуса R . Характеристиками витка являются: сила тока I , текущего по витку, площадь S , обтекаемая током и ориентация витка в пространстве, определяемая направлением единичного вектора нормали \mathbf{n} к плоскости витка. Совокупность всех этих трех характеристик образует *магнитный момент* витка с током, который по определению равен:

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$$



В теории магнетизма магнитный момент кругового витка с током играет такую же важную роль, как и электрический дипольный момент в теории электричества.

3.5. Магнитное поле на оси кругового витка с током.

Согласно закону Био-Савара-Лапласа, индукция магнитного поля, создаваемого элементом тока dl на расстоянии r от него есть

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

где α – угол между элементом тока dl и радиус-вектором r , проведенным из этого элемента в точку наблюдения; r – расстояние от элемента тока до точки наблюдения.

В нашем случае $\alpha = \pi/2$, $\sin \alpha = 1$; $r = \sqrt{R^2 + a^2}$ где a – расстояние, отсчитываемое от центра витка до рассматриваемой точки на оси витка. Векторы образуют в этой точке конус с углом раствора при вершине $2 = \pi - 2\beta$, где β – угол между отрезками a и r .

Из соображений симметрии ясно, что результирующее магнитное поле на оси витка будет направлено вдоль этой оси, то есть вклад в него дают только те составляющие, которые параллельны оси витка:

$$dB_{\parallel} = dB \cos \theta = dB \sin \beta = dB \cdot \frac{R}{r}$$

Результирующую величину индукции магнитного поля B на оси витка получим, проинтегрировав это выражение по длине контура от 0 до $2\pi R$:

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{r^3}$$

или, подставив значение r :

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} .$$

В частности, при $a = 0$ находим индукцию магнитного поля в центре кругового витка с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Этой формуле можно придать другой вид, воспользовавшись определением магнитного момента витка с током:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{R^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{R^3} .$$

Последнюю формулу можно записать в векторном виде:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{R^3}$$

3.6. Момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле

Поместим в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} плоский прямоугольный контур (рамку) с током.

Согласно *закону Ампера*, на каждый элемент тока рамки действует сила

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]$$

Результирующая всех этих сил, как нетрудно убедиться, создает пару сил \vec{F} и $-\vec{F}$ стремящихся развернуть плоскость рамки перпендикулярно силовым линиям магнитного поля. Если a – короткая сторона рамки, то величина действующей на нее силы будет $F = IBa$. Момент пары сил по величине равен:

$$M = F \frac{b}{2} \sin \alpha + (-F) \left(-\frac{b}{2} \right) \sin \alpha = Fb \sin \alpha$$

где b – длинная сторона рамки ($\frac{b}{2} \sin \alpha$ – плечо силы F , α – угол между нормалью к плоскости рамки и силовой линией магнитного поля).

Следовательно, можем написать:

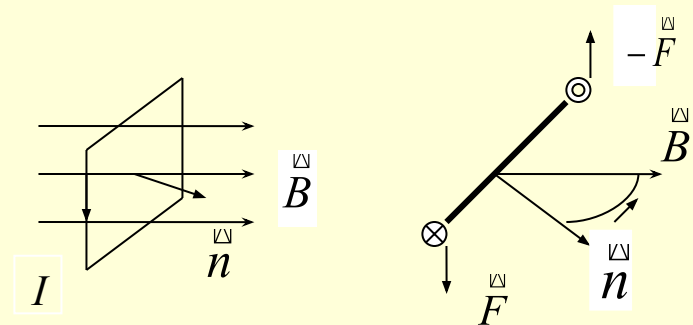
$$M = IBab = IB S \sin \alpha$$

где $S = ab$ – площадь рамки.

Учитывая, что магнитный момент рамки $\vec{p}_m = IS\vec{n}$,

последнюю формулу можно переписать в векторном виде:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$



3.7. Энергия контура с током в магнитном поле.

Контур с током, помещенный в магнитное поле, обладает запасом энергии. Действительно, чтобы повернуть контур с током на некоторый угол $d\alpha$ в направлении, обратном направлению его поворота в магнитном поле, необходимо совершить работу против сил, действующих на этот контур со стороны поля. По величине эта работа равна

$$dA = -M d\alpha = -p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha .$$

Совершенная над контуром работа идет на увеличение его энергии. Поворачиваясь в первоначальное положение, контур возвратит затраченную на его поворот работу, совершив ее над какими-либо телами. Следовательно, запасенная контуром энергия есть:

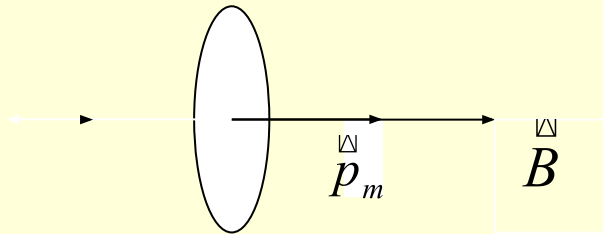
$$W = -\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} M d\alpha = -\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha = -p_m B \cos \alpha \cdot$$

(при выводе этой формулы мы приняли, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ энергия контура W , определенная с точностью до произвольной постоянной, равна нулю).

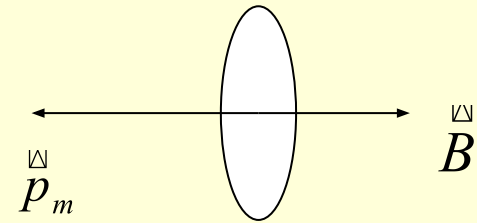
Полученную формулу можно написать также в виде:

$$W = -(\overset{\boxtimes}{p}_m \overset{\boxtimes}{B})$$

Устойчивое равновесие



Неустойчивое равновесие



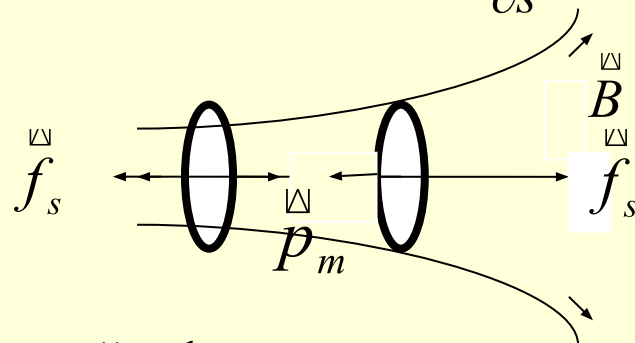
Из приведенной формулы видно, что *устойчивому* положению равновесия контура с током в магнитном поле соответствует ориентация, при которой векторы \vec{p}_m и \vec{B} параллельны ($\alpha = 0$); в этом случае энергия контура *минимальна* и равна $W = -p_m B < 0$. *Неустойчивому* положению равновесия соответствует ориентация, при которой векторы \vec{p}_m и \vec{B} антипараллельны ($\alpha = \pi$); в этом случае энергия контура *максимальна* и равна $W = p_m B > 0$.

$$W = p_m B > 0$$

3.8. Контур с током в неоднородном магнитном поле

Если контур с током находится в неоднородном магнитном поле, то на него, помимо вращающего момента \vec{M} , действует также сила \vec{f} , обусловленная наличием градиента магнитного поля. Проекция этой силы на направление касательной к силовой линии поля в данной точке определяется по формуле:

$$f_s = -\frac{\partial W}{\partial s} = p_m \frac{\partial B}{\partial s} \cos \alpha \quad .$$



Согласно написанной формуле, сила, действующая на контур в неоднородном магнитном поле, зависит от взаимной ориентации векторов \vec{p}_m и \vec{B} . Если эти векторы параллельны, то сила положительна и контур будет втягиваться в область более сильного поля; если векторы \vec{p}_m и \vec{B} антипараллельны, то сила отрицательна и контур будет выталкиваться из поля.

3.9. Работа, совершаемая при перемещении контура с током в магнитном поле

Рассмотрим отрезок проводника с током, способный свободно перемещаться по двум направляющим во внешнем магнитном поле. Магнитное поле будем считать однородным и направленным под углом α по отношению к нормали к плоскости перемещения проводника.

Как видно из рисунка, вектор \vec{B} имеет две составляющие \vec{B}_{\parallel} и \vec{B}_{\perp} , из которых только составляющая \vec{B}_{\perp} создает силу, действующую в плоскости перемещения проводника. По абсолютной величине эта сила равна: $F_s = IlB_{\perp} = IlB \cos \alpha$, где I – сила тока в проводнике; l – длина проводника; B – индукция магнитного поля.

Работа этой силы на элементарном пути перемещения ds есть: $dA = F_s ds = IlB \cos \alpha \cdot ds$

Произведение $l ds$ равно площади dS , замкнутой проводником при движении, а величина $BdS \cos \alpha$ равна потоку магнитной индукции $d\Phi$ через эту площадь. Следовательно, можем написать: $dA = Id\Phi$.

Рассматривая отрезок проводника с током как часть замкнутого контура и интегрируя это соотношение, найдем работу при перемещении контура с током в магнитном поле:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

где Φ_1 и Φ_2 обозначают поток индукции магнитного поля через площадь контура соответственно в начальном и конечном положениях.

