Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую, кроме упругой силы (**$-kx$**) и сил сопротивления (**$-r\cdot v$**), действует добавочная *периодическая сила F* – ***вынуждающая сила***.

Для колебаний вдоль оси *x* запишем:

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x \tag{7.1}$$

– ***основное уравнение колебательного процесса***, или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_x \tag{7.2}$$

где $f_x = F_x/m$ – вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону: $f_x = F_0\cos\omega t$.

Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы ω. Уравнение установившихся вынужденных колебаний:

$$X = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{7.3}$$

Задача: найти амплитуду ***A*** и разность фаз $\boldsymbol{\varphi}$ между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Воспользуемся тем, что скорость на $\pi/2$ опережает смещение, а ускорение на $\pi/2$ опережает скорость:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi),$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2).$$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi - \pi/2).$$

Подставим эти уравнения в уравнение (7.2)

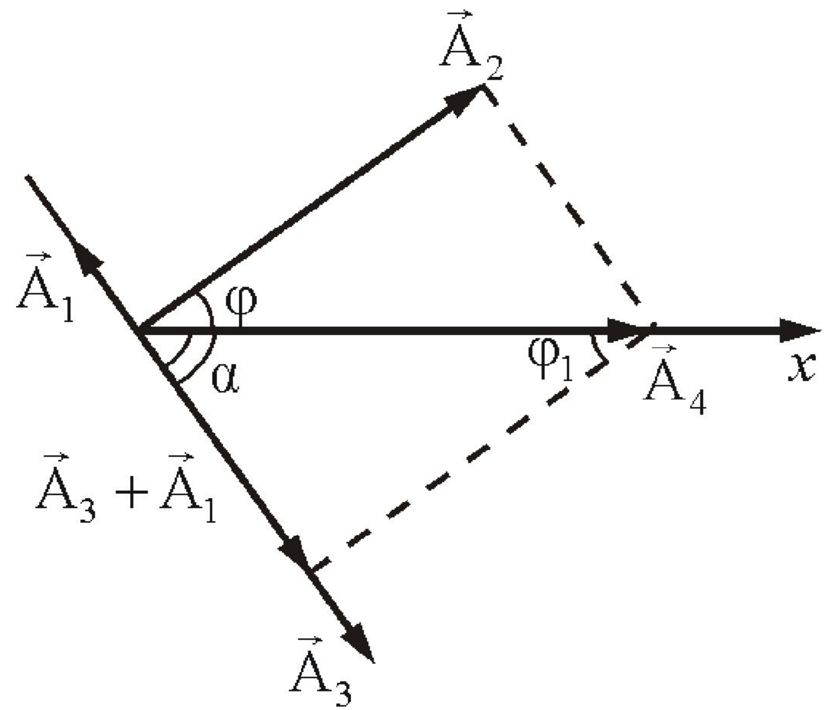
$$\omega^2 A\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega A\cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

$$\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega\cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA}\cos\omega t$$

Каждое слагаемое этого уравнения можно представить в виде соответствующего вращающегося вектора амплитуды:

$A_1 = \omega^2$ – *амплитуда ускорения*; $A_2 = 2\beta\omega$ – *амплитуда скорости*; $A_3 = \omega_0{}^2$ – *амплитуда смещения*; $A_4 = F_0/mA$ – *амплитуда вынуждающей силы*, причем $A_3 > A_1$.

Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов: $\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$



Из рисунка видно, что

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$$

Тогда

$$A = \frac{F_0}{mA_4} = \frac{F_0}{m\sqrt{(A_3 - A_1)^2 + A_2^2}},$$

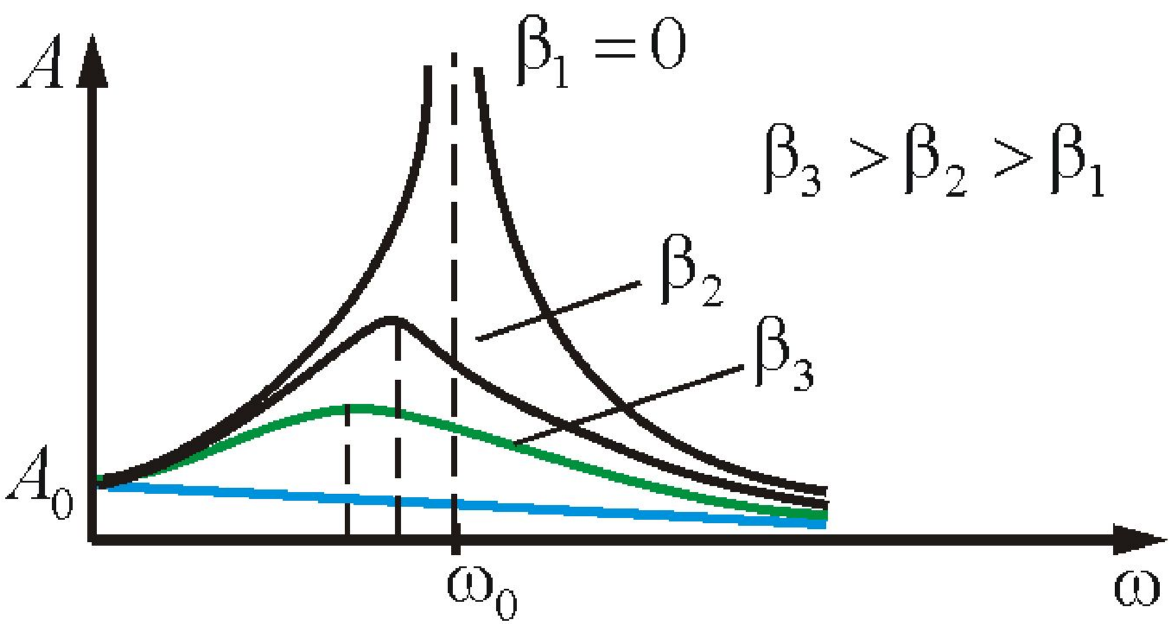
$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Таким образом, $A \sim F_0/m$ и $\sim 1/\beta$.

При постоянных F_0, m и β амплитуда зависит только от соотношения круговых частот вынуждающей силы ω и свободных незатухающих колебаний системы ω_0.

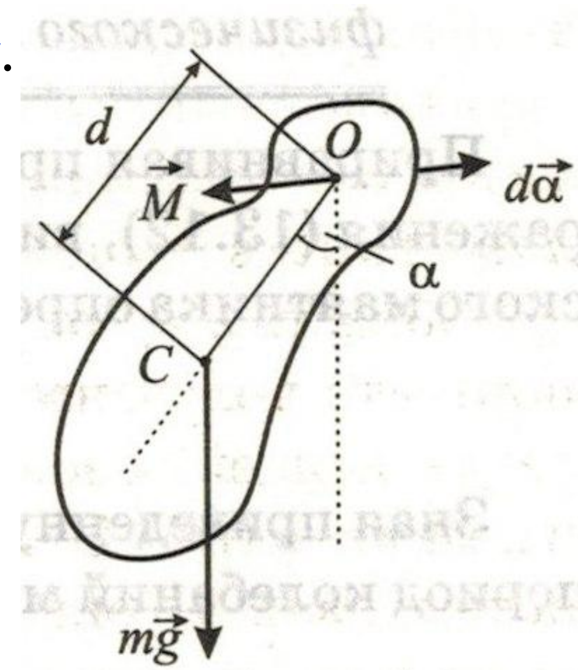
Начальную фазу вынужденных колебаний можно найти из выражения:

$$tg\varphi = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}.$$



г) физический маятник

Физический маятник – твердое тело, которое может совершать колебания под действием собственной силы тяжести ***mg*** вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела и называемой осью качания. Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс. Как правило, силой трения в подвесе маятника пренебрегают и момент относительно оси качания маятника создает только его сила тяжести ***mg***.



При отклонении маятника на угол α момент, создаваемый силой тяжести равен:

$$M = mgd\, sin\alpha\ .$$

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения (для тела с моментом инерции *I*, вращающегося вокруг неподвижной оси в отсутствие трения):

$$M = J \cdot \varepsilon = J \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -mgd \cdot \sin\alpha .$$

При малых α $\rightarrow$ sinα ≈ α $\rightarrow$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{mgd}{J} \cdot \alpha = 0$$

Сравнивая с уравнением свободных незатухающих гармонических колебаний: $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$, имеем для физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

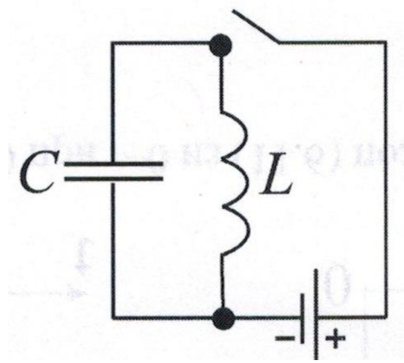
Предельным случаем физического маятника является математический маятник - материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Вся масса сосредоточена в центре масс тела. При этом ***d=l*** – длина маятника и момент инерции $\boldsymbol{J = ml^2}$. Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний, что и данный физический маятник, называется ***приведенной длиной физического маятника.*** Точка O_1, находящаяся на расстоянии $l_{пр}$ от точки подвеса O маятника, называется **центром качания** физического маятника. Точки O и O_1 обладают свойством взаимности, т.е. при перемене их ролей длина и период маятника останутся прежними.

Свободные гармонические колебания в электрическом колебательном контуре

Простейшим колебательным контуром является замкнутая цепь, состоящая из емкости *C* и катушки индуктивности *L*.



По закону Ома для замкнутой цепи: *сумма падений напряжений на проводниках сопротивлением R и на конденсаторе U_c равна ЭДС самоиндукции в контуре*

$$IR + U_c = IR + Q/C = \varepsilon_{si} = -L(dI/dt).$$

$$I = dQ/dt \rightarrow dI/dt = d^2Q/dt^2,$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = 0 \qquad (R\rightarrow 0) \rightarrow d^2Q/dt^2 + \omega^2 Q = 0$$

$$\omega = {}^{1}\!\!\Big/\!\sqrt{LC}, \qquad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}.$$

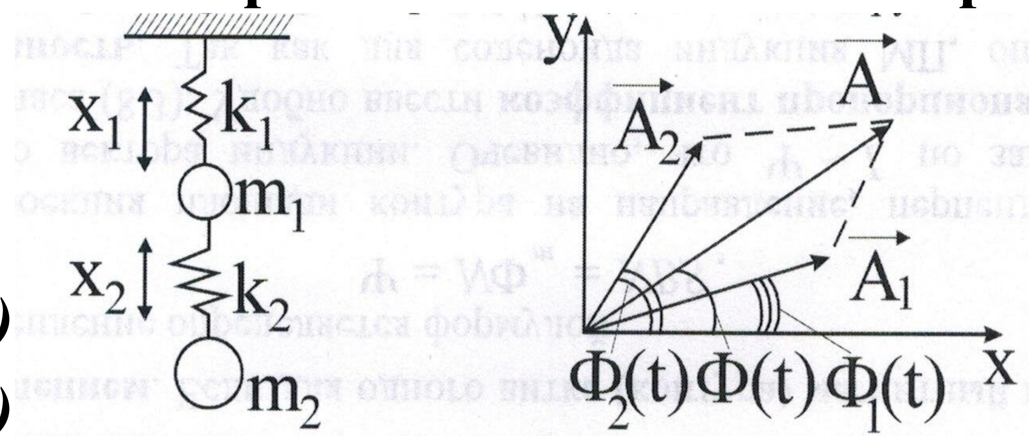
$$Q = Q_m \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ и } I = dQ/dt = \omega Q_m \cos(\omega t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$W = W_{эл} + W_{магн} = (1/2)\cdot(LI^2 + CU^2)$$

Сложение гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу

Сложение колебаний – нахождение значения результирующих колебаний системы при ее участии в нескольких колебательных процессах. Различают сложение **сонаправленных** и **взаимноперпендикулярных** колебаний.

Используем метод векторных диаграмм.



$$x_1 = A_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 sin\Phi_1(t)$$

$$x_2 = A_2 sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 sin\Phi_2(t)$$

Результирующее колебание: $x = x_1 + x_2 = A sin\Phi(t)$, где амплитуда

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$tg\hat{O}(t) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1 \sin \hat{O}_1(t) + A_2 \sin \hat{O}_2(t)}{A_1 \cos \hat{O}_1(t) + A_2 \cos \hat{O}_2(t)}.$$

Когерентными называются колебания, разность фаз которых во времени постоянна; т.к. $\Phi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\phi_2 - \phi_1) = const$, то это выполняется при $\omega_2 = \omega_1 = \omega$, тогда $x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega t + \phi_0)$, где амплитуда A и фаза Φ результирующего колебания. Тогда в зависимости от значения $(\phi_2 - \phi_1)$ результирующая амплитуда A изменяется в пределах от $A = |A_1 - A_2|$ при $\phi_2 - \phi_1 = \pm(2m + 1)\pi$, до $A = |A_1 + A_2|$ при $\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m$ ($m \rightarrow$ целые числа).

При $\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m$ колебания называются ***синфазными*** (в одной фазе), а при $\phi_2 - \phi_1 = \pm(2m + 1)\pi$ – ***противофазными***.

При $\omega_1 \neq \omega_2$ результирующий вектор A будет изменяться по длине и вращаться с переменной скоростью. При сложении колебаний с близкими частотами $(\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| << \omega)$ возникают, так называемые, ***биения***, тогда $x_1 = x_m \cos\omega t$, $x_2 = x_m \cos(\omega t + \Delta\omega t)$.

$$x(t) = x_1 + x_2 = 2x_m \cos\frac{\omega t + \omega t + \Delta\omega t}{2}\cos\frac{\omega t - \omega t - \Delta\omega t}{2} =$$

$$= 2x_m \cos\omega t \cos\frac{\Delta\omega t}{2} = \bar{x}_m \cos\omega t$$

[2ωt >>Δω; cos(-Δωt)=cos(Δωt)]

$$\bar{x}_m = 2x_m \left|\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right| \qquad\qquad x(t) = \bar{x}_m \cos\omega t$$

Косинус берется по модулю, так как функция четная и поэтому частота биений $\omega_б = \Delta\omega$, а не $\Delta\omega/2$.

Период биений равен половине периода модуляции:

$T_б = T_{мод}/2 = 2\pi/(\Delta\omega)$