



Лекция № 2

«КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ. ЕДИНИЦЫ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ»

Ведущий преподаватель: канд. техн. наук, доцент кафедры ИУТС Альчаков Василий Викторович

2

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ

Определение

Под *информацией* понимают совокупность сведений о явлениях, процессах, событиях, фактах и т.д., которые принимает человек в процессе жизнедеятельности.

Сообщение, получаемое на приемной стороне, несет полезную информацию лишь в том случае, если имеется *неопределенность* относительно состояния источника.



Информацию несут в себе те сообщения, которые снимают неопределенность, существующую до их поступления.



3 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Дискретные сообщения

Количество возможных дискретных сообщений является простейшей характеристикой источника дискретных сообщений.

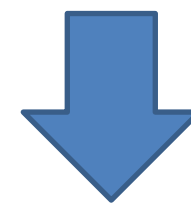
Опыт с одним
исходом



Опыт с двумя
исходами



Опыт с множеством



$$V_i \in [0..60] \text{ Вольт}$$

4

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Общий случай:

m Количество символов сообщения

n Количество символов в каждом сообщении

$$N = m^n \quad (2.1)$$

Количество различных сообщений длиной n из символом m

Ансамбль $A \{a_i\}, i = \overline{1, m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_m) \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^m p(a_i) = 1 \quad (2.2)$$



В 1928 г. Р. Хартли предложил использовать логарифмическую функцию от N в качестве количественной меры информации.

$$I = \log N = n \log m \quad (2.3)$$

Единицы измерения – бит.

Для равновероятных символов можно записать

$$p(a_1) = \frac{1}{m} \quad (2.4)$$

$$(2.3) \rightarrow (2.4)$$

$$I_1 = \log \frac{1}{p(a_1)} = -\log p(a_1) = \log_2 N \quad (2.5)$$

(2.5) – Количество информации на символ алфавита

Ральф Винтон Лайон Хартли

[30 ноября 1888](#),
Спрингфилд, [Невада](#) – [1 мая 1970](#), [Нью-Джерси](#)) –
американский учёный-
[электронщик](#)

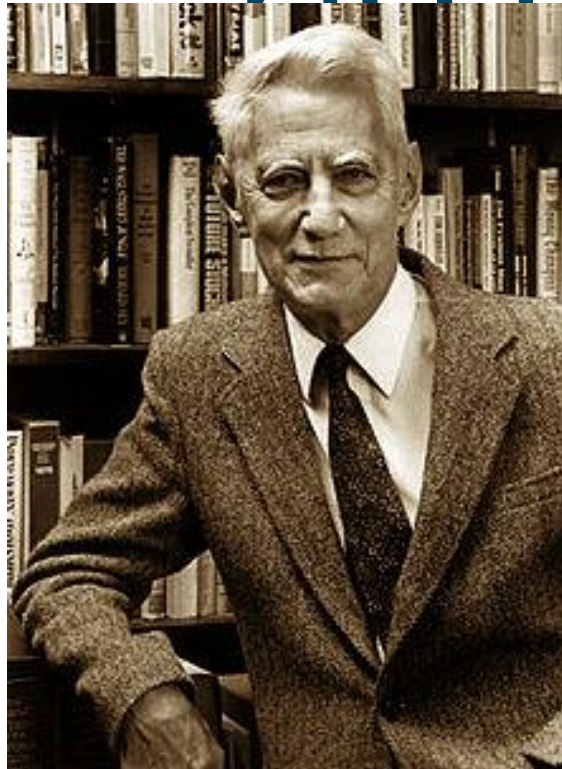
6 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Мера Шеннона

Мера Хартли не отражает вероятностный характер сообщений. Эту задачу решил в 1946 г. К. Шеннон.

В общем случае, для n несовместных и независимых сообщений с вероятностями появления равными $p(a_1) p(a_2) \dots p(a_n)$. Чем меньше априорная вероятность события, тем большее количество информации оно несет. Поэтому можно предположить, что количественной мерой неопределенности отдельного сообщения, а также передаваемой им информации, может быть величина, обратная его априорной вероятности



Клод Элвуд Шеннон

30 апреля 1916
Мичиган, США — 24
февраля 2001,
Медфорд,
Массачусетс, США) —
американский инженер
и математик

Сложное событие: $a_i a_j$
Вероятность события: $p(a_i)p(a_j)$

Количество информации в сложном сообщении: $\frac{1}{p(a_i)p(a_j)}$

$$\frac{1}{p(a_i)}$$

*Такая мера не
обладает свойством
аддитивности*

7 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ

Мера Хартли

Удобнее воспользоваться логарифмической мерой количества информации

$$I(a_i) = \log \frac{1}{p(a_i)} = -\log p(a_i) \quad [\text{БИТ}] \quad (2.6)$$

Количество информации в сложном сообщении:

$$I(a_i, a_j) = \log \frac{1}{p(a_i)p(a_j)} = \log \frac{1}{p(a_i)} + \log \frac{1}{p(a_j)} = I(a_i) + I(a_j)$$

Количество информации для единичного исхода:

$$I(a_1) = \log \frac{1}{1} = 0$$

8 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Частная энтропия

$$H(a_i) = \log \frac{1}{p(a_i)} = -\log(p(a_i)) \text{ [бит/символ]} \quad (2.7)$$

Количество информации и неопределенность для всей совокупности случайных сообщений можно получить усреднением по всем событиям

$$I(A) = \sum_{i=1}^n p(a_i) \log \frac{1}{p(a_i)} = -\sum_{i=1}^n p(a_i) \log p(a_i) \quad (2.8)$$

$$H(A) = -\sum_{i=1}^n p(a_i) \log p(a_i) \quad (2.9)$$

(2.9) – формула Шеннона для энтропии источника дискретных сообщений

Энтропия – это среднестатистическая мера неопределенности знаний получателя информации относительно состояния наблюдаемого объекта (источник сообщений)

9 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ

Свойства энтропии:

Чем выше энтропия источника, тем большее количество информации в среднем закладывается в каждое сообщение, тем сложнее запомнить, передать или сохранить такое сообщение по каналу связи.

Смысл энтропии Шеннона:

Энтропия дискретной случайной величины – это минимум среднего количества бит, которое нужно передавать по каналу связи о текущем значении данной случайной величины.

10 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Свойства энтропии

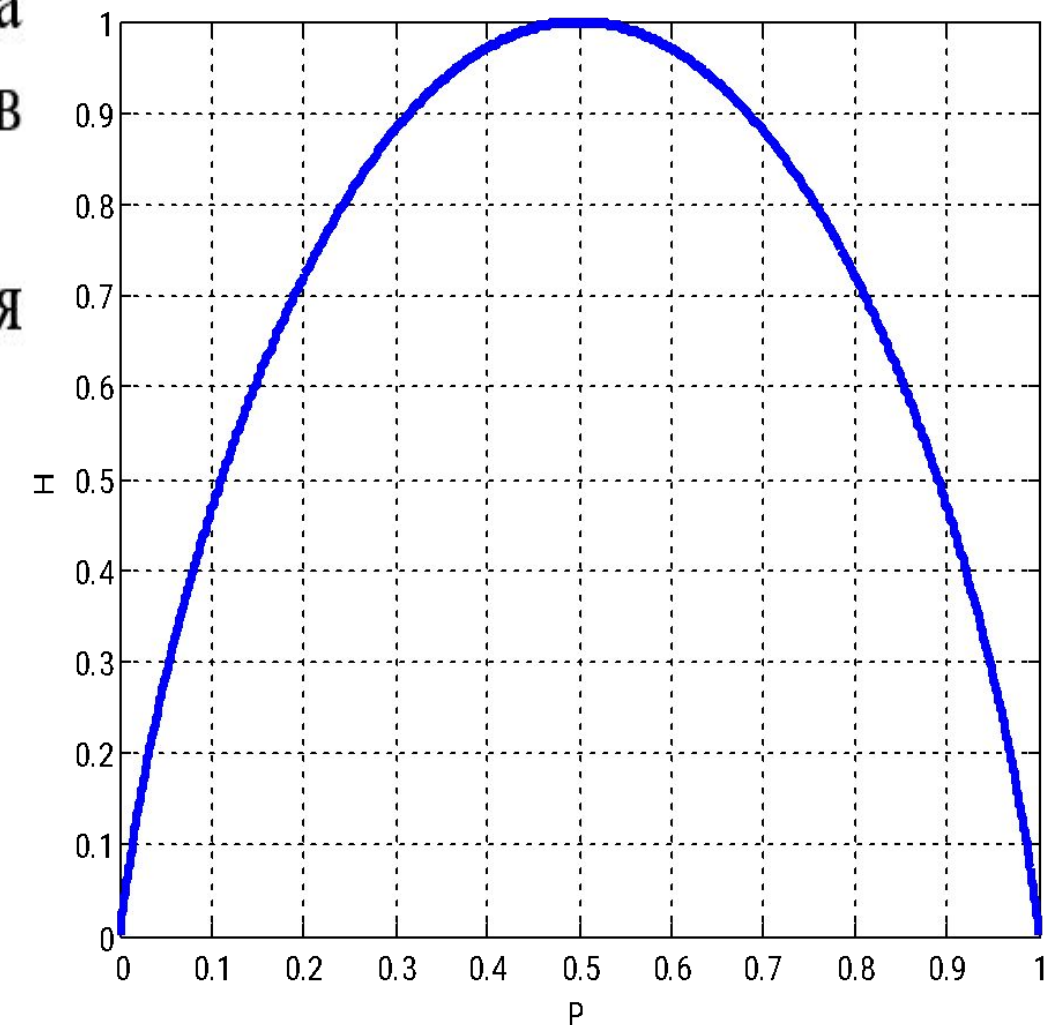
1. Энтропия источника дискретных сообщений есть величина вещественная, ограниченная и положительно определенная;
2. Энтропия равна нулю, если с вероятностью единица всегда выбирается один и тот же символ (в этом случае неопределённость в поведении источника сообщений отсутствует).
3. Энтропия максимальна, если все символы источника появляются независимо и с одинаковой вероятностью, в этом случае она равна

$$H_{\max} = -\sum_{i=1}^m p(a_i) \log p(a_i) = -m \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = \log m$$

Пусть $m = 2$, тогда

$$H(A) = -\sum_{i=1}^2 p(a_i) \log p(a_i) = -p(a_1) \log p(a_1) - (1 - p(a_1)) \log (1 - p(a_1))$$

В этом случае $H_{\max} = \log_2 2 = 1$, графическая зависимость энтропии от вероятности будет иметь вид:

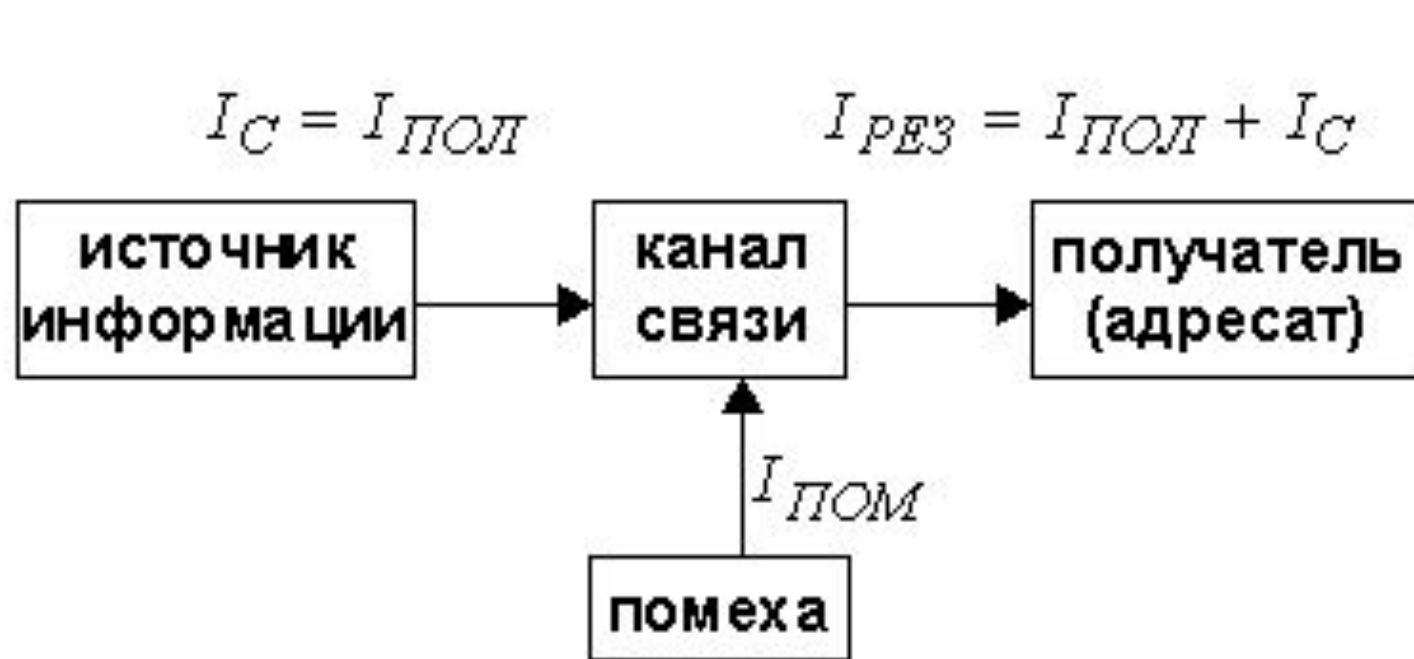


11 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Условная энтропия

Процесс передачи информации носит случайный характер



$$P\left(\frac{X}{Y}\right)$$

вероятность появления события X при условии наступления события Y

12 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Условная энтропия

Пусть при передаче n сообщений символ A появляется m раз, символ B появляется l раз, а символ A вместе с символом B – k раз, то вероятность появления символа A определяется соотношением $P(A) = \frac{m}{n}$, вероятность

появления символа B соотношением $P(B) = \frac{l}{n}$, вероятность совместного

появления символов A и B соотношением $P(AB) = \frac{k}{n}$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{k/n}{l/n} = \frac{k}{l}$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{k}{m}$$

(2.10)

$$\text{Из (2.10)} \Rightarrow P(AB) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A) \quad \text{(2.11)}$$

13 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ

Частная условная энтропия

Различают понятия **частной** и **общей** условной энтропии

Из (2.9) \Rightarrow

$$H\left(\frac{b_j}{a_i}\right) = -\sum_{j=1}^n P\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \times \log\left(P\left(\frac{b_j}{a_i}\right)\right)$$
$$H\left(\frac{a_i}{b_j}\right) = -\sum_{i=1}^n P\left(\frac{a_i}{b_j}\right) \times \log\left(P\left(\frac{a_i}{b_j}\right)\right)$$

(2.12)

i – характеристика состояния источника **A**

j – характеристика состояния источника **B**

14 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Общая условная энтропия

Общая условная энтропия сообщения **B** относительно сообщения **A** характеризует количество информации, содержащейся в любом символе алфавита, и определяется усреднением по всем символам, т.е. по всем состояниям с учетом вероятности появления каждого из состояний, и равна сумме вероятностей появления символов алфавита на неопределенность, которая остается после того как адресат принял сигнал.

$$\begin{aligned} H(B/A) &= -\sum_{i=1}^n P(a_i) H\left(\frac{b_j}{a_i}\right) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(a_i) P\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \times \log\left(P\left(\frac{b_j}{a_i}\right)\right) = \\ &= -\sum_{i=1}^n P(a_i) \sum_{j=1}^n P\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \times \log\left(P\left(\frac{b_j}{a_i}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) – общее выражение для определения количества информации на один символ сообщения для случая неравновероятных символов

15 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Общая условная энтропия

со стороны источника

$$H(B/A) = - \sum_{i=1}^n P(a_i) \sum_{j=1}^n P(b_j/a_i) \times \log \left(P(b_j/a_i) \right)$$

со стороны приемника

$$H(A/B) = - \sum_{j=1}^n P(b_j) \sum_{i=1}^n P(a_i/b_j) \times \log \left(P(a_i/b_j) \right)$$

(2.13')

Так как

$$P(a_i, b_j) = P(a_i)P(b_j/a_i) = P(b_j)P(a_i/b_j)$$

то из (2.13) \Rightarrow

$$H(B/A) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(b_j/a_i)$$

$$H(A/B) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i/b_j)$$

(2.14)

Для идеальных условий

$$I = kH$$

Для равновероятных независимых сообщений

$$H_1 = \log_2 N = n \log_2 m$$

Для неравновероятных независимых сообщений

$$H_2(A) = -\sum_{i=1}^m p(a_i) \log p(a_i)$$

Со стороны источника

Со стороны приемника

$$H_3(B/A) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \quad H_4(A/B) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(b_j, a_i) \log P\left(\frac{a_i}{b_j}\right)$$

$$H_5(A, B) = H_5(B, A) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i, b_j)$$

17 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Каналы связи с шумами

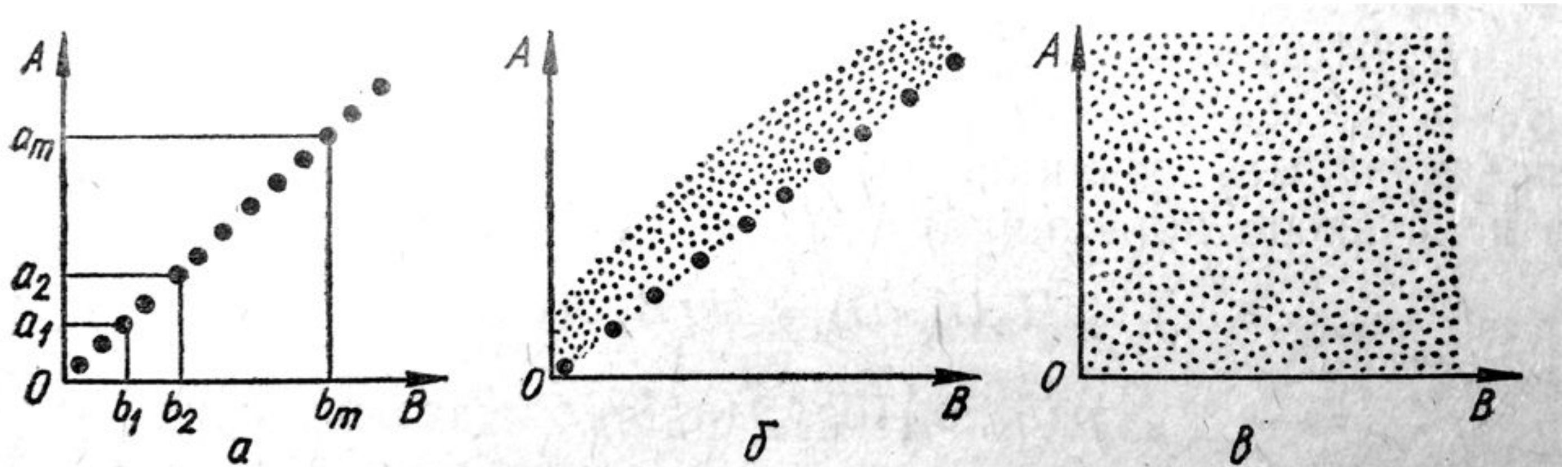


Рис. 21. Графическое представление различных уровней помех в каналах связи.

18 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ

Каналы связи с шумами

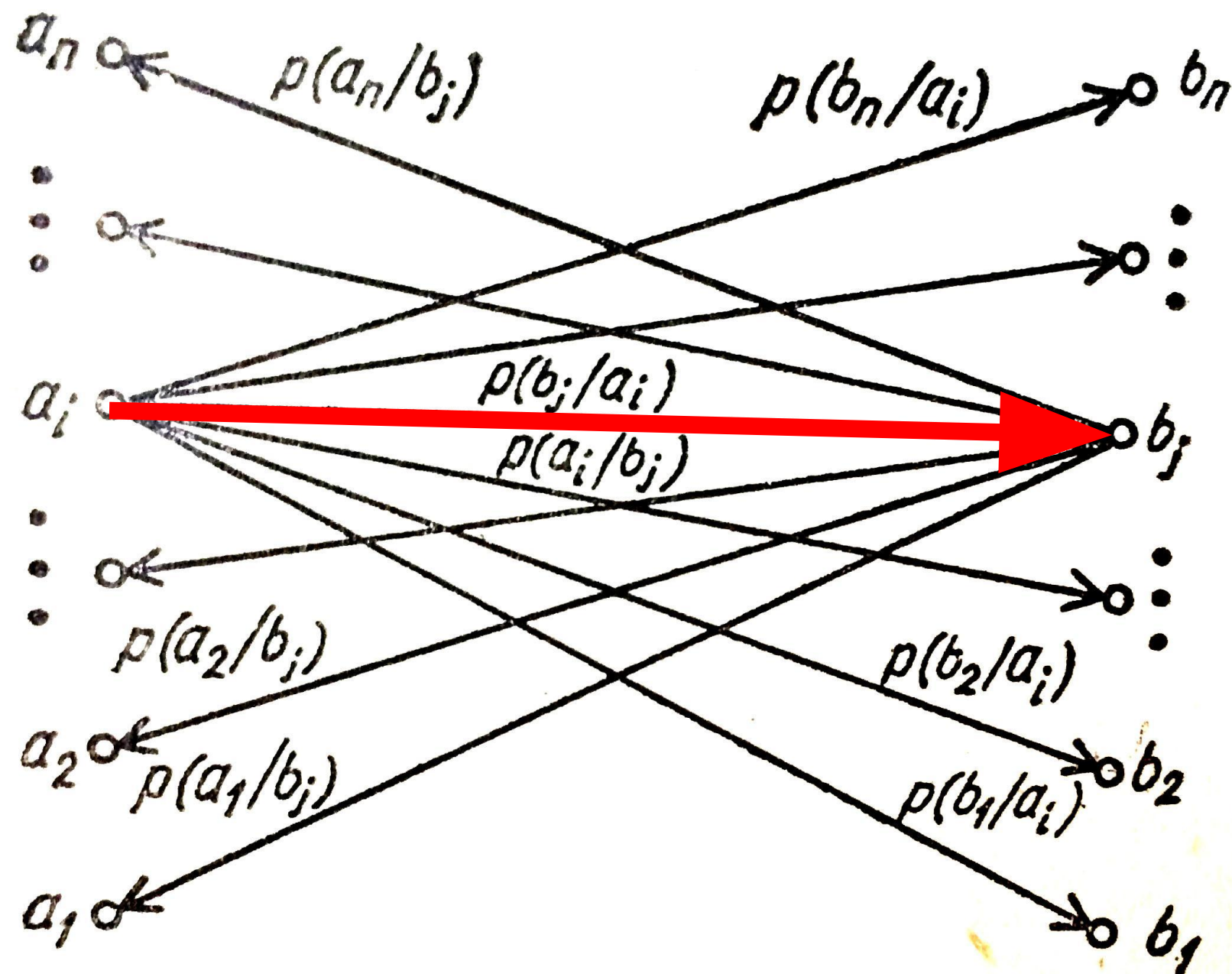


Рис. 12. Иллюстрация неопределенности получения сигнала b_j при передаче a_i .

19 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Канальная матрица

Канальная матрица – матрица, статистически описывающая канал связи.

В общем случае, если передается n сигналов от источника A , и ожидается получение n сигналов на стороне получателя B , влияние помех в канале связи полностью описывается матрицей вида

$A \setminus B$	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_1	$p(b_1/a_1)$	$p(b_2/a_1)$...	$p(b_j/a_1)$...	$p(b_n/a_1)$
a_2	$p(b_1/a_2)$	$p(b_2/a_2)$...	$p(b_j/a_2)$...	$p(b_n/a_2)$
...
a_i	$p(b_1/a_i)$	$p(b_2/a_i)$...	$p(b_j/a_i)$...	$p(b_n/a_i)$
...
a_n	$p(b_1/a_n)$	$p(b_2/a_n)$...	$p(b_j/a_n)$...	$p(b_n/a_n)$

20 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ

Канальная матрица (со стороны
получателя)

Канальная матрица – матрица, статистически описывающая канал связи.

В общем случае, если передается n сигналов от источника A , и ожидается получение n сигналов на стороне получателя B , влияние помех в канале связи полностью описывается матрицей вида

$A \setminus B$	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_1	$p(b_1/a_1)$	$p(b_2/a_1)$...	$p(b_j/a_1)$...	$p(b_n/a_1)$
a_2	$p(b_1/a_2)$	$p(b_2/a_2)$...	$p(b_j/a_2)$...	$p(b_n/a_2)$
...
a_i	$p(b_1/a_i)$	$p(b_2/a_i)$...	$p(b_j/a_i)$...	$p(b_n/a_i)$
...
a_n	$p(b_1/a_n)$	$p(b_2/a_n)$...	$p(b_j/a_n)$...	$p(b_n/a_n)$

$$p(b_1/a_1) + p(b_2/a_1) + \dots + p(b_j/a_1) + \dots + p(b_n/a_1) = 1 \quad (2.15)$$

21 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ

Капальная матрица (со стороны
континента)

Потери информации, приходящиеся на долю сигнала a_i описываются при помощи *частной условной энтропии*.

$$H\left(\frac{B}{a_1}\right) = -\sum_{j=1}^n P\left(\frac{b_j}{a_1}\right) \log P\left(\frac{b_j}{a_1}\right) \quad (2.16)$$

Общая условная энтропия

$$H\left(\frac{B}{A}\right) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \log P\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \quad (2.17)$$

$$H\left(\frac{B}{A}\right) = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(a_i) P\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \log P\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \quad (2.18)$$

22 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Капальная матрица (со стороны

$A \setminus B$	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_1	$p(a_1/b_1)$	$p(a_1/b_2)$...	$p(a_1/b_j)$...	$p(a_1/b_n)$
a_2	$p(a_2/b_1)$	$p(a_2/b_2)$...	$p(a_2/b_j)$...	$p(a_2/b_n)$
...
a_i	$p(a_i/b_1)$	$p(a_i/b_2)$...	$p(a_i/b_j)$...	$p(a_i/b_n)$
...
a_n	$p(a_n/b_1)$	$p(a_n/b_2)$...	$p(a_n/b_j)$...	$p(a_n/b_n)$

$$p(a_1/b_j) + p(a_2/b_j) + \dots + p(a_i/b_j) + \dots + p(a_n/b_j) = 1 \quad (2.19)$$

Частная условная энтропия $H\left(\frac{A}{b_j}\right) = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{b_j}\right) \log P\left(\frac{a_i}{b_j}\right) \quad (2.20)$

Общая условная энтропия $H\left(\frac{A}{B}\right) = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(b_j) P\left(\frac{a_i}{b_j}\right) \log P\left(\frac{a_i}{b_j}\right) \quad (2.21)$

23 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Канальная матрица

Безусловные вероятности приемника

$$p(b_j) = \sum_{i=1}^n p(a_i) p(b_j/a_i) \quad (2.22)$$

Энтропия приемника

$$H(B) = - \sum_{j=1}^n p(b_j) \log p(b_j) \quad (2.23)$$

Безусловные вероятности источника

$$p(a_i) = \sum_{j=1}^n p(b_j) p(a_i/b_j) \quad (2.24)$$

Энтропия источника

$$H(A) = - \sum_{i=1}^n p(a_i) \log p(a_i) \quad (2.25)$$

24 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Энтропия объединения

Энтропия объединения используется для вычисления энтропии совместного появления статистически зависимых сообщений либо энтропии взаимосвязанных систем.

$$H(A, B) = H(B, A) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i, b_j) \left[\frac{\text{бит}}{\text{два символа}} \right] \quad (2.26)$$

Связь с условной энтропией

$$H(A, B) = H(A) + H\left(\frac{B}{A}\right) = H(B) + H\left(\frac{A}{B}\right) \quad (2.27)$$

$$p(a_i, b_j) = \begin{array}{cccc|l} p(a_1, b_1) & p(a_1, b_2) & \boxtimes & p(a_1, b_n) & \sum_{i=1}^n p(a_i, b_j) = p(b_j) \\ p(a_2, b_1) & p(a_2, b_2) & \boxtimes & p(a_2, b_n) & \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) = p(a_i) \\ p(a_n, b_1) & p(a_n, b_2) & \boxtimes & p(a_n, b_n) & \end{array} \quad (2.28)$$

25 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

ИНФОРМАЦИИ

Энтропия объединения

$$H(A) = -\sum_{i=1}^n p(a_i) \log p(a_i) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) \log \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) \quad (2.29)$$

$$H(B) = -\sum_{j=1}^n p(b_j) \log p(b_j) = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p(a_i, b_j) \log \sum_{i=1}^n p(a_i, b_j)$$

$$p\left(\frac{a_i}{b_j}\right) = \frac{p(a_i, b_j)}{p(b_j)} = \frac{p(a_i, b_j)}{\sum_{i=1}^n p(a_i, b_j)} \quad (2.30) \quad I(A, B) = H(A) + H(B) - H(B, A)$$

$$p\left(\frac{b_j}{a_i}\right) = \frac{p(a_i, b_j)}{p(a_i)} = \frac{p(a_i, b_j)}{\sum_{j=1}^n p(a_i, b_j)} \quad I(A, B) = H(A) - H(A/B)$$
$$I(A, B) = H(B) - H(B/A) \quad (2.31)$$