Восточно-Казахстанский технологический колледж

Показательные уравнения и способы их решения.

СРС

ВЫПОЛНИЛ:
А.НУРСЕРИК

Семей 2017

Определение:

Показательные уравнения – уравнения, в которых переменная входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.

Например,

$$4^{x-1} = 4,$$

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8},$$

$$0{,}5^{x+7} \cdot 0.5^{1-2x} = 2,$$

$$16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0.$$

Основные методы решения показательных уравнений

1.Метод уравнивания показателей.

2.Метод разложения на множители.

3. Метод введения новой переменной.

4. Функционально-графический (он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функции).

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}, где$ $a > 0, a \neq 1$

равносильно уравнению $f(x) = g(x),$

$$(\frac{1}{2})^{2x+1} = \frac{1}{8},$$

$$(\frac{1}{2})^{2x+1} = (\frac{1}{2})^{3},$$

$$2x + 1 = 3,$$

$$2x = 3 - 1,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$

Ответ:x=1.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Используя формулу

Решим уравнение

$$\left(\frac{16}{9}\right)^{x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{6},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{6},$$

$$-2x = 6,$$

$$x = 6:(-2),$$

$$x = -3.$$

Ответ: x=-3.

Продолжим

$$\left(\frac{16}{25}\right)^{x+3} = \left(\frac{125}{64}\right)^{2},$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+6} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-6},$$

$$2x + 6 = -6,$$

$$2x = -6 - 6,$$

$$2x = -12,$$

$$x = -6.$$

Ответ: x=-6.

Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{2,25x-2}=6.$$

1) $(-3;-2]$ 2) $(-2;0)$ 3) $[2;5)$ 4) $[0;2)$

Решение:

т.к. $\frac{1}{36}=6^{-2}$, то получаем

$$(6^{-2})^{2,25x-2}=6;$$

$$6^{4-4,5x}=6^{1};$$

$$4-4,5x=1;$$

$$-4,5x=1-4;$$

$$-4,5x=-3;$$

$$x=\frac{-3}{-4,5};$$

$$x=\frac{30}{45};$$

$$x=\frac{2}{3},\quad \frac{2}{3}\in[0;2)$$

Решите уравнение, используя свойство пропорции. В ответе укажите меньший корень.

$$\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}},$$

$$6^{x^2} \cdot 6^{8-5x} = 3^2 \cdot 2^2,$$

$$6^{x^2-5x+8} = 6^2,$$

$$x^2 - 5x + 8 = 2,$$

$$x^2 - 5x + 8 - 2 = 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

Ответ:2-меньший корень.

Метод разложения на множители.

Решите уравнение

$$2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3=9,$$

$$3^{x-1}(2\cdot 3^{2}-6-3^{1})=9,$$

$$3^{x-1}\cdot 9=9,$$

$$3^{x-1}=1,$$

$$3^{x-1}=3^{0},$$

$$x-1=0,$$

$$x=1.$$

Ответ: $x=1$.

Решите уравнения:

$$64 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0,$$

$$8^{2x}(64 + x) = 0,$$

$$т.к. 8^{2x} > 0, то$$

$$64 + x = 0,$$

$$x = -64.$$

Ответ: x=-64.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 30$$

Т.к. $0 < a < 1$, то вынесем за скобку степень с наибольшим показателем

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right) = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \cdot (1+5) = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \cdot 6 = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 5,$$

$$5^{-x} = 5,$$

$$-x = 1.$$

$$x = -1.$$

Ответ:x=-1

Найти корни показательного уравнения, указать их сумму.

$$162^x - 8\cdot 81^x = 3\cdot 2^x - 24,$$

$$2^x\cdot 81^x - 8\cdot 81^x = 3\cdot 2^x - 8\cdot 3,$$

$$81^x\cdot\left(2^x - 8\right) = 3\cdot\left(2^x - 8\right),$$

$$81^x\cdot\left(2^x - 8\right) - 3\cdot\left(2^x - 8\right) = 0,$$

$$\left(2^x - 8\right)\cdot\left(81^x - 3\right) = 0,$$

$2^x = 8$ или $81^x = 3,$

$x_1 = 3.$

$$3^{4x} = 3,$$

$$4x = 1,$$

$$x_2 = 0{,}25.$$

$$x_1 + x_2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25.$$

Ответ: 3,25.

Решите уравнение методом введения новой переменной

$2^{2x} + 2^x - 2 = 0;$

Пусть $2^x = t$,где $t > 0$,тогда $t^2 + t - 2 = 0$

По теореме, обратной теореме Виета, получаем:

значит, не удовлетворяет условию $t > 0$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -1 \\ t_1 \cdot t_2 = -2 \end{cases}$$

$t_1 = -2$

$t_2 = 1$

Если $t = 1$

$2^x = 1,$

$2^x = 2^0,$

$x = 0.$

Ответ:x=o.

Решите однородное уравнение

$$3\cdot 2^{2x}+6^{x}-2\cdot 3^{2x}=0,$$

$$3\cdot 2^{2x}+2^{x}\cdot 3^{x}-2\cdot 3^{2x}=0\Big|\ :(2^{x}\cdot 3^{x}),$$

$$3\cdot(\frac{2}{3})^{x}+1-2\cdot(\frac{3}{2})^{x}=0,$$

Пусть $t>0$ тогда $(\frac{2}{3})^{x}=t$

$$3t\ +1-2\frac{1}{t}=0\Big|\ \cdot t,$$

$$3t^{2}+t-2=0,$$

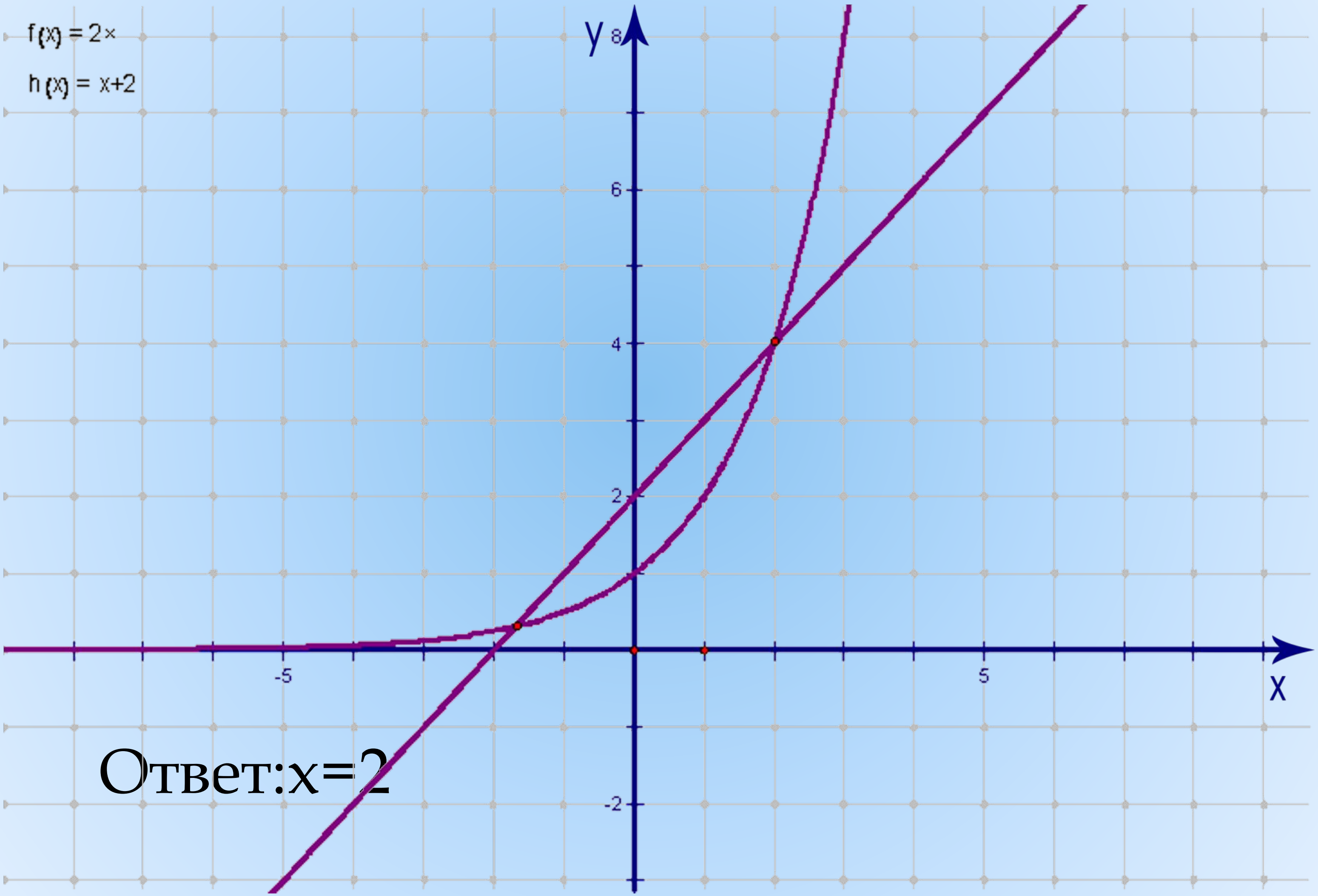
$t_1=-1,$ не удовлетворяет условию $t>0$

$$t_2=\frac{2}{3},$$

Если $t=\frac{2}{3}$, то $(\frac{2}{3})^{x}=\frac{2}{3}$; $x=1.$

Ответ: x=1.

Решите графически $2^x = x + 2$, в ответ запишите положительный корень:



Ответ:х=2

Уравнения, решаемые с помощью исследования функций, входящих в левую и правую части уравнения.

Решить уравнение $7^{6-x} = x + 2;$

Рассмотрим функции: $y = 7^{6-x}$ u $y = x + 2$

Функция $y = 7^{6-x}$ - показательная, монотонно убывающая на R.

Функция $y = x + 2$ -линейная,
монотонно возрастающая на R. Следовательно, графики данных функций могут пересекаться не более 1 раза. Значит, уравнение не может иметь более одного корня, который может быть найдет подбором:
x=5.

Ответ: x=5.

Решим уравнение $5^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 13^{\sqrt{x}}$

Решение:
разделим левую и правую часть уравнения на $13^{\sqrt{x}}$,

так как $13^{\sqrt{x}} \neq 0$, получаем $\left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}} = 1.$

Рассмотрим функцию $y = \left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}}$,данная функция

монотонно убывает на множестве неотрицательных чисел, т.к. является суммой двух убывающих показательных функций при $x \geq 0.$
Следовательно, данная функция принимает каждое свое значение не более 1 раза, поэтому исходное уравнение имеет не более 1 корня, который можно найти подбором.

Зная, что $5^2 + 12^2 = 13^2$, получаем $\sqrt{x} = 2, x = 4.$

Ответ: $x = 4.$

Показательно-степенные уравнения вида

$$(a(x))^{b(x)} = (a(x))^{c(x)}$$

Данное уравнение эквивалентно уравнению $a(x) = 1$ и системе:

$$\begin{cases} в(x) = c(x), \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Отдельно рассматривается случай $a(x) = 0$ при условиях

$$в(x) > 0, c(x) > 0.$$

Решите уравнение $(x-2)^{x^2-5x} = (x-2)^{4-2x}$.

Решение: 1) $x - 2 = 1, x = 3.$

2) $\begin{cases} x^2 - 5x = 4 - 2x, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = -1, x_2 = 4, \\ x > 0. \end{cases}$ *значит* $x = 4.$

3) $x - 2 = 0$ при $x = 2.$

При подстановке получаем при x=2 равенство не имеет смысла.

Ответ: 3;4.

Решить показательное уравнение с параметром

Решить уравнение $2^{(a^2+10a+21)x} = 2^{2a^2+a-15}.$

$$(a^2+10a+21)x = 2a^2+a-15,$$

Разложим на множители квадратные трехчлены и получим:

$$(a+3)(a+7)x = (2a+5)(a+3)$$

1. Если $a=-3,$ то $0 \cdot x = 0, x \in R$

2. Если $a=-7,$ то $0 \cdot x = 36,$ решений нет.

3. Если $a \neq -3, a \neq -7,$ то $x = \dfrac{2a+5}{a+7},$ один корень.

Ответ: 1. При $a=-3,$ $x \in R.$

2. При $a=-7,$ нет решений.

3. При $a \neq -3, a \neq -7,$ $x = \dfrac{2a+5}{a+7},$