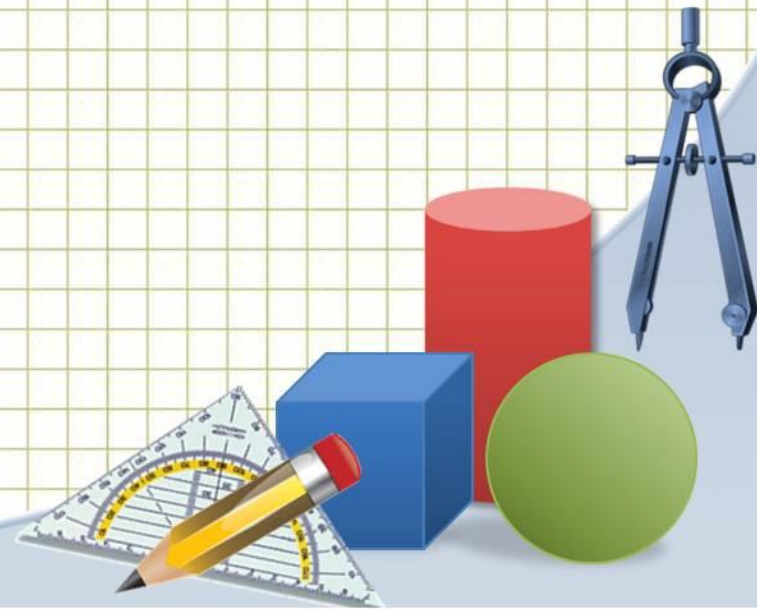


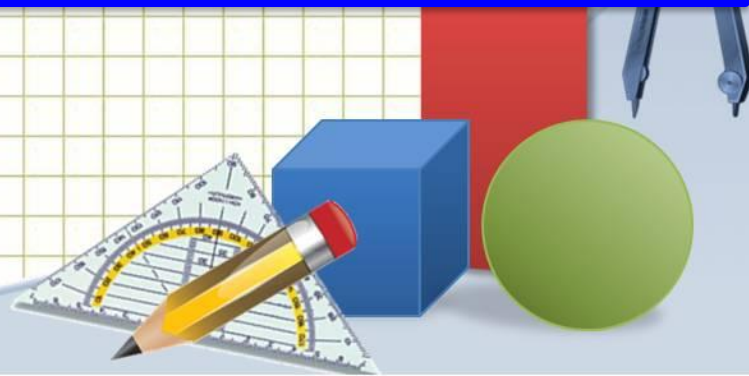
# *"Основные понятия и аксиомы стереометрии."*



# Геометрия

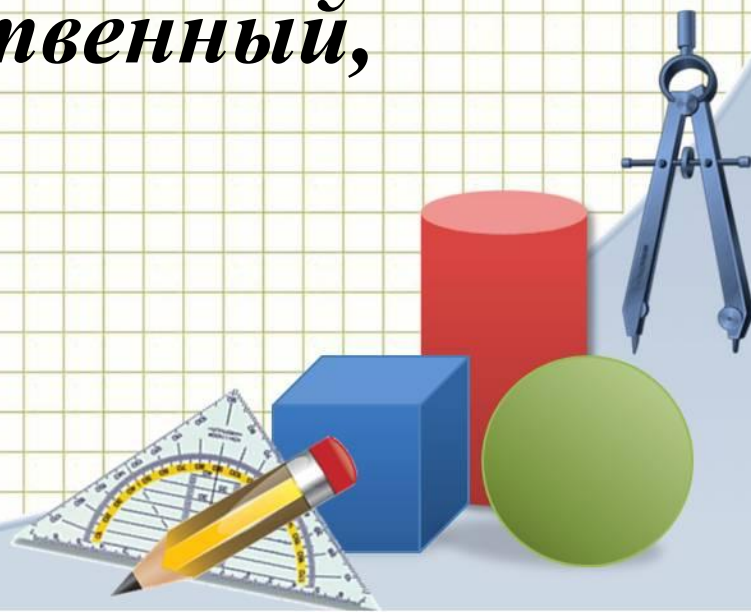
Планиметрия

Стереометрия



***Стереометрия изучает свойства фигур в пространстве.***

***Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — объемный, пространственный, «метрео» — мерить.***



# Основные понятия в стереометрии:

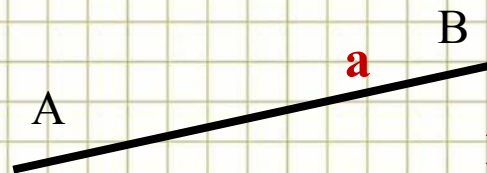
## точка



Обозначение:  
A; B; C; ....

## расстояние

|AB|



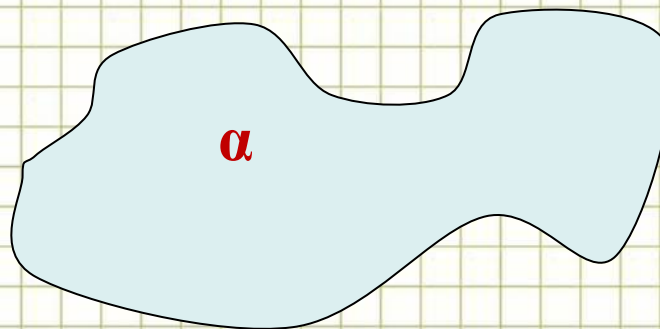
## прямая

Обозначение: a, b, c, d...  
или двумя заглавными латинскими (AB)

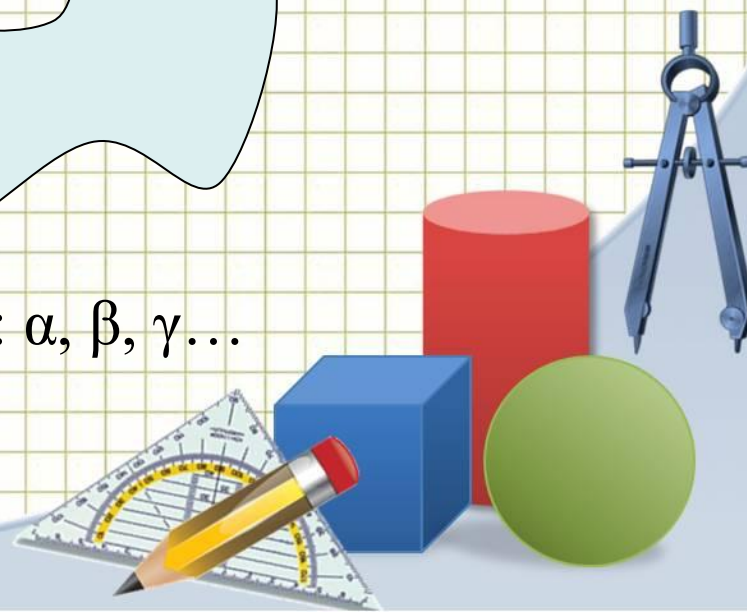
## множество

Всякое множество точек в геометрии называют фигурой (пример: прямая и плоскость)

## плоскость



Обозначение:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ...  
или (ABC)



# Для коротких записей утверждений используют символы :



*принадлежит*

$$A \in d$$



*не принадлежит*

$$A \notin d$$



*существует*



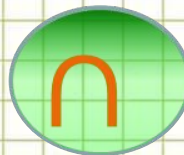
*существует только  
единственное*



*подмножество*



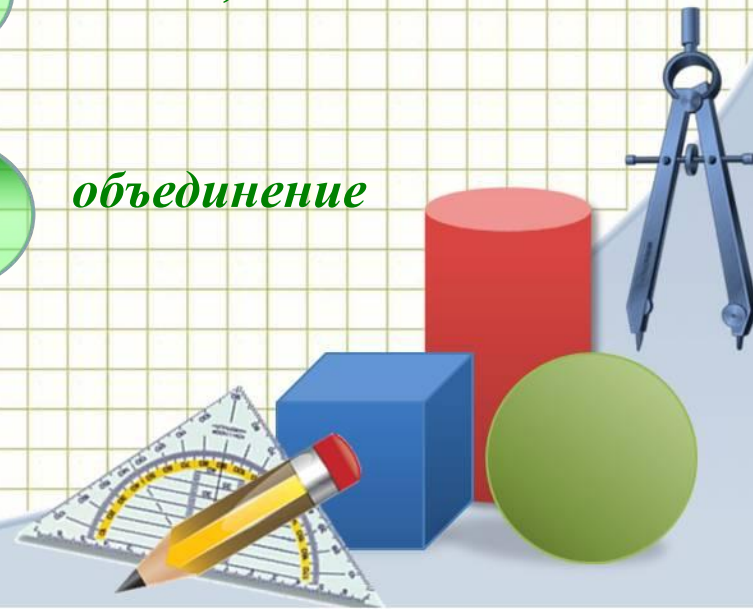
*любое, всякое*



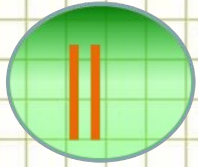
*пересечение*



*объединение*



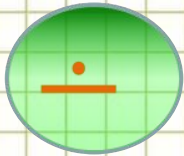
# Для коротких записей утверждений используют символы :



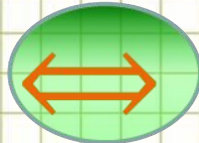
*параллельны*



*не параллельны*



*скрещивающиеся*



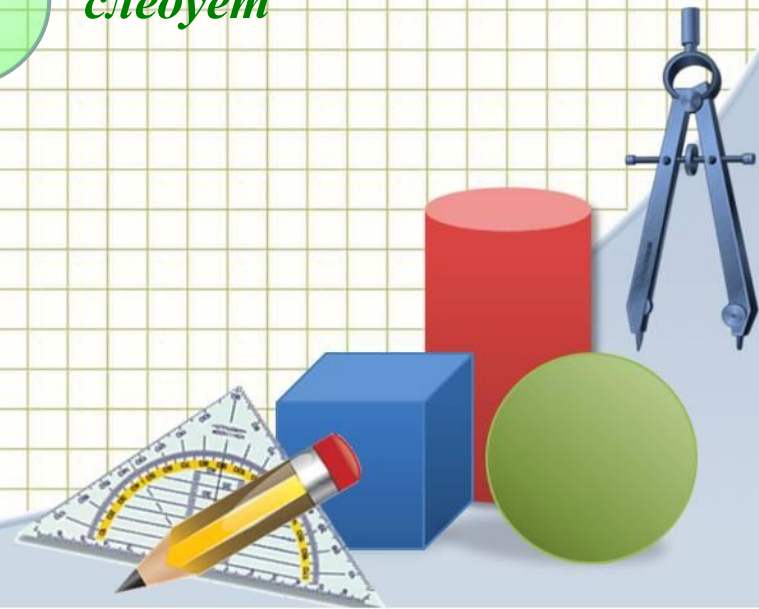
*равносильны*



*перпендикулярны*



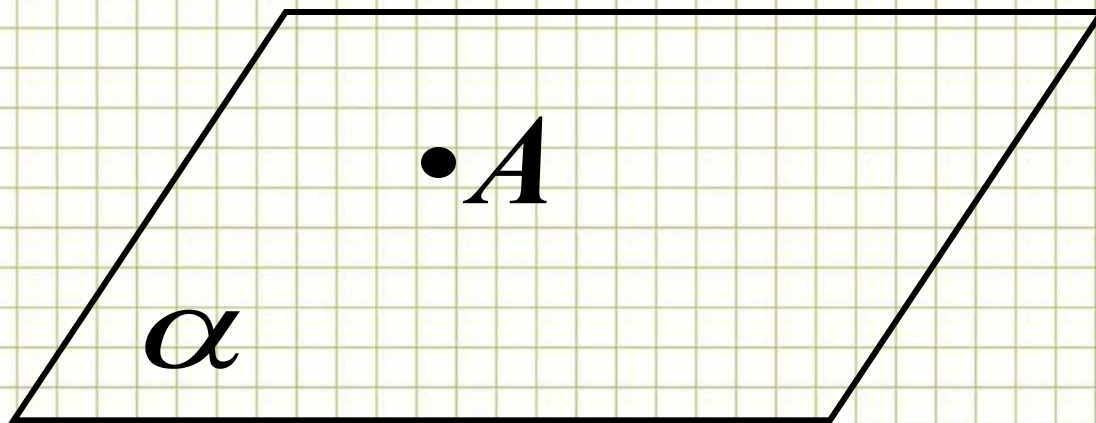
*следует*



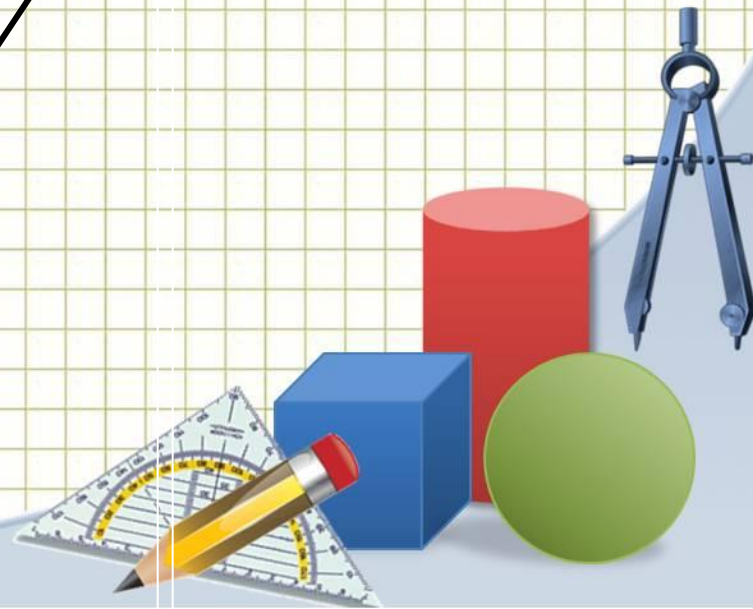
# Прочитайте чертеж

•  $c$

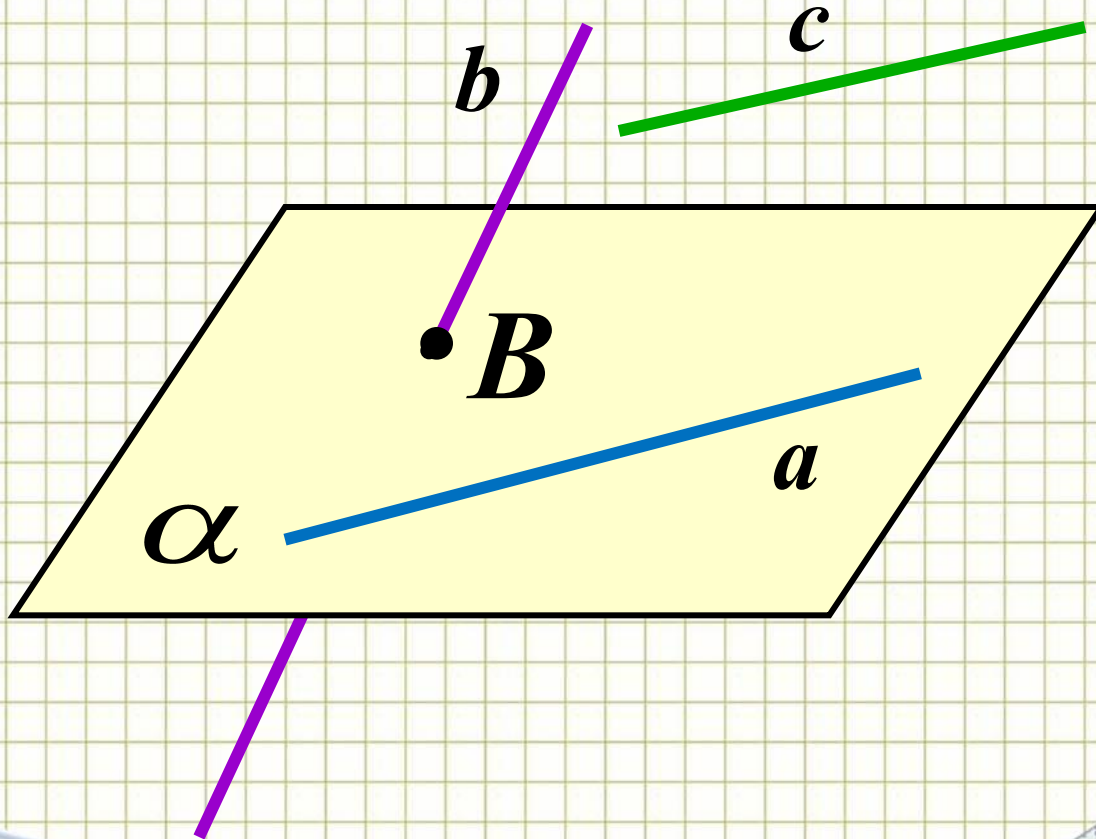
$A \in \alpha$



$C \notin \alpha$



# Прочитайте чертеж



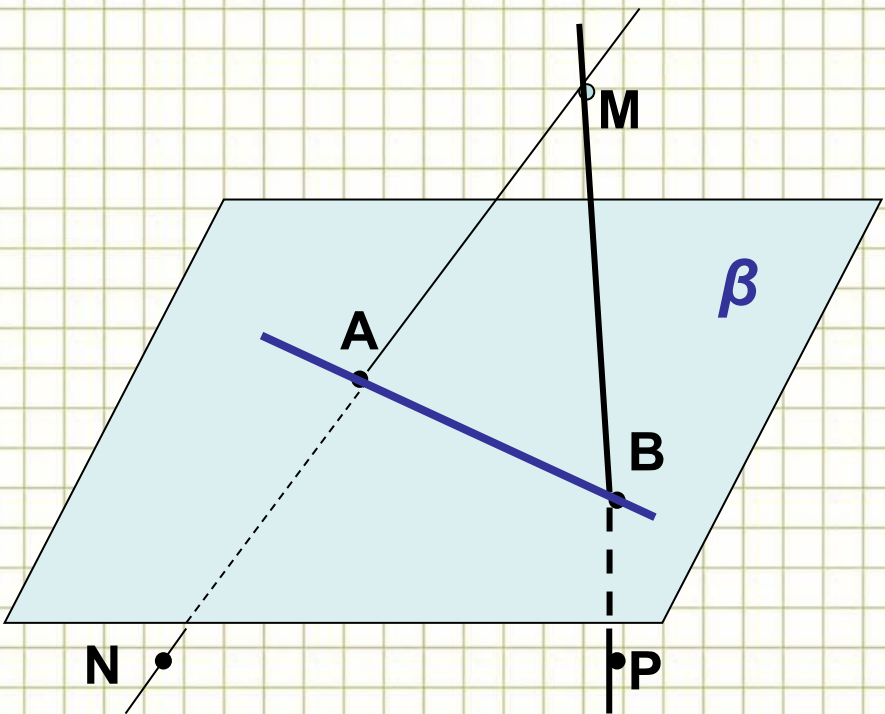
$$a \in \alpha$$

$$b \cap \alpha = B$$

$$c \notin \alpha$$



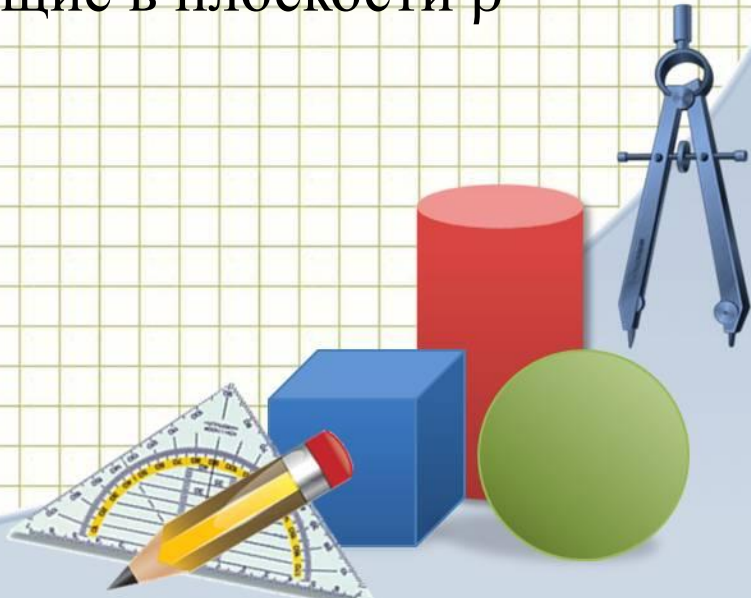




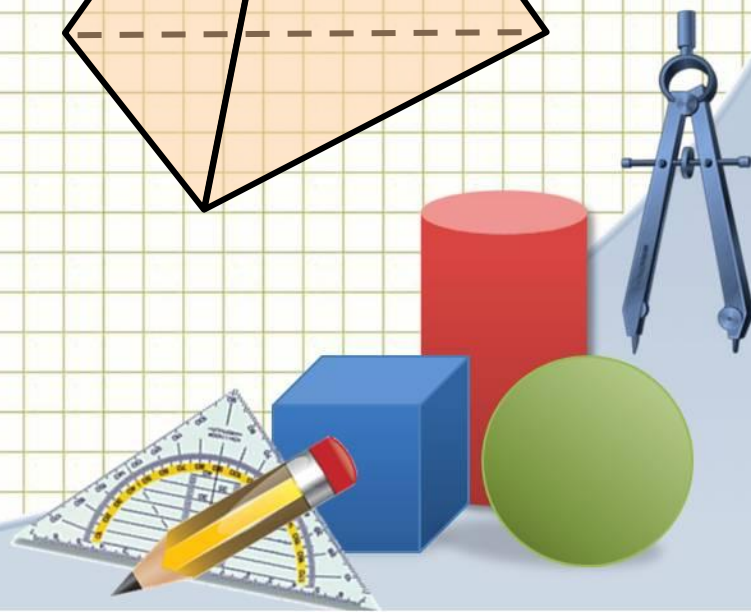
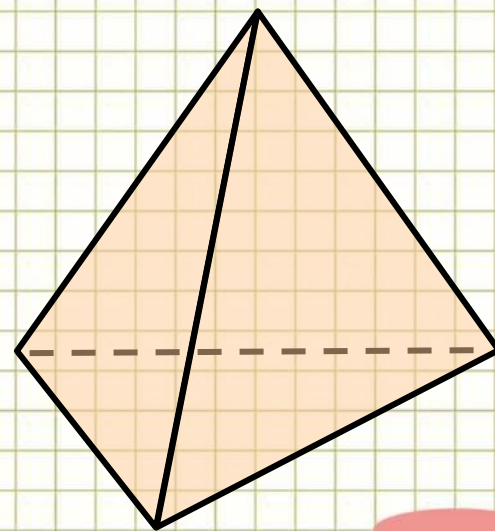
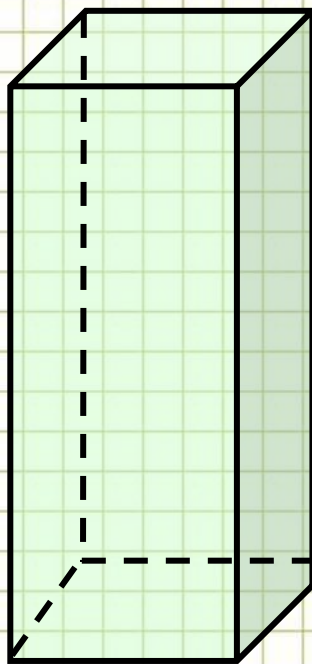
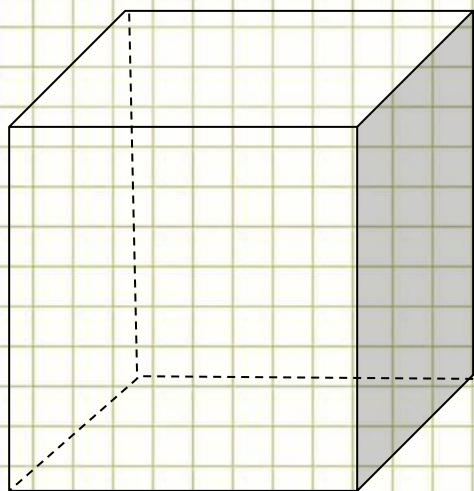
Ответьте на вопросы по рисунку:

1. Назовите точки, лежащие в плоскости  $\beta$ ; не лежащие в плоскости  $\beta$ .

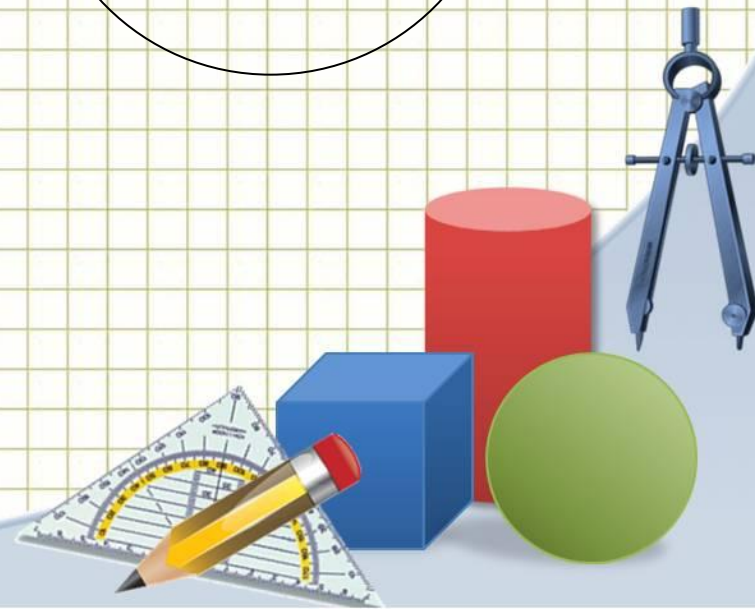
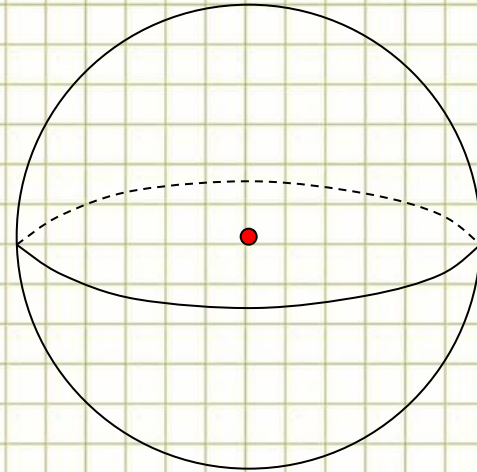
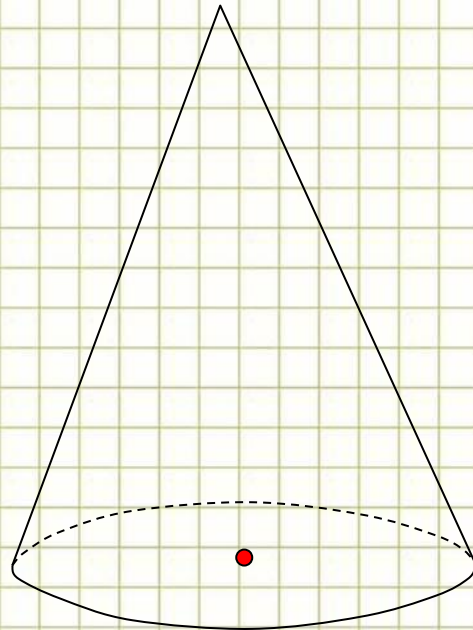
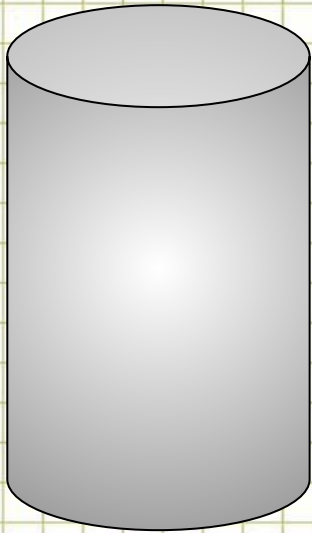
2. Назовите прямые, лежащие в плоскости  $\beta$ ; не лежащие в плоскости  $\beta$ .



*Наряду с основными фигурами мы будем рассматривать геометрические тела и их поверхности. Такие, как: куб, параллелепипед, призма, пирамида.*

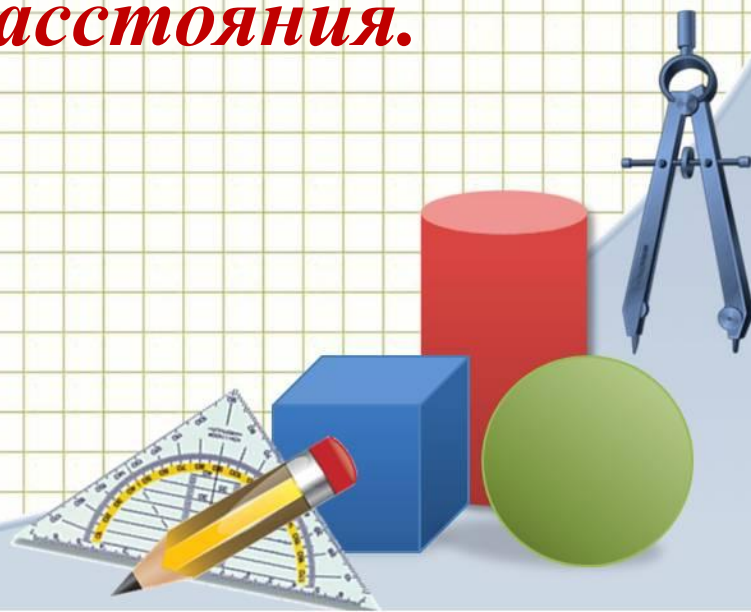


*А также тела вращения: шар, сфера, цилиндр, конус.*



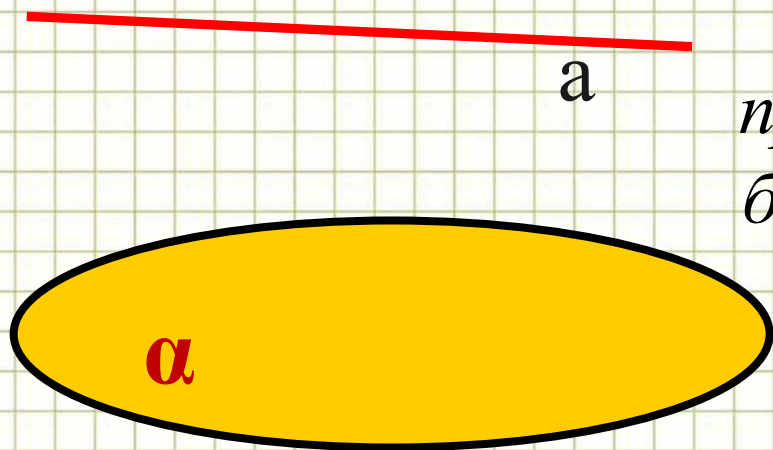
*Аксиома – это предложение не требующее доказательства.*

*В аксиомах стереометрии выражены основные свойства неопределяемых понятий: точки, прямой, плоскости и расстояния.*



# Аксиома 1

*Существует хотя бы одна прямая и хотя бы одна плоскость. Каждая прямая и каждая плоскость есть не совпадающее с пространством непустое множество точек.*



*Для любой плоскости  $\alpha$  и прямой  $a$  существует хотя бы одна не принадлежащая им точка.*

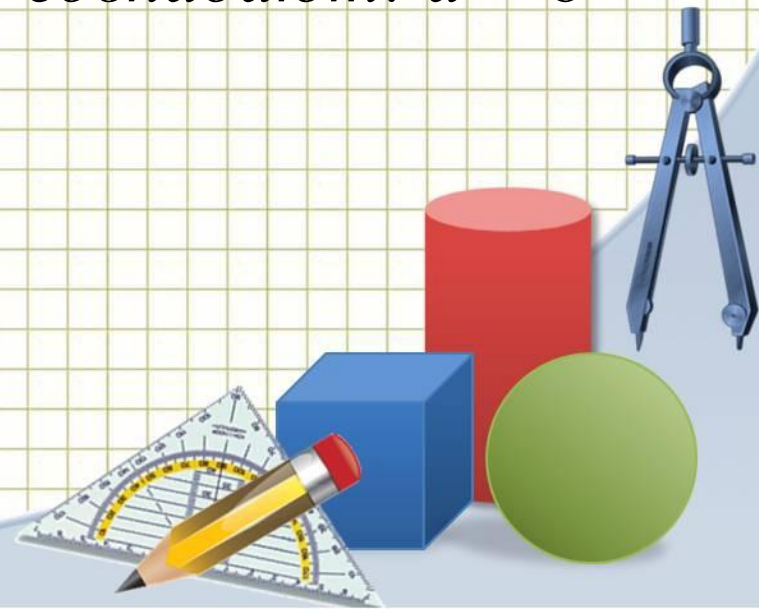


## *Аксиома 2*

*Через любые две различные точки  
проходит одна и только одна прямая.*

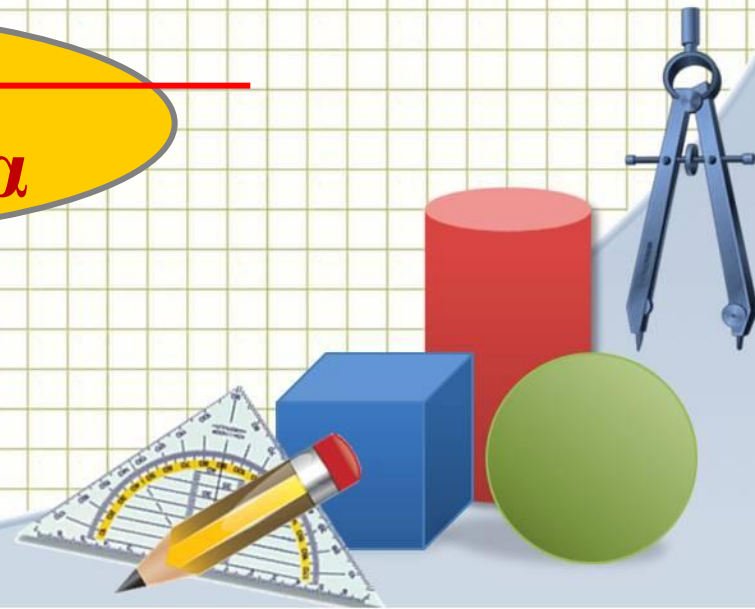
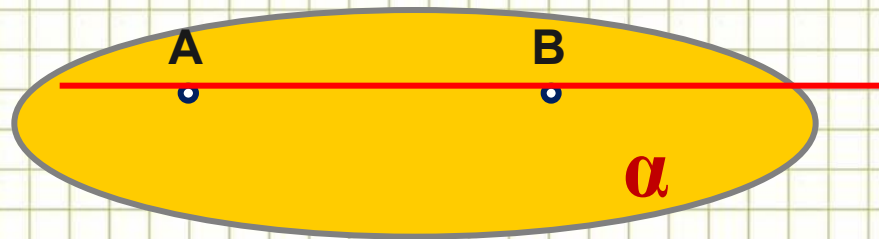


*Если прямые имеют по  
две общие точки, то эти  
прямые совпадают:  $a = b$*



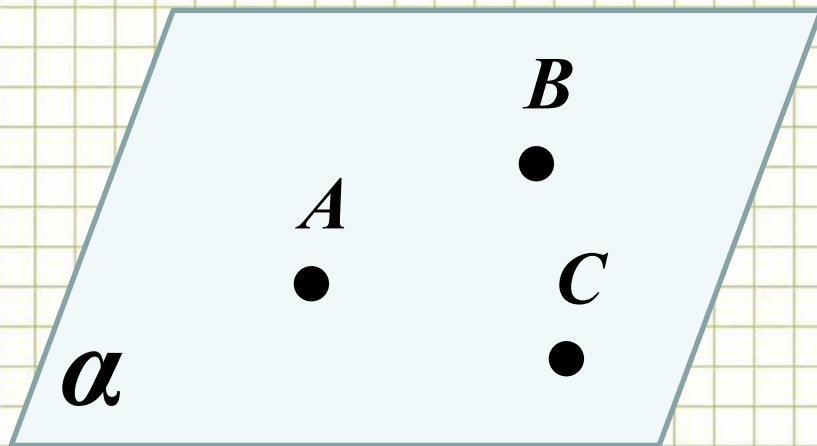
## *Аксиома 3*

*Прямая, проходящая через две  
различные точки плоскости, лежит  
в этой плоскости*

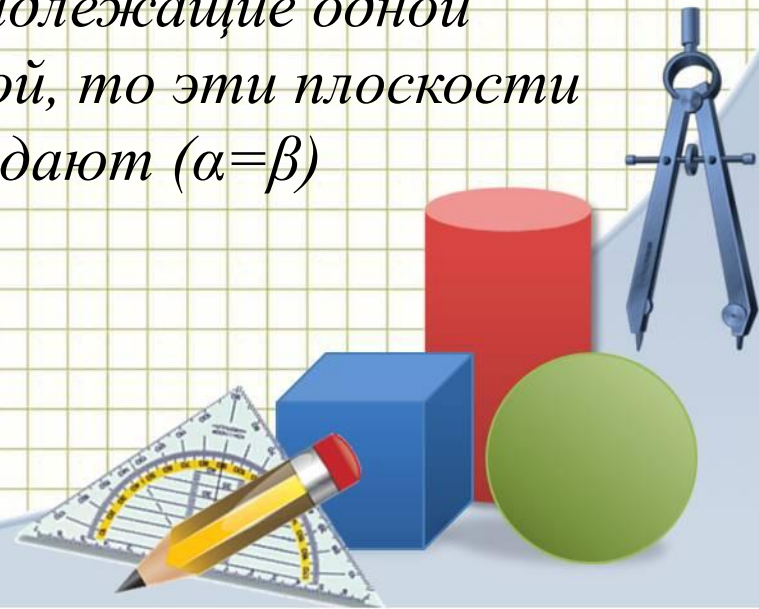


# Аксиома 4

*Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.*



*Если плоскости имеют три общие точки, не принадлежащие одной прямой, то эти плоскости совпадают ( $\alpha = \beta$ )*

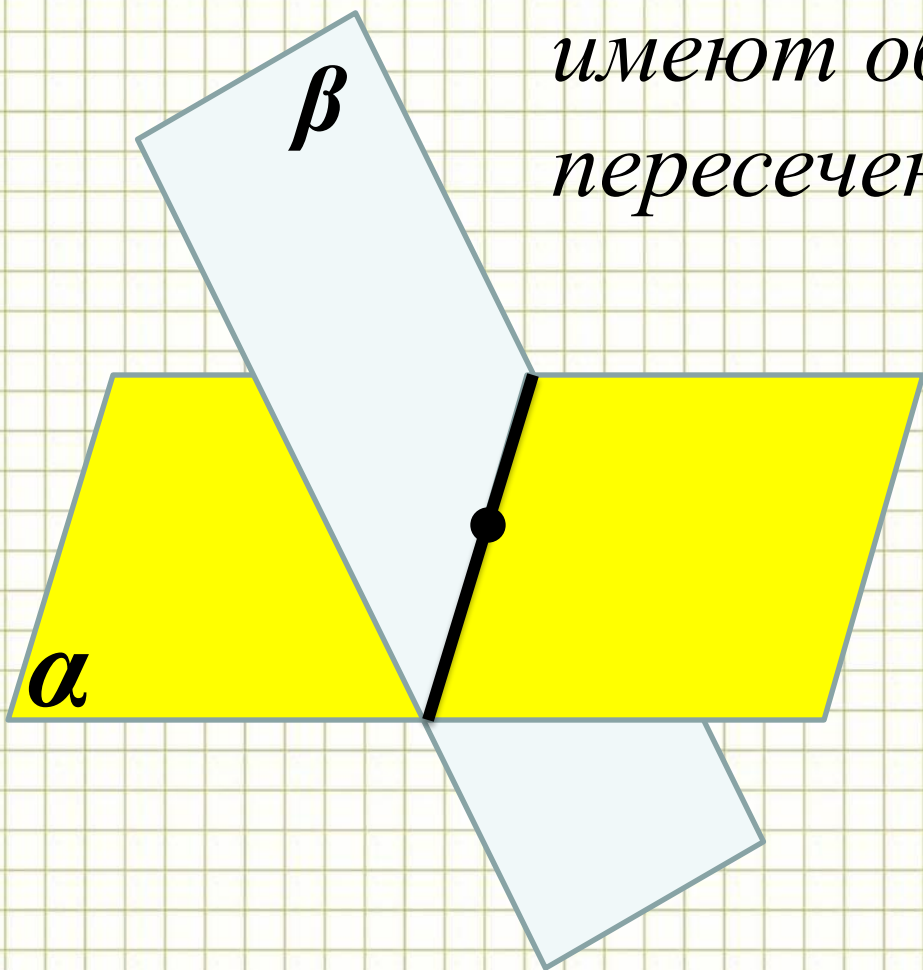




## *Аксиом 5*

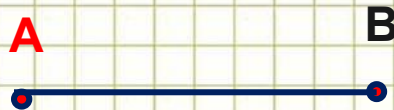
*Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая.*

*Две плоскости, пересечением которых является прямая ( $\alpha \cap \beta = a$ ), называются пересекающимися плоскостями.*



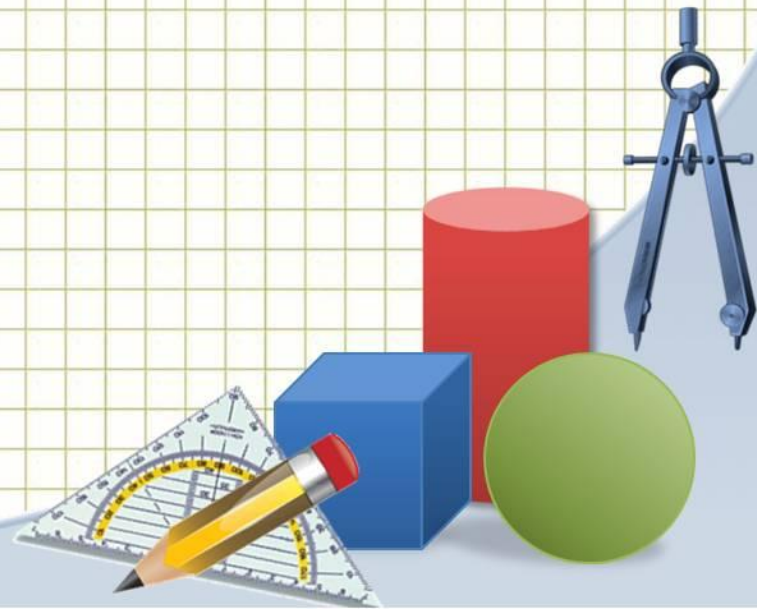
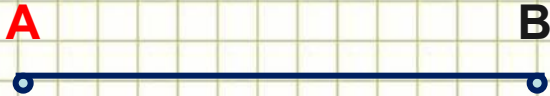
## Аксиома 6

Для любых двух точек  $A$  и  $B$  имеется неотрицательная величина, называемая расстоянием от  $A$  до  $B$ . Расстояние  $|AB|$  равно нулю в том и только в том случае, если точки  $A$  и  $B$  совпадают.



## *Аксиома 7*

*Расстояние от точки A до точки B  
равно расстоянию от точки B до  
точки A:  $|AB| = |BA|$*

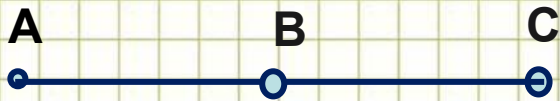


## Аксиома 8

Для любых трех точек  $A, B, C$  расстояние от  $A$  до  $C$  не больше суммы расстояний от  $A$  до  $B$  и от  $B$  до  $C$ :  $|AC| \leq |AB| + |BC|$

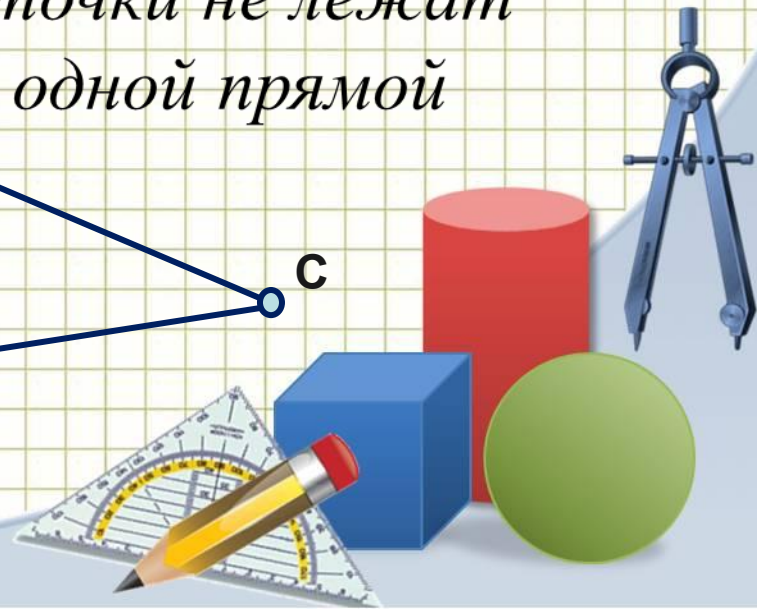
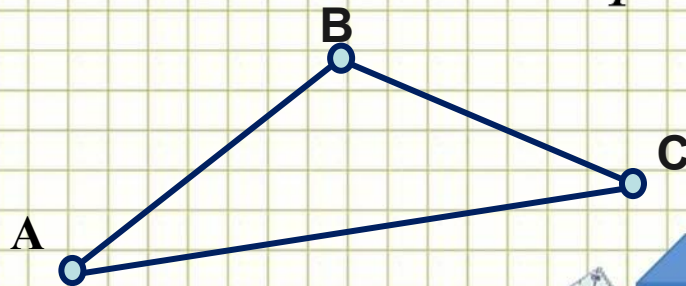
$$|AC| = |AB| + |BC|$$

когда точки лежат  
на одной прямой



$$|AC| < |AB| + |BC|$$

если точки не лежат  
на одной прямой



## *Аксиома 9*

*Для каждой плоскости выполняются известные из планиметрии аксиомы порядка, подвижности плоскости и параллельных прямых*

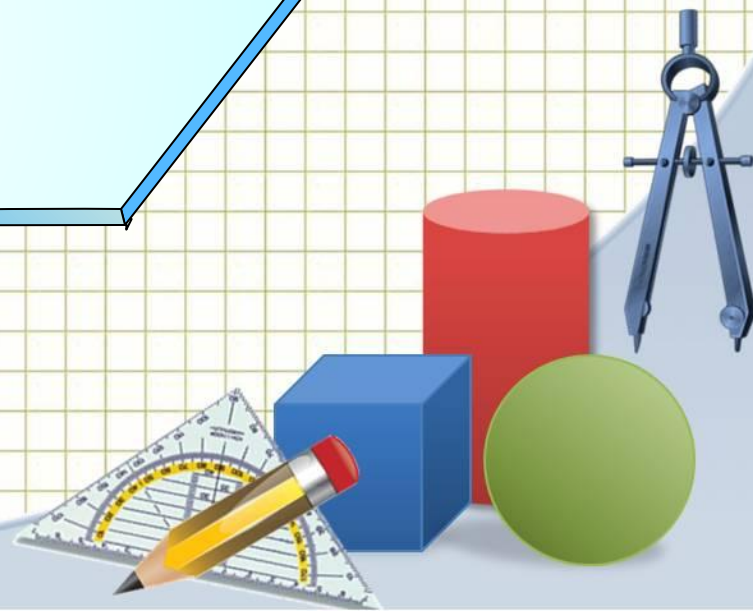
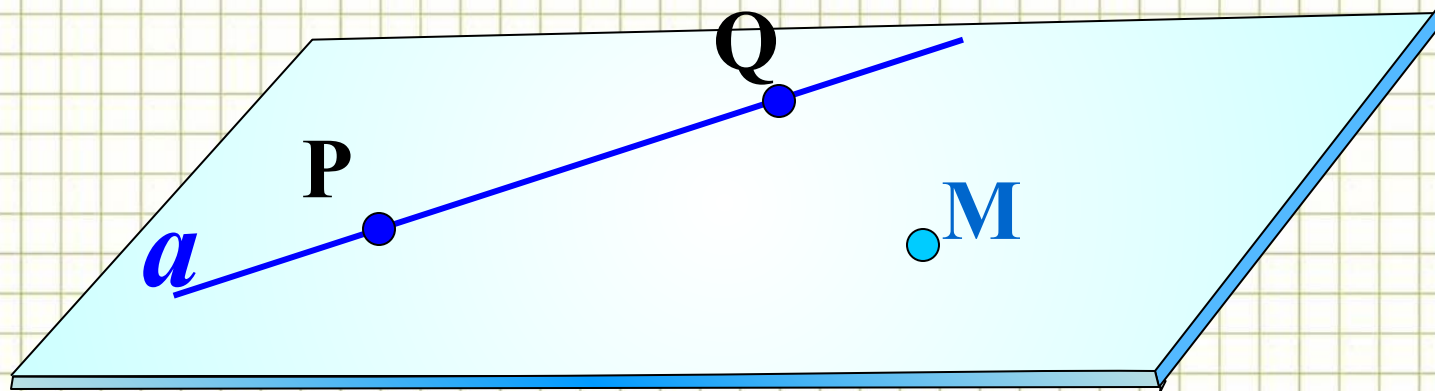
*Из принятых выше аксиом вытекает, что в каждой плоскости можно применять теоремы планиметрии.*

*Например, в каждой плоскости выполняется теорема Пифагора, сумма углов любого треугольника равна  $180^\circ$*



## Следствие 1

Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести одну и только одну плоскость.



# Доказательство

Дано:

$a$ ,

$A \notin a$

Доказать:

1)  $\exists \alpha$ ;  $a \in \alpha$ ;  $A \in \alpha$

2)  $\alpha$  - единственная

1)  $A_2: B \in a, C \in a$ ,

2)  $A_4: (ABC) = \alpha$  - единст.

(через три точки, не лежащие на одной прямой проведем плоскость  $\alpha$ )

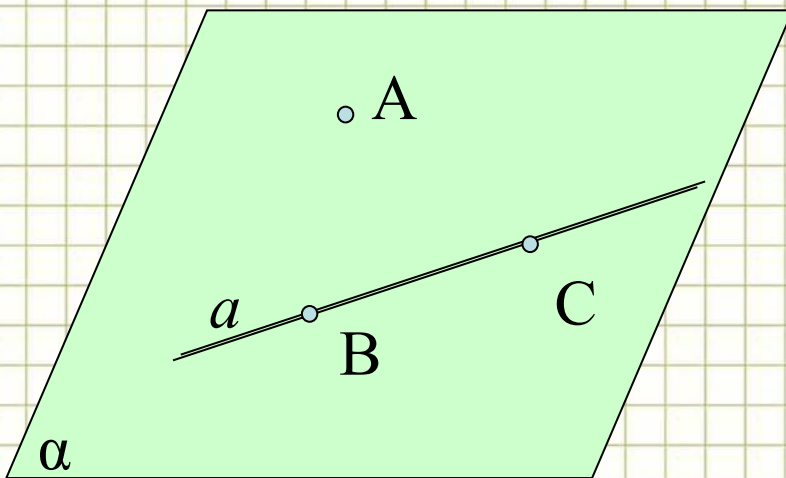
3)  $A_3: B \in \alpha; C \in \alpha \Rightarrow (BC) \in \alpha$

$(BC) = a \in \alpha$

(т.к. две точки прямой  $a$  принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости)

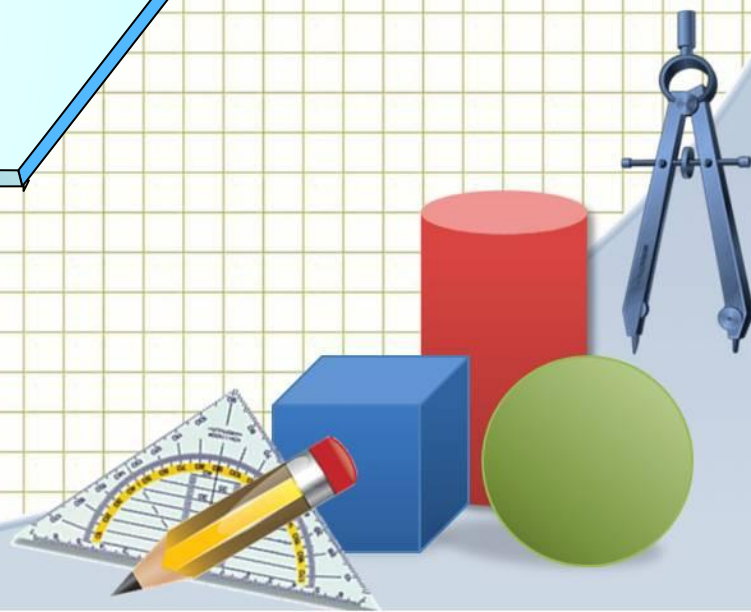
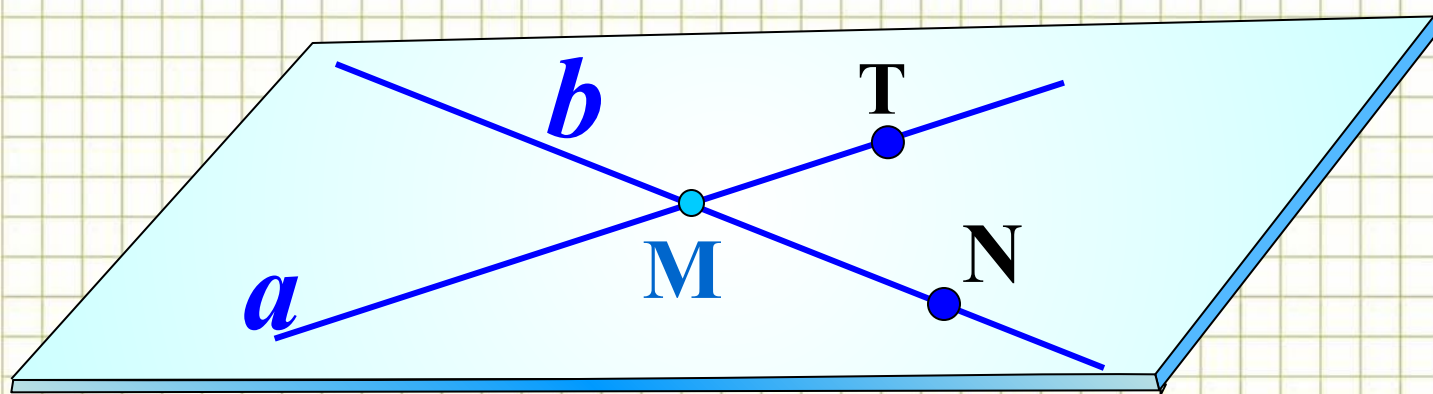
4)  $A_4: \alpha$  - единственная

(т.к. через три точки, не лежащие на одной прямой проходит только одна плоскость)



## Следствие 2

*Через две пересекающиеся прямые можно провести одну и только одну плоскость.*



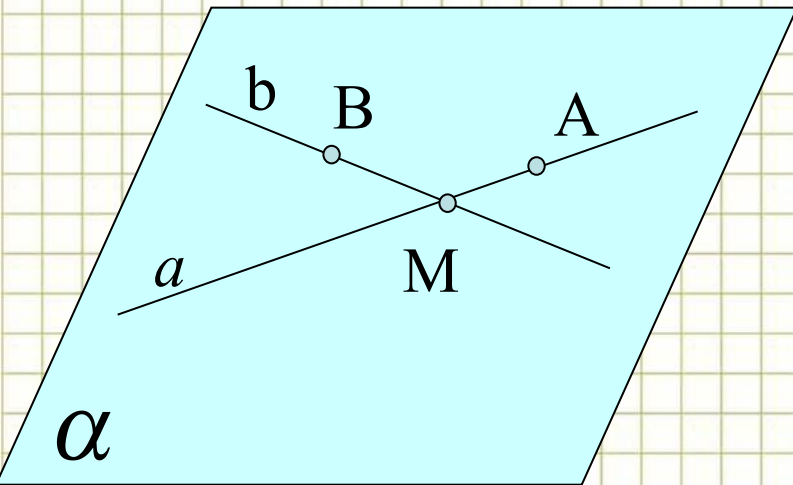


## Доказательство

Дано:  $a \cap b = M$

Доказать:

- 1)  $\exists \alpha ; a \in \alpha ; b \in \alpha$
- 2)  $\alpha$  - единственная



1)  $A_2: M \in a, A \in a$

$M \in b, B \in b$

2)  $A_4: (ABC) = \alpha$  - единст.

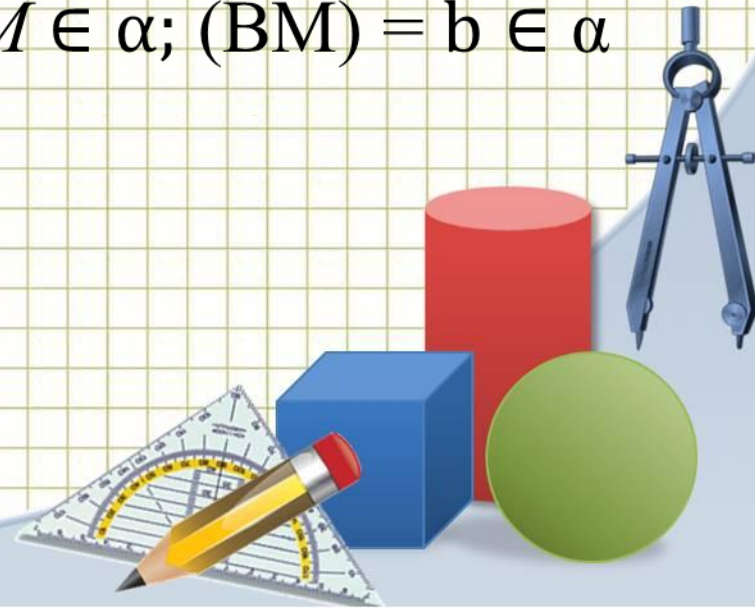
(через точку  $A$  и прямую  $b$  проведем плоскость  $\alpha$ )

3)  $A_3:$

$A \in \alpha ; M \in \alpha ; (AM) = a \in \alpha$

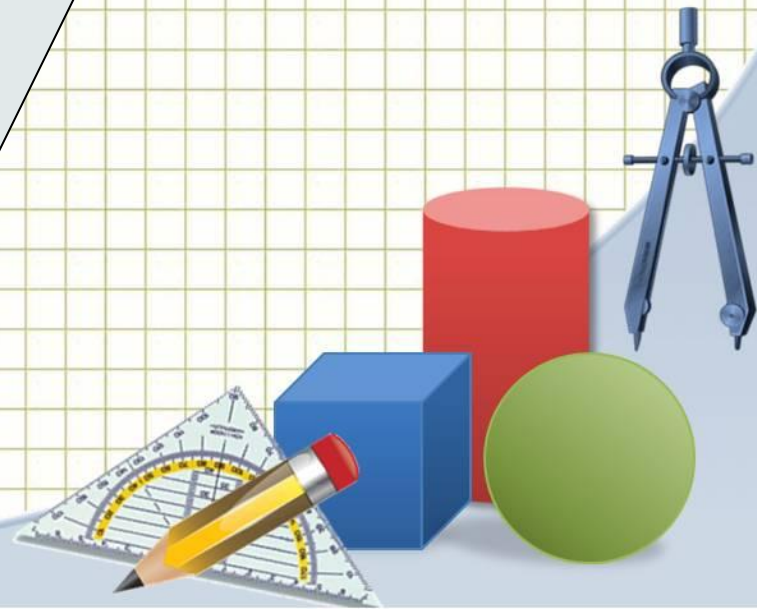
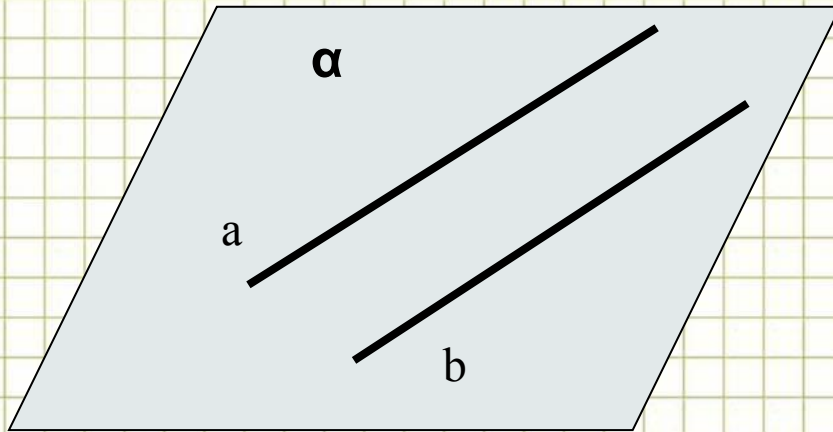
$B \in \alpha ; M \in \alpha ; (BM) = b \in \alpha$

∧ ∧



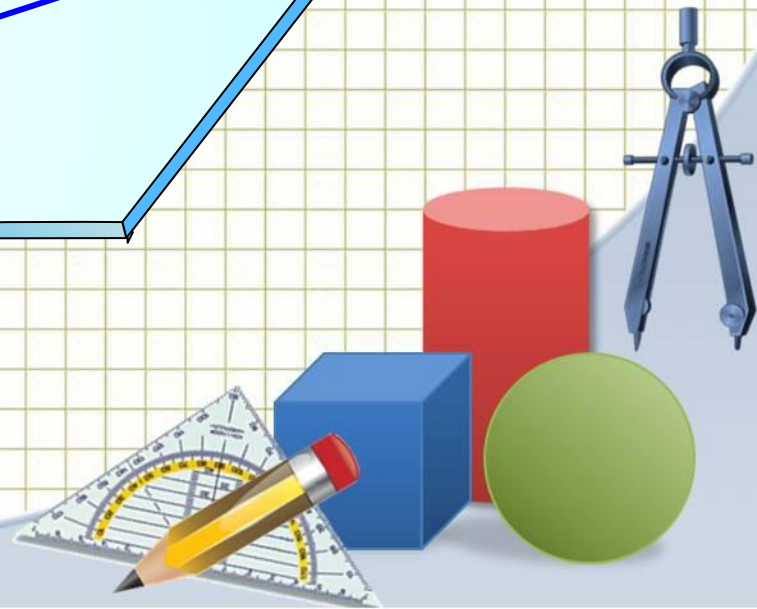
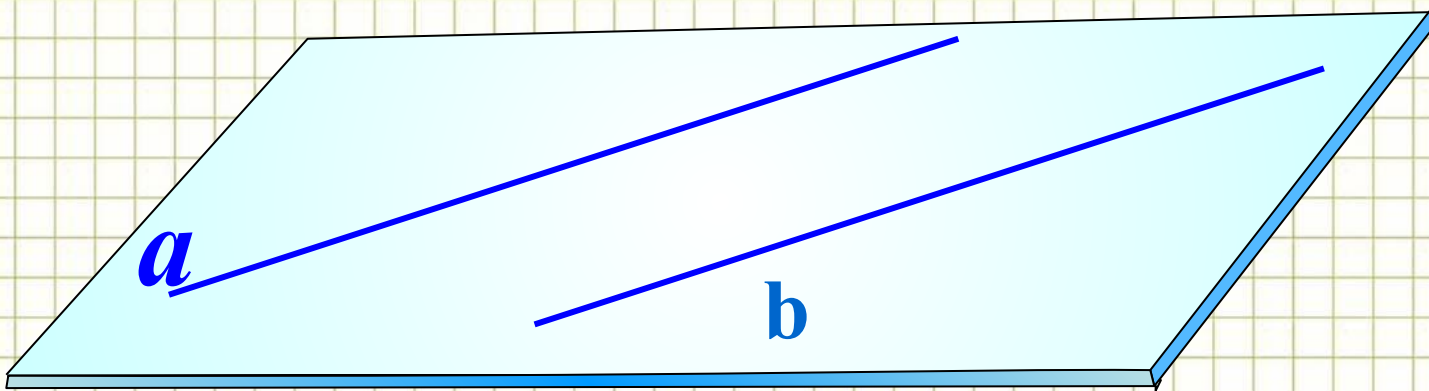
*Определение:*

*Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки.*



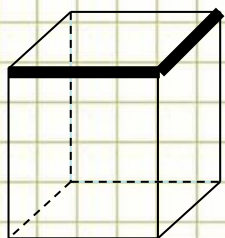
## Следствие 3

*Через две различные параллельные прямые можно провести только одну плоскость.*

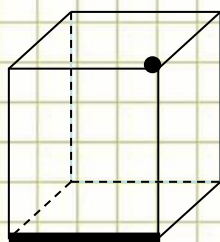


# Ответьте на вопрос

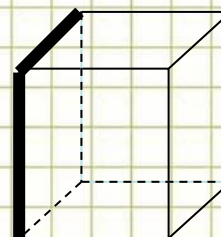
1. Сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы?



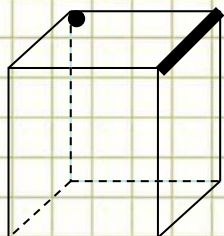
a)



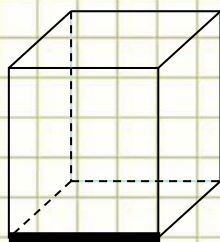
б)



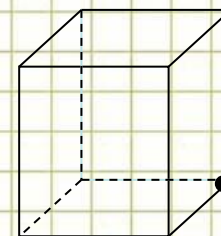
в)



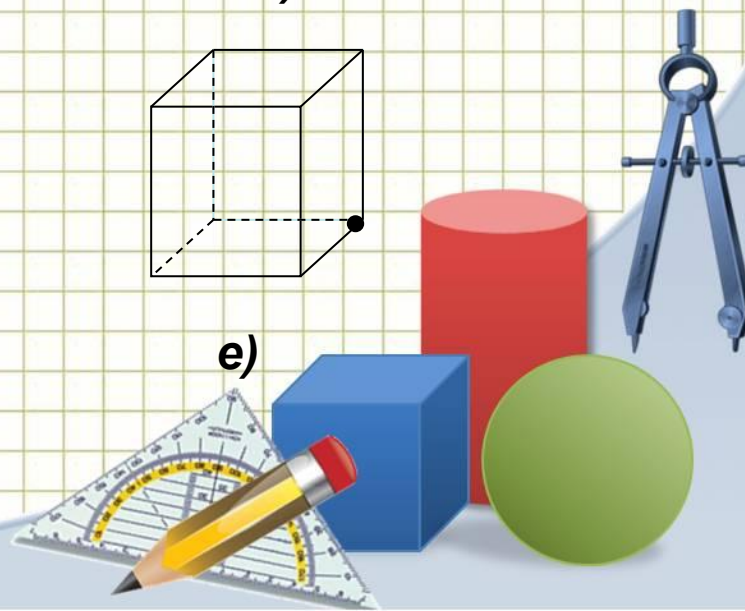
г)

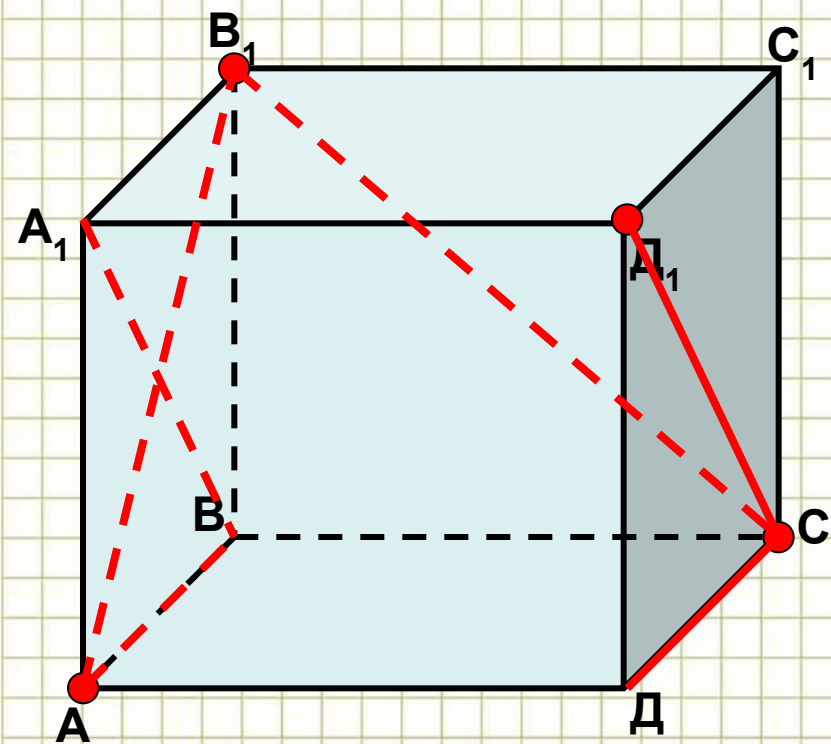


д)



е)





1. Изобразите в тетради куб (видимые линии – сплошной линией, невидимые – пунктиром).

2. Обозначьте вершины куба заглавными буквами  $АВСДА_1В_1С_1Д_1$

3. Выделите цветным карандашом:

-вершины  $А, С, В_1, Д_1$

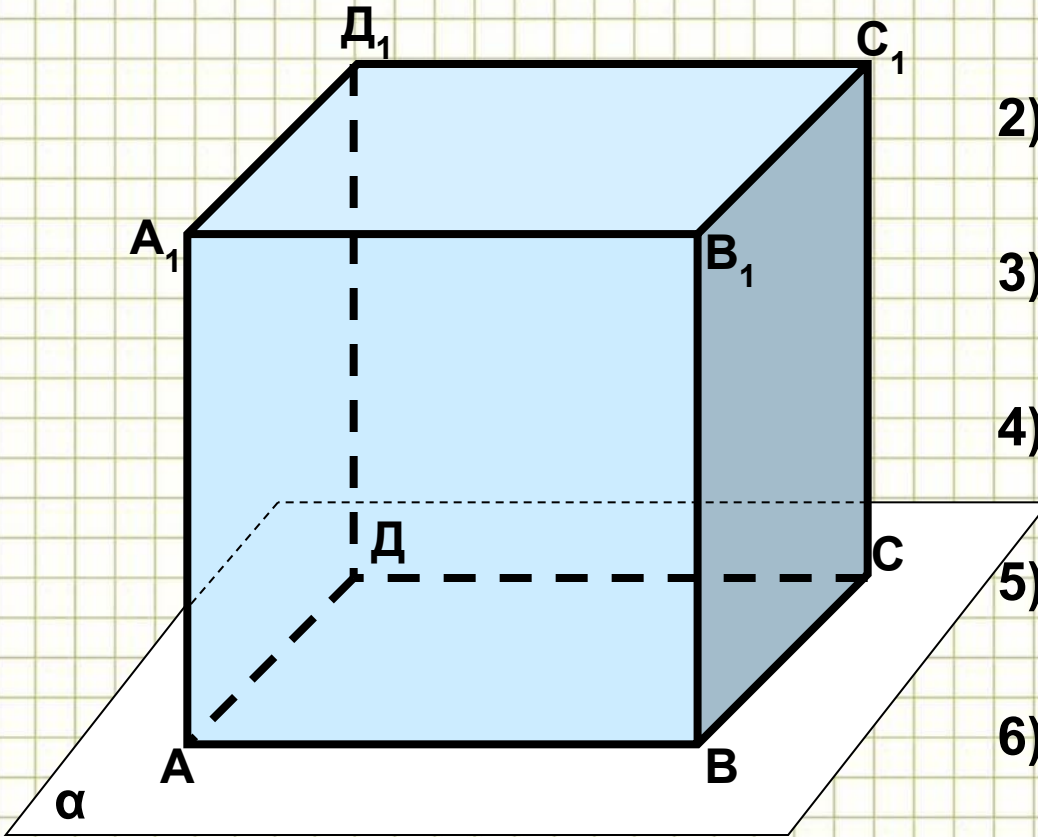
-отрезки  $АВ, СД, В_1С, Д_1С$

-диагонали квадрата  $АА_1В_1В$

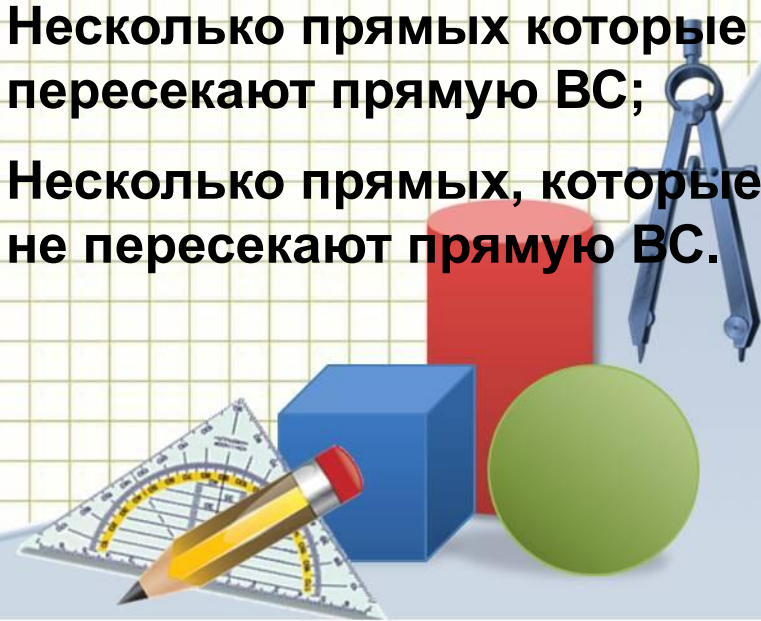


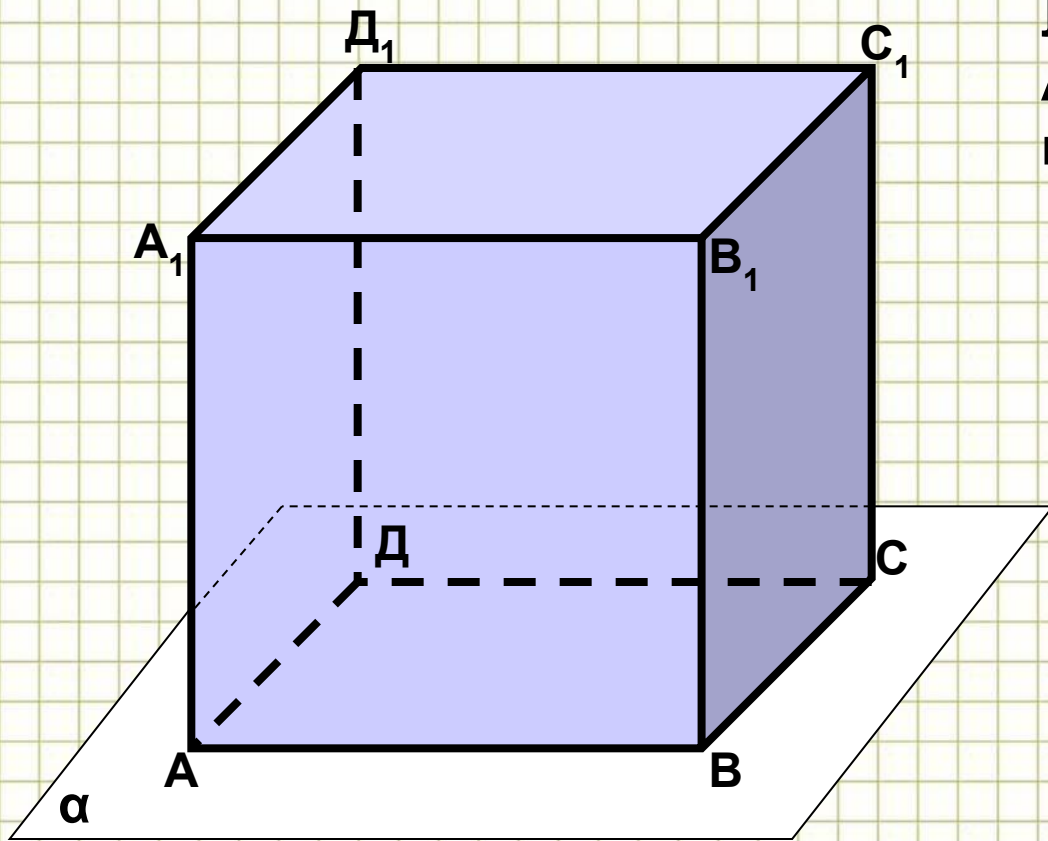
**Дано:** куб  $АВСДА_1В_1С_1Д_1$

**Найдите:**



- 1) Несколько точек, которые лежат в плоскости  $\alpha$ ;
- 2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости  $\alpha$ ;
- 3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости  $\alpha$ ;
- 4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости  $\alpha$ ;
- 5) Несколько прямых которые пересекают прямую  $BC$ ;
- 6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую  $BC$ .





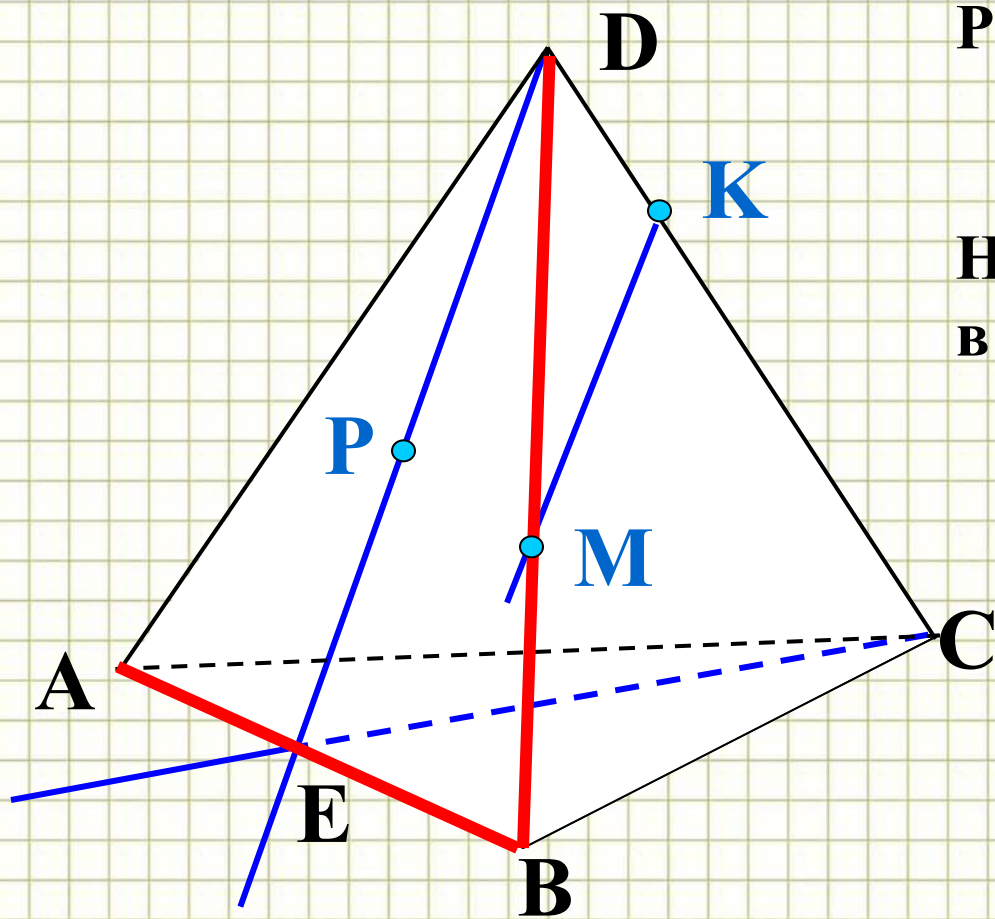
Лежат ли прямые  $AA_1$ ,  
 $AB$ ,  $AD$  в одной  
плоскости?

Прямые  $AA_1$ ,  $AB$ ,  $AD$   
проходят через точку  $A$ ,  
но не лежат в одной  
плоскости

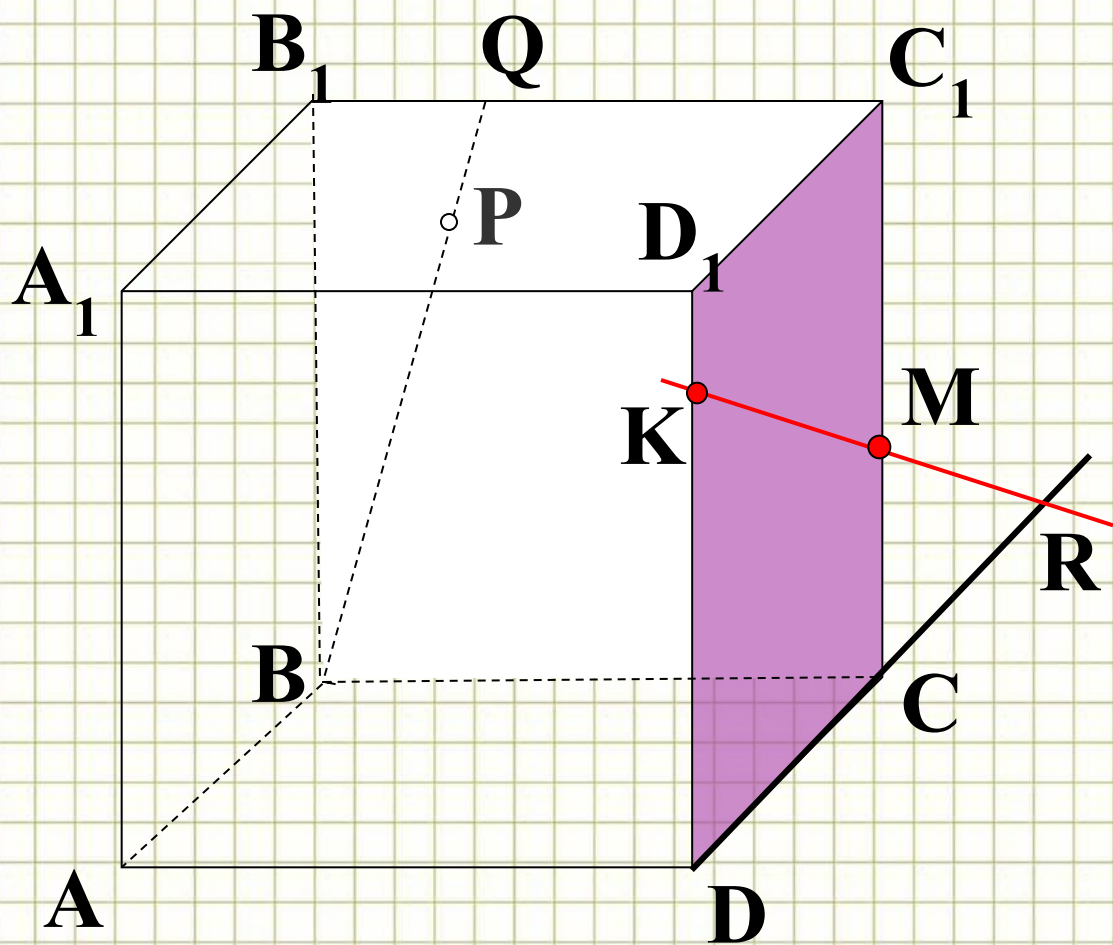


**Назовите плоскости, в  
которых лежат прямые  
PE, MK, DB, AB, EC**

**Назовите точки, лежащие  
в плоскостях ADB и DBC**

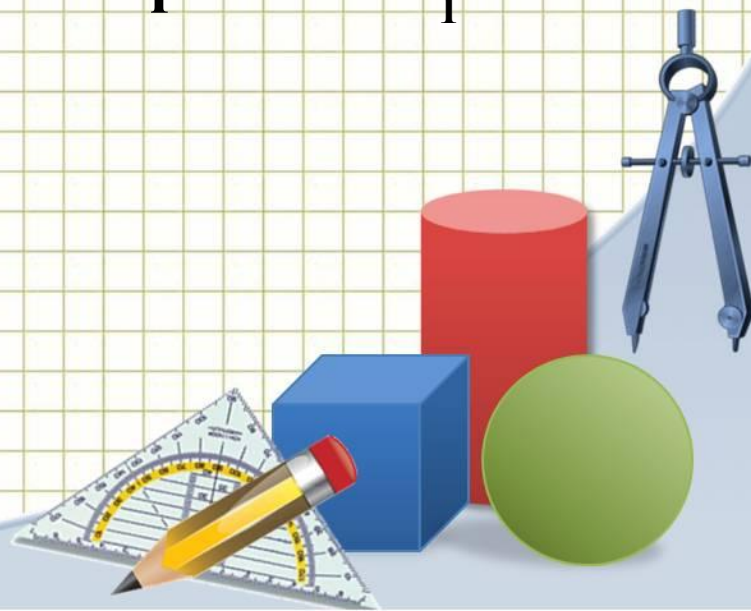






Назовите точки,  
лежащие в  
плоскостях  $DCC_1$  и  
 $BQC$

Назовите плоскости,  
в которых лежит  
прямая  $AA_1$

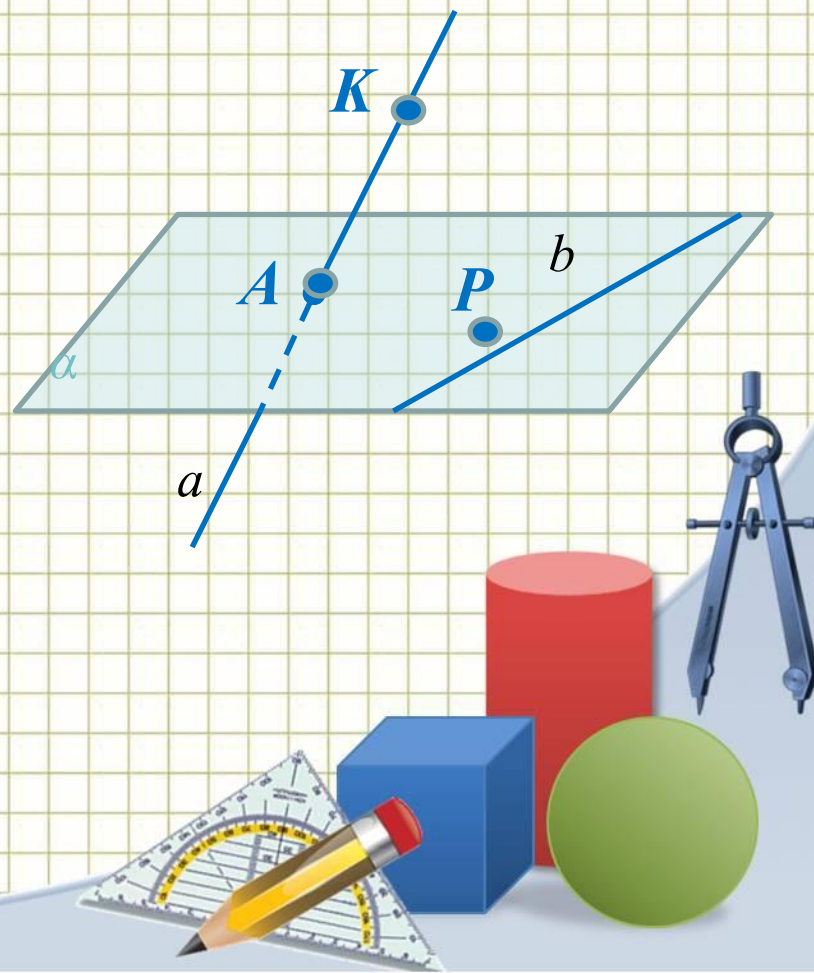


# Задания

## для самостоятельной работы:

- *Задание 1.*

*Запишите с помощью символов взаимное расположение точек, прямых и плоскостей, изображенных на рисунке.*



# Задания

## для самостоятельной работы:

### • Задание 2.

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Запишите с помощью символики  
ответы на вопросы:

а) По какой прямой пересекаются  
плоскости:

- 1)  $(ABC)$  и  $(AA_1 D_1)$ ;
- 2)  $(AA_1 B_1)$  и  $(AA_1 D)$ ;
- 3)  $(BB_1 C_1)$  и  $(CC_1 D_1)$ .

б) Каким плоскостям принадлежат  
точки:  $A, C_1, D$ ?

в) Принадлежит ли  $B_1$  плоскости:

- 1)  $(ABC)$  ; 2)  $(BB_1 C_1)$  ; 3)  $(A_1 B_1 C_1)$  ?

