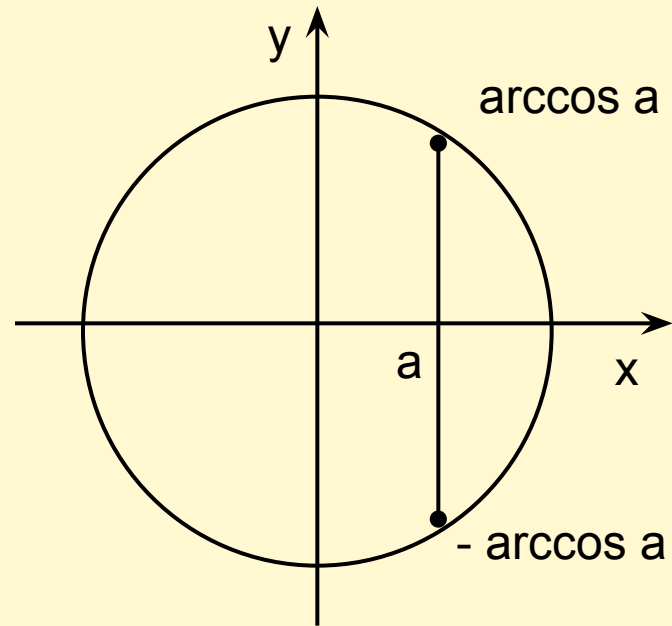


**«РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ»**

$$1) \quad \cos x = a$$

Если  $a > 1$  и  $a < -1$ , то уравнение не имеет решений

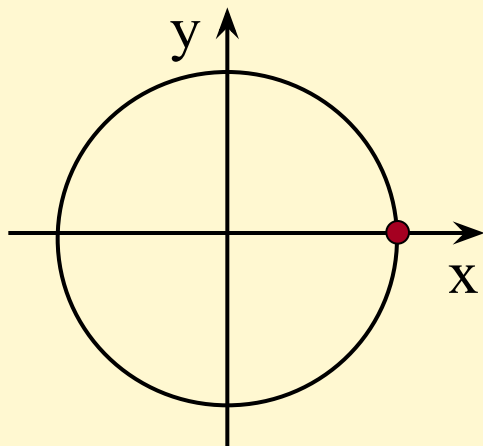
Если  $-1 \leq a \leq 1$ , то уравнение имеет бесконечное множество решений



$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

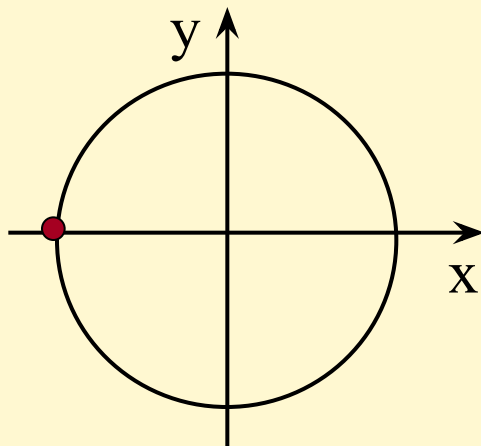
Особая форма записи решения уравнений вида:

$$\cos x = 1$$



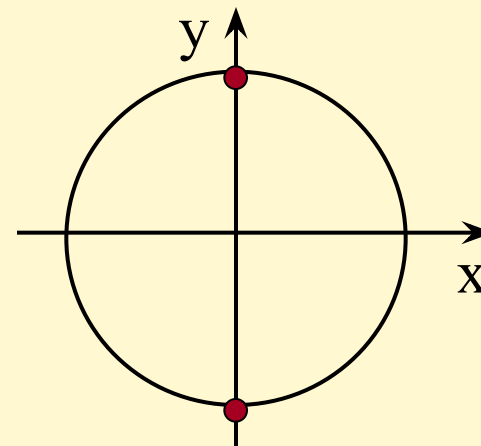
$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$



$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0$$



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Пример 1. Решите уравнение

$$a) \cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$б) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \pm \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \pm \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

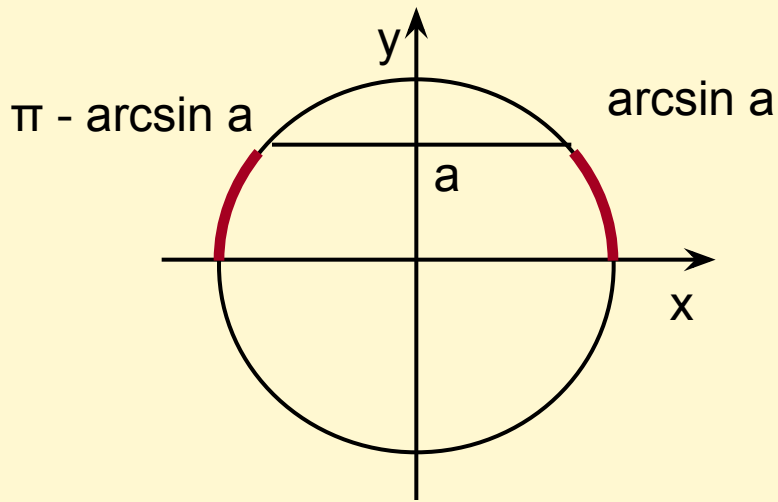
$$в) \cos x = \frac{2}{3}, \quad x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$г) \cos x = 3, \quad \text{нет решений, т.к. } 3 > 1$$

## 2) $\sin x = a$

Если  $a > 1$  и  $a < -1$ , то уравнение не имеет решений

Если  $-1 \leq a \leq 1$ , то уравнение имеет бесконечное множество решений



$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**ИЛИ**

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Если  $k = 2n$  (четное), то  $x = (-1)^{2n} \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$x = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

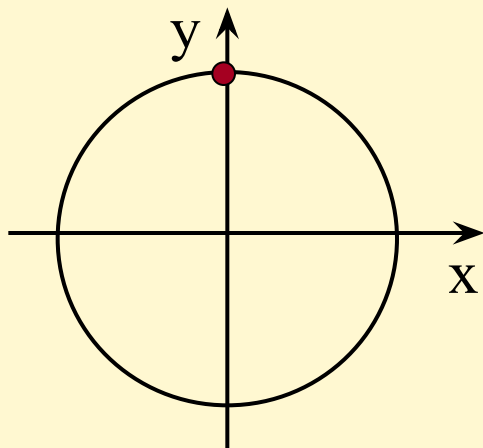
Если  $k = 2n + 1$  (нечетное), то  $x = (-1)^{2n+1} \arcsin a + \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$

$$x = -\arcsin a + 2\pi n + \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

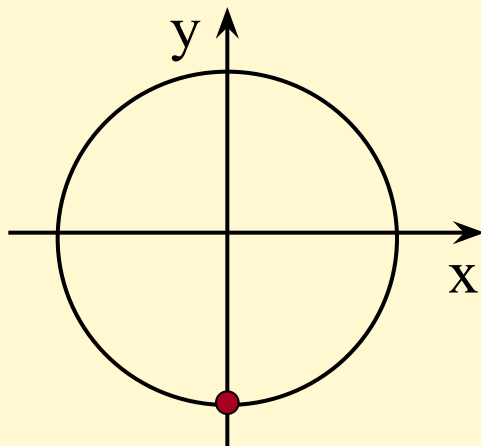
Особая форма записи решения уравнений вида:

$$\sin x = 1$$



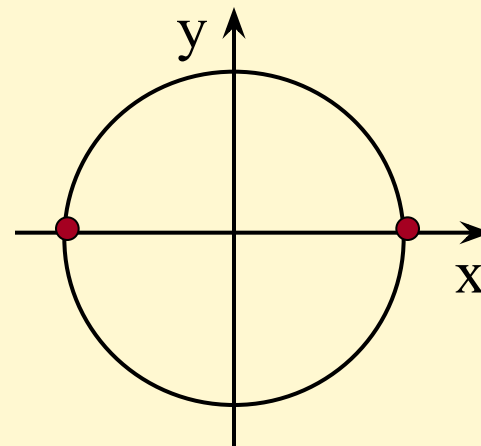
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1$$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0$$



$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Пример 2. Решите уравнение

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$б) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = (-1)^k \arcsin \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = -(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$в) \sin x = \frac{1}{7}, \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{7} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$г) \sin x = -2, \text{ нет решений, т.к. } -2 < -1$$

$$3) \quad \operatorname{tg} x = a$$

На  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  имеет единственный

корень  $x = \operatorname{arctg} a$

Т.к. функция  $y = \operatorname{tg} x$  периодическая с основным периодом  $\pi$ , то значение функции будет повторяться через  $\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Следовательно,

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- все решения  
уравнения  $\operatorname{tg} x = a$



Пример 3. Решите уравнение

$$a) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \quad x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$б) \operatorname{tg} x = -1, \quad x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$в) \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$