Перпендикулярность прямой и плоскости

Перпендикулярность прямой и плоскости

Опр. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

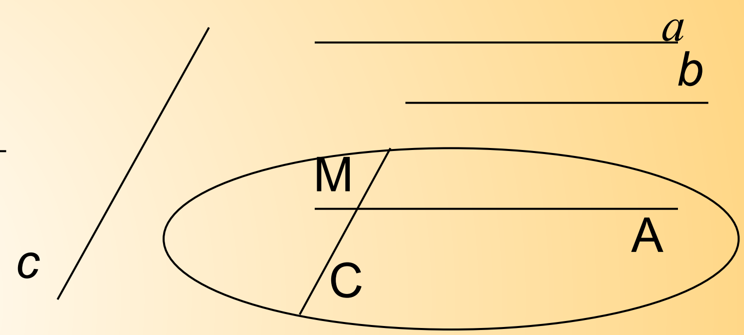
$$\left(a\hat{;}b\right)=90^0$$

$$a\perp b$$

$$a\cap b=O \qquad a\dot{-}b$$

Лемма Если одна из 2-х параллельных прямых, перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

$$\frac{\begin{array}{c}a\parallel b\\ a\perp c\end{array}}{b\perp c}$$



Доказательство

$$1. M, M\notin a, M\notin b, M\notin c$$

$$2. MA\parallel a, MC\parallel c$$

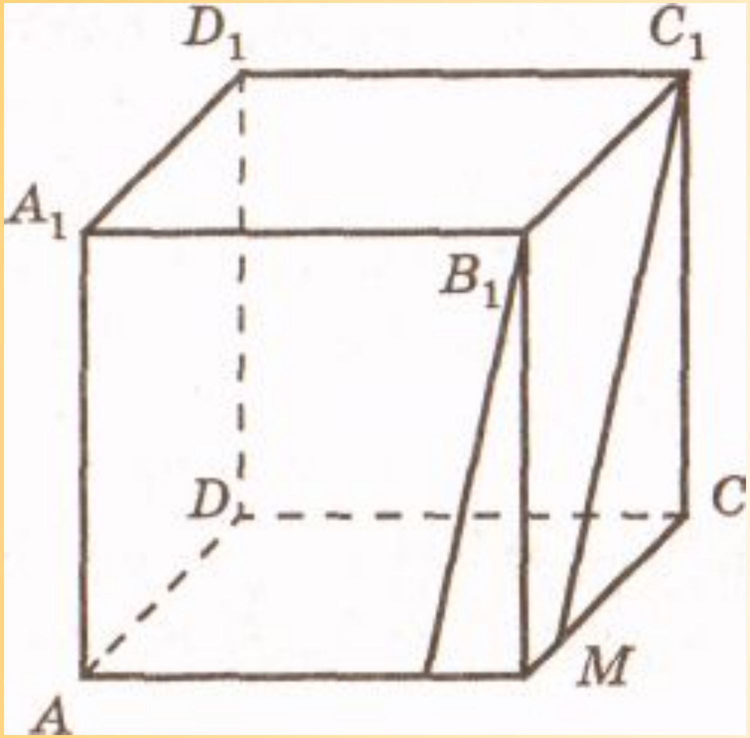
$$a\perp c\Rightarrow\angle AMC=90^0$$

$$3. a\parallel MA$$

Задача №1

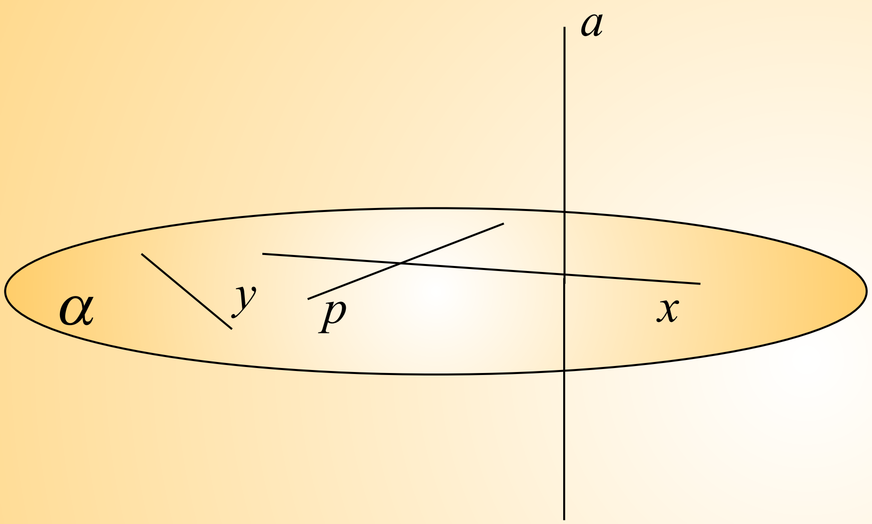
Дано: $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – параллелепипед, $\angle ДАВ=90^0$, $\angle АА_1В_1=90^0$, $\angle А_1Д_1Д=90^0$

Доказать:
1) $AA_1 \perp BC$;
2) $AB \perp BC$;
3) $СД \perp А_1Д_1$;
4) $BC \perp ДД_1$.



Прямая перпендикулярная плоскости

Опр. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна к ***любой*** прямой, лежащей в этой плоскости.

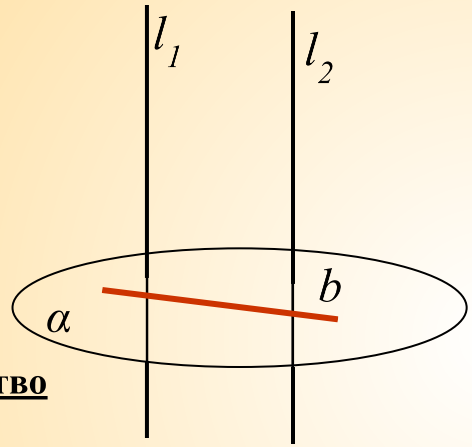


Утверждение: Если прямая перпендикулярна плоскости, то она её пересекает.

Теоремы о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью плоскости.

Th 14 Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая, перпендикулярна этой плоскости.

$$\frac{l_1 \parallel l_2 \qquad l_1 \perp \alpha}{l_2 \perp \alpha}$$

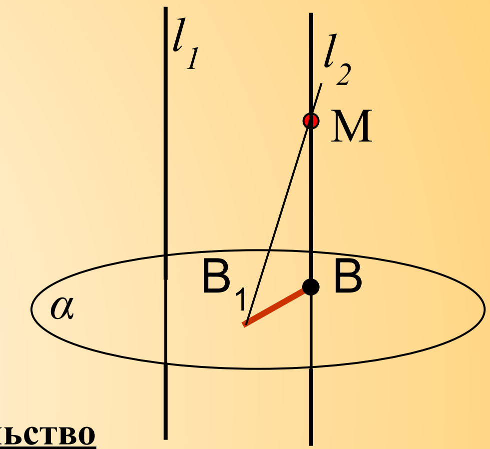


<u>**Доказательство**</u>

$$l_1 \perp \alpha \Rightarrow \left.\begin{matrix} l_1 \perp b \\ l_1 \parallel l_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow l_2 \perp b \Rightarrow l_2 \perp \alpha$$

Th 15 Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

$$\frac{l_1 \perp \alpha_2 \qquad l_2 \perp \alpha}{l_1 \parallel l_2}$$



<u>**Доказательство**</u>

$1. M \in l_2$

$2. MB_1 \parallel l_1 \Rightarrow MB_1 \perp \alpha$

$3. MB_1 \perp BB_1$

$MB \perp BB_1$ (следует из определения)

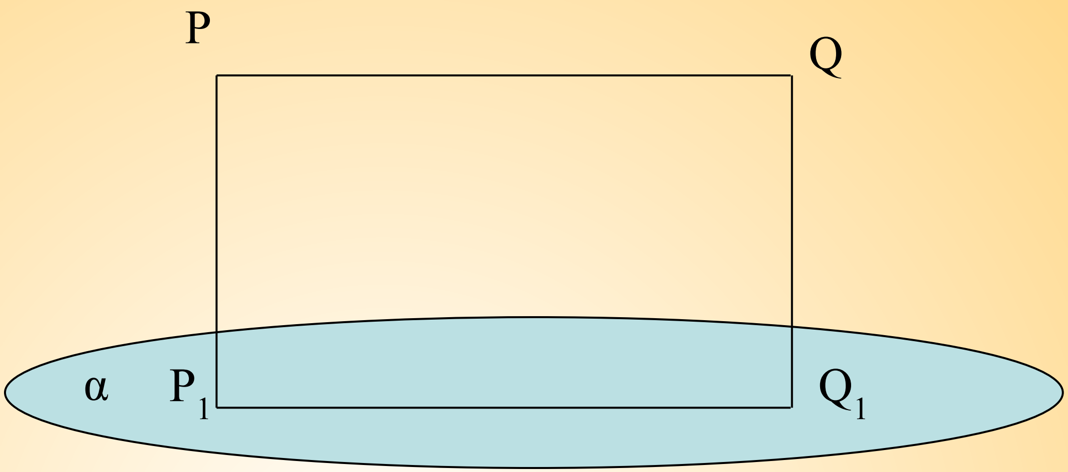
Задача №2

$$PQ \parallel \alpha$$

$$PP_1 \perp \alpha$$

$$QQ_1 \perp \alpha$$

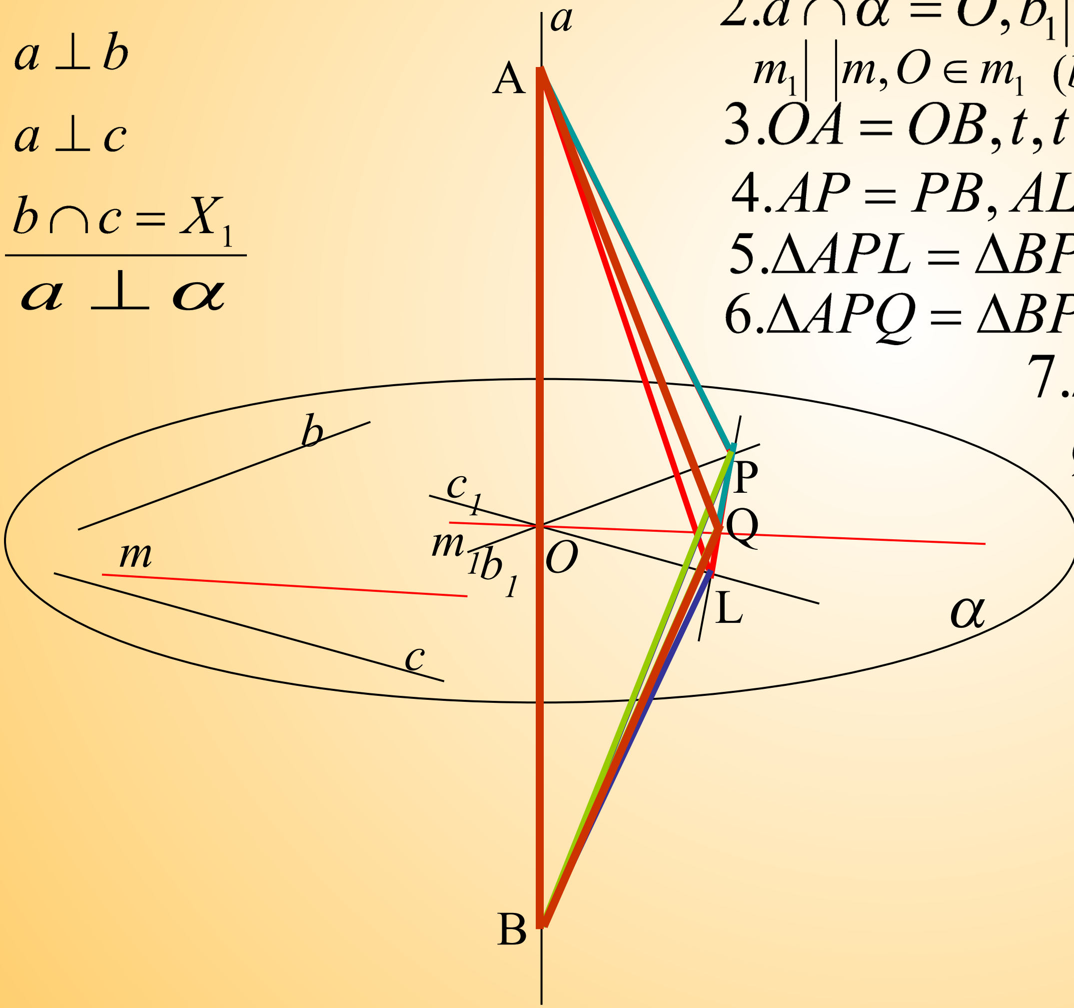
$$PQ = P_1Q_1$$



Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Th 13 Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

$$\frac{b \subset \alpha \quad c \subset \alpha \quad a \perp b \quad a \perp c \quad b \cap c = X_1}{a \perp \alpha}$$



Доказательство

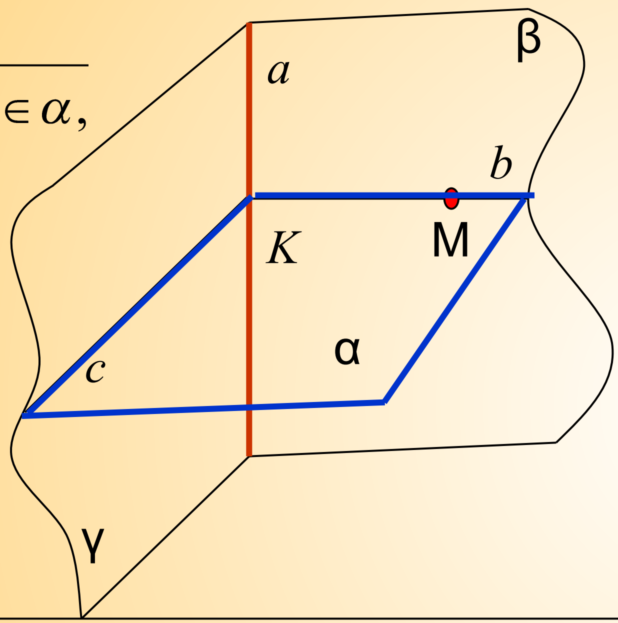
1. m – произвольно, $m \subset \alpha$
2. $a \cap \alpha = O, b_1 \| b, c_1 \| c, O \in b_1, O \in c_1$
   $m_1 \| m, O \in m_1$ $(b_1 \| b, b \perp a \Rightarrow b_1 \perp a)$
3. $OA = OB, t, t \cap b_1 = P, t \cap c_1 = L, t \cap m_1 = Q$
4. $AP = PB, AL = LB$
5. $\Delta APL = \Delta BPL \Rightarrow \angle APL = \angle BPL$
6. $\Delta APQ = \Delta BPQ \Rightarrow AQ = BQ$
7. ΔAQB – равнобедренный
   QO – медиана $\Rightarrow QO$ – высота
   $m_1 \perp a$
8. $\left. \begin{array}{l} m_1 \| m \\ m_1 \perp a \end{array} \right| \Rightarrow m \perp a \xrightarrow{o} a \perp \alpha$

Построения

I. Через любую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную данной прямой и притом только одну.

Построение

$$\frac{a, M}{\exists! \alpha, M \in \alpha, \quad a \perp \alpha}$$



$I. M \notin a$

$1. \beta : M \in \beta, a \subset \beta$

$b \perp a, M \in b, b \cap a = K$

$2. \gamma : a \subset \gamma, \gamma \neq \beta$

$c \perp a, K \in c$

$3. \alpha : b \subset \alpha, c \subset \alpha, b \cap c = K$

$4. a \perp \alpha (по\_признаку)$

Единственность

$5. \exists \delta, a \subset \delta, M \in \delta, \quad \Rightarrow \delta \cap \beta = b_1$

$\delta \perp a$

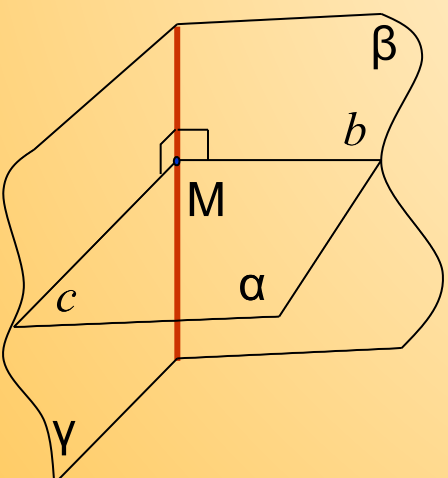
(т.к. М –их общая точка)

$b_1 \perp a (a \perp \delta, b_1 \subset \delta)$

$6. в\_плоскости\_\beta\_через\_$

$точку\_M\_b_1 \perp a, b \perp a,$

$что\_невозможно.$



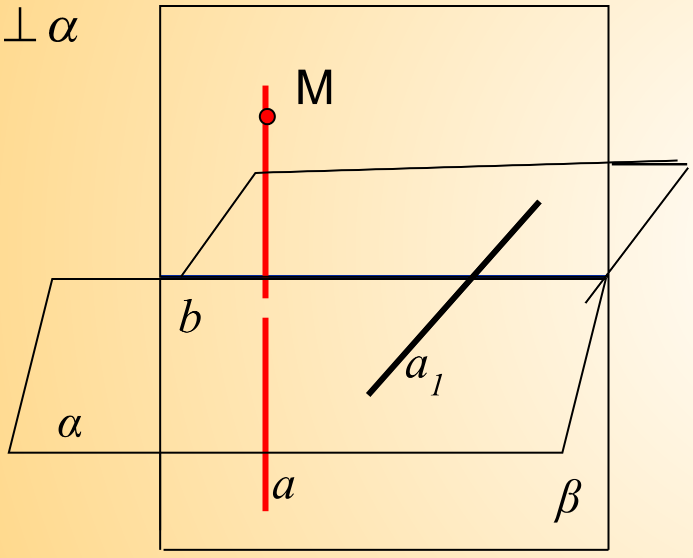
$II. M \in a$

Построения

II. Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости и притом только одну.

$$\frac{\alpha, M}{\exists! a, M \in a,}$$

$a \perp \alpha$



Построение

$$I.M \notin a$$

$1.a_1, a_1 \subset \alpha$

$2.\beta, M \in \beta, \beta \perp a_1$

$3.\beta \cap \alpha = b$

$4.a, M \in a, a \subset \beta, a \perp b$

$5.a \perp \alpha \text{ (по признаку)}$

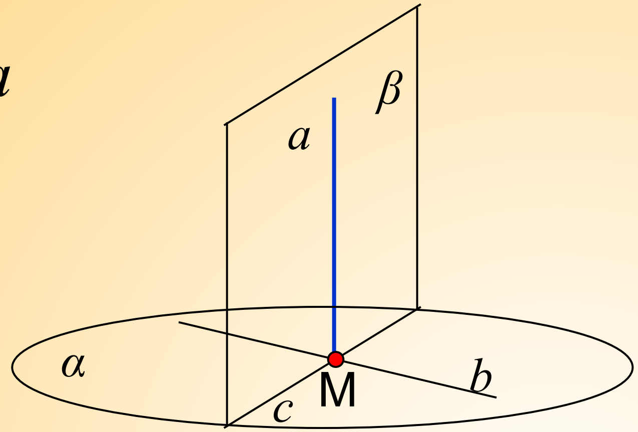
Единственность

$6.\exists c, c \perp \alpha, M \in c$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 7.c \perp \alpha \\ \ \ a \perp \alpha \end{array}\right| \Rightarrow a \| c \\ a \cap c = M \end{array}\right| \Rightarrow a = c$$

Построения

$II. M \in a$



<u>Построение</u>

$1. b, b \subset \alpha, M \in b$

$2. \beta : M \in \beta, \beta \perp b$

$(по\_задаче\_№1)$

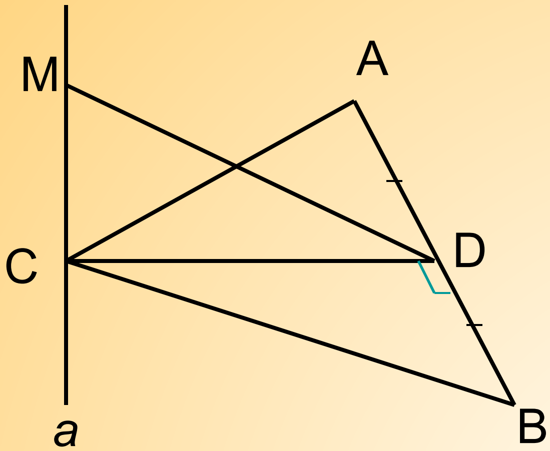
$\beta \cap \alpha = c, c \perp b$

$3. a, a \subset \beta, M \in a, a \perp c$

$4. a - искомая$

<u>Единственность</u>

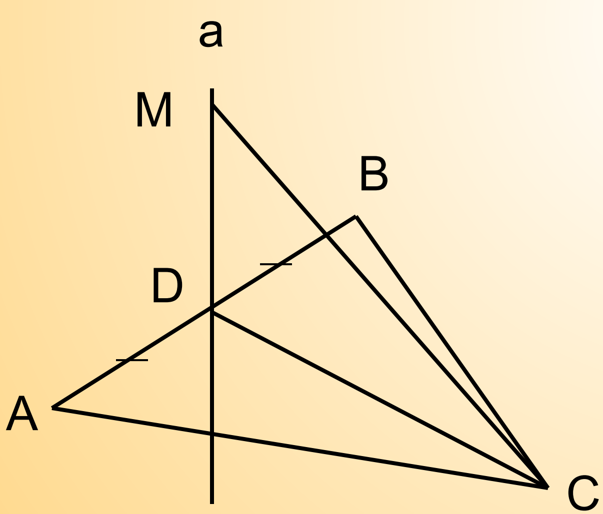
1.



Прямая а перпендикулярна плоскости ABC, ∠ACB= 90º, AC= 4, MD = 3. Найти MC.

Ответ: MC = 3

2.



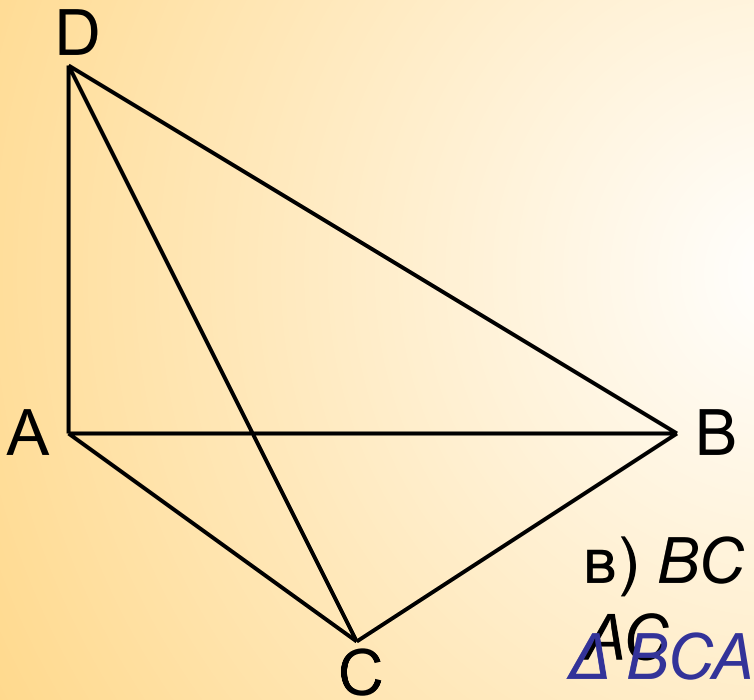
Прямая а перпендикулярна плоскости ABC, ΔABC – равносторонний, AB =2√3, MD = 4. Найти MC.

Ответ: MC = 5

№ 1

В тетраэдре DABC AD⊥AC, AD⊥AB, DC⊥CB.а) Докажите, что AD⊥BC; б) Докажите, что прямая BC ⊥ плоскости ADC; в) Найдите площадь Δ BCA, если BC= 4, AC = 3.

<u>*Решение:*</u>



а) *AD⊥AC, AD⊥AB→ AD⊥ ABC, BC⊂ ABC→ AD⊥BC*

б) *DC⊥CB, AD⊥BC → BC⊥ADC*

в) *BC⊥ADC , AC ⊂ ADC → BC⊥ AC*

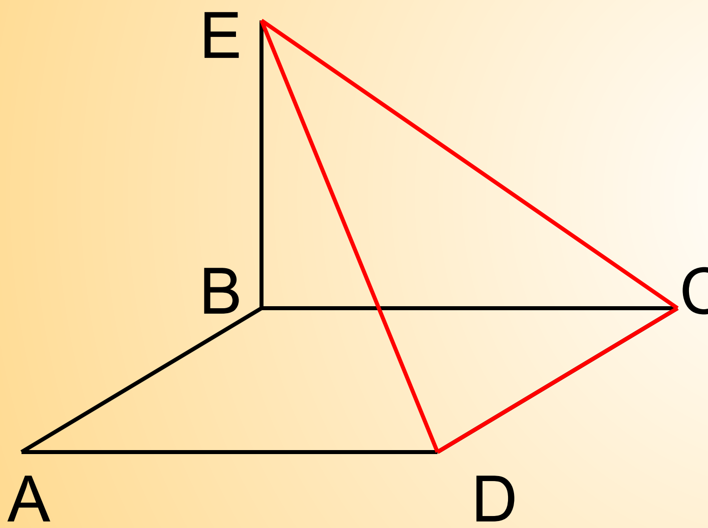
Δ BCA - прямоугольный

$$S=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$$

№ 2

Точка E не принадлежит плоскости прямоугольника ABCD, BE ⊥AB, BE⊥BC. а)Докажите, что BE⊥CD; б) Докажите, что прямая CD ⊥BCE; в)Найдите площадь Δ ECD, если CD =6, CE = 8.

Решение



а) BE ⊥AB, BE⊥BC→BE⊥ ABC, CD⊂ ABC→ BE⊥CD

б)ABCD -прямоугольник →

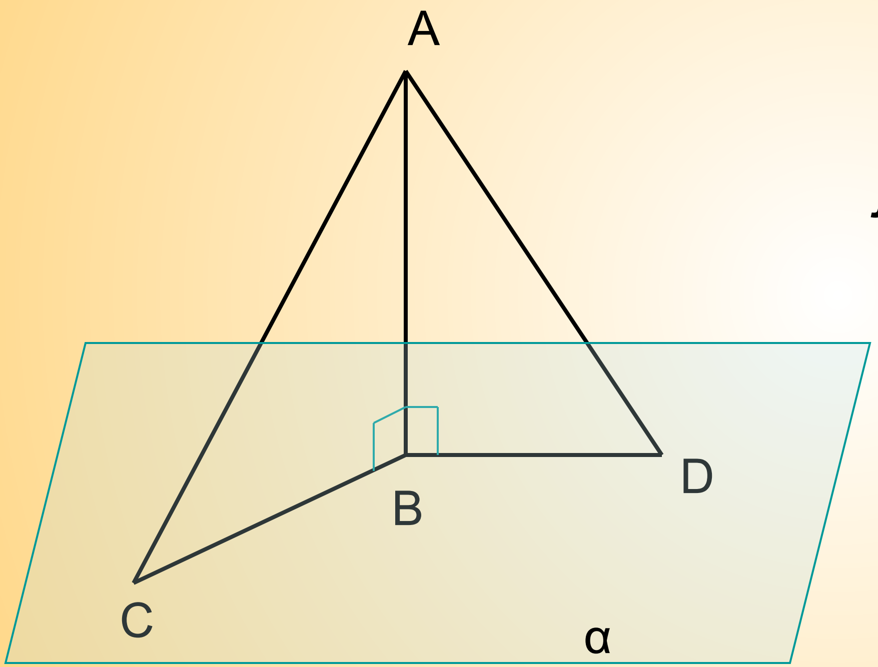
$$\left.\begin{array}{l} CD \perp BC \\ CD \perp BE \end{array}\right\} CD \perp BCE$$

в) CD ⊥BCE→ CD ⊥CE→ΔECD - прямоугольный

$$S = \frac{CD \cdot CE}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

№3

Через катеты BD и BC прямоугольных треугольников ABD и ABC проведена плоскость α, не содержащая их общий катет. Будет ли AB ⊥α?



Решение

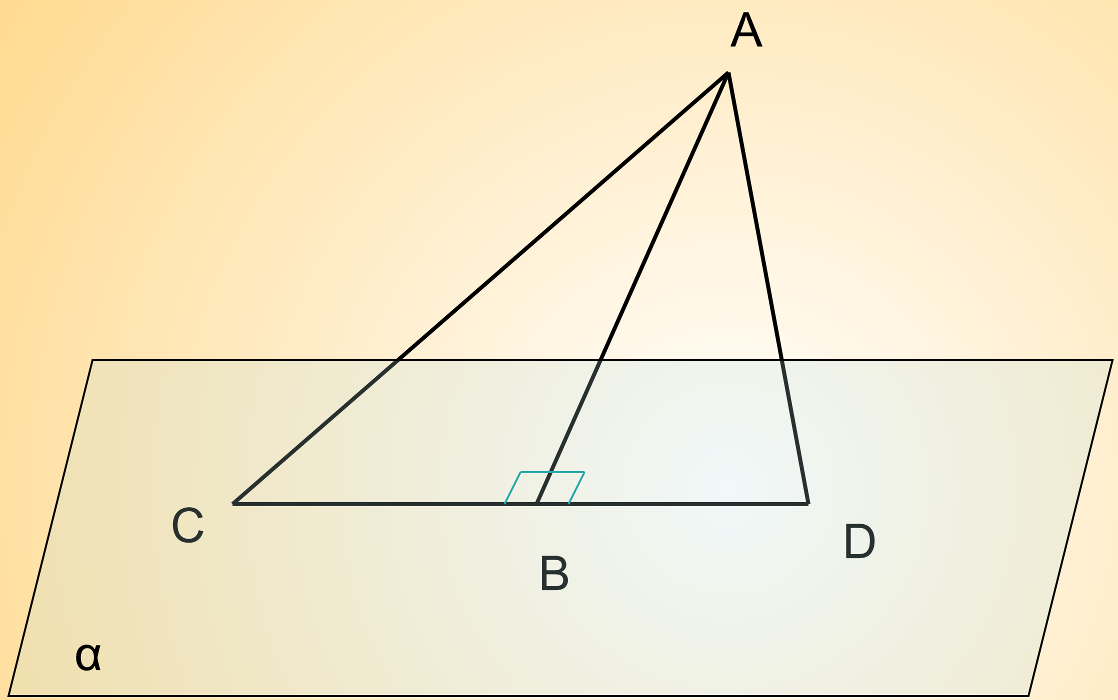
1) Точки B,C, D – не лежат на одной прямой

ΔABC- прямоугольный, AB и BC – катеты → AB⊥BC

ΔABD – прямоугольный, AB и BD катеты → AB⊥BD

Плоскость α совпадает с плоскостью BCD→ AB⊥α

2) *Точки B, C и D лежат на одной прямой*



Прямая AB может быть не перпендикулярна плоскости α

Задача №1

ΔABC – равносторонний

ΔAB_1C_1

$BB_1 \perp AB_1C_1$

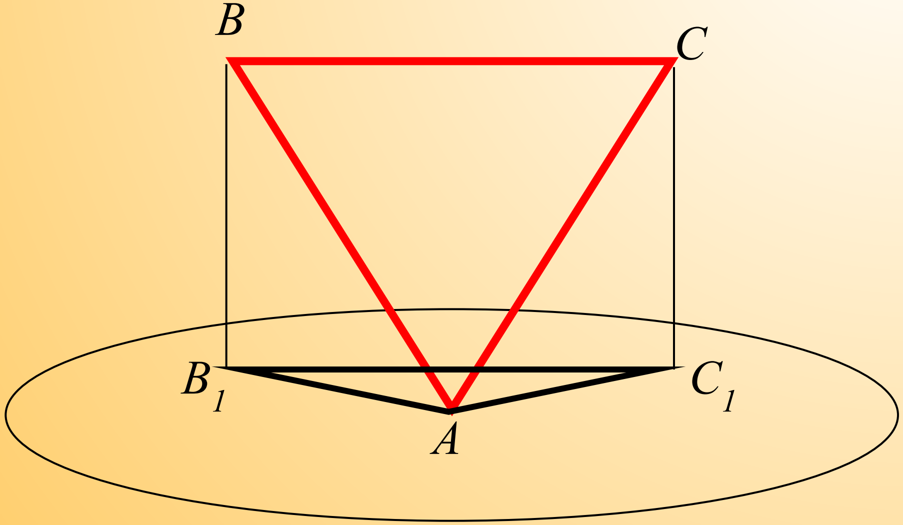
$CC_1 \perp AB_1C_1$

$B_1C_1 \subset \alpha$

$BB_1 = CC_1$

$\angle BAB_1 = 30^0$

$B_1C_1 - ?$



Задача №2

$ABCД$ – квадрат

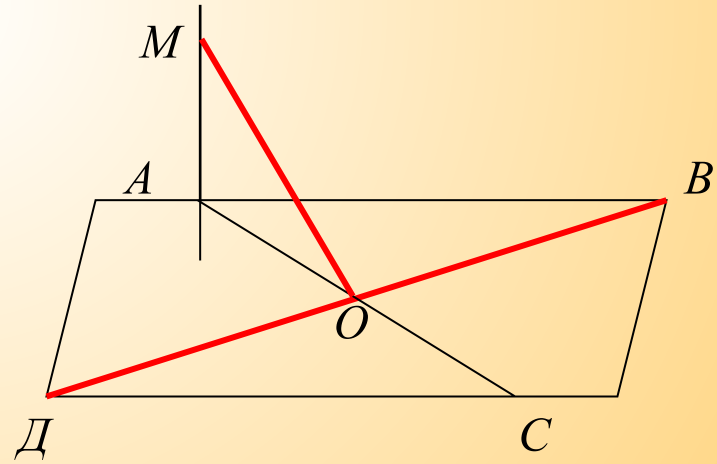
$AC \cap BД = O$

$AM \perp ABC$

---

1) $BД \perp AMO$

2) $MO \perp BД$



Домашнее задание **Глава 2. §1стр. теорию учить, №116, 123**