МАТЕМАТИКА

ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ естественных наук
при Саратовском государственном аграрном университете им. Н.И. Вавилова

Уравнения:

равносильные уравнения, уравнения следствия уравнения, содержащие знак модуля

Лекцию подготовили: Спицына Татьяна, Суворова Ольга

Руководитель: Калугина Екатерина Евгеньевна

Л Е К Ц И Я № 3

<u>Литература</u> В помощь учащимся лицея – интерната при СГАУ им. Н. И. Вавилова « Сборник задач по математике Часть *I*»

Уравнения:
равносильные уравнения, уравнения следствия, уравнения, содержащие знак модуля.

План

- Равносильные уравнения
- Уравнения следствия
- Определение модуля действительного числа
- Алгоритмы решения уравнений, содержащих знак модуля:

$$|\mathbf{f(x)}| = \mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathbf{R}$$

Определение

Выражение, состоящее из чисел, переменных , знаков арифметических и алгебраических операций, скобок, знака равенства, называется уравнением

$$2x + 3 = -5$$

$$\sqrt{x+4} = 3$$

$$\log_2(3x - 4) = 2$$

$$-x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$2^{2x} + 2^x - 6 = 0$$

$$\frac{2}{1-x} + \frac{3}{1-x^2} = \frac{5}{1+x}$$

$$\sin 2x + \cos x = 0$$

Определ

Корнем уравнения называется такое значение переменной, при подстановке которого в уравнение оно обращается в истинное равенство.

Решить уравнение это значит найти все его корни или доказать что таковых нет.

Приме р1 $2x + 3 = -5$

Решен ие

$$2x + 3 = -5,$$
$$2x = -8,$$
$$x = -4.$$

Ответ: - 4.

Приме р2 $-x^2 + 3x - 4 = 0$

Решен ие

$$-x^2 + 3x - 4 = 0,$$
$$x^2 - 3x + 4 = 0,$$
$$D = b^2 - 4ac;$$
$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = 9 - 16 = -7;$$
$$D < 0$$

Ответ: уравнение корней не имеет.

Определение

Уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают или они не имеют решений.

Пример

1 уравнение $x^2 + 2x + 5 = 0.$

2 уравнение $2x^2 + 1 = 0.$

Корни *1* уравнения: нет.

Корни *2* уравнения: нет.

Уравнения равносильны, так они решений не имеют.

Определе

Пусть даны *2* уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = q(x)$.

Если любой корень *1* уравнения является корнем *2* уравнения, то *2* уравнение называют уравнением

Пример

1 уравнение $x^2 = 1.$

2 уравнение $\sqrt{x} = 1.$

Корни *1* уравнения: $x = \pm 1.$

Корни *2* уравнения: $x = 1.$

2 уравнение является уравнением следствием *1* уравнения.

Задание №1.

Среди предложенных уравнений выберите:

а) пару равносильных уравнений;

б) уравнение и уравнение следствие.

$2x^2 + 3 = 0$	$4x - 5 = 11$	$3x^2 + 5x + 7 = 0$	$x^2 - x - 12 = 0$

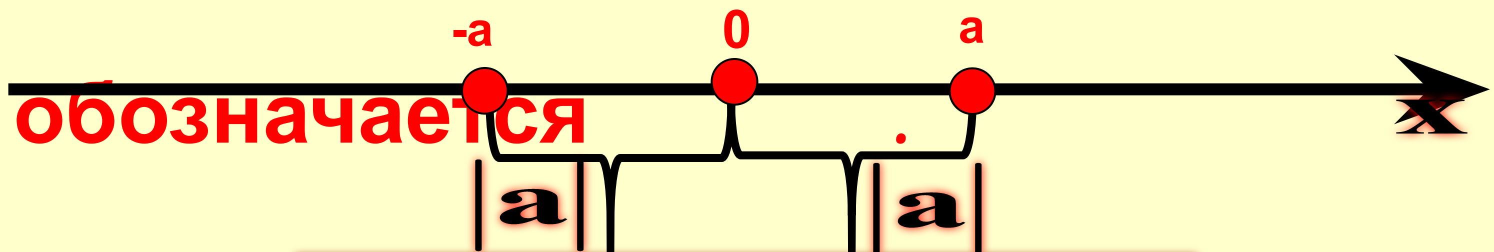
Равносильные уравнения	$2x^2 + 3 = 0$	$3x^2 + 5x + 7 = 0$
Уравнение и уравнение следствие	$4x - 5 = 11$	$x^2 - x - 12 = 0$

Определ

Абсолютной величиной числа a (модулем действительного числа a) называется расстояние от точки, изображающей данное число на координатной прямой, до начала отсчёта

$|a|$

и обозначается



$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля

1	$\lvert a\rvert \geq 0$	6	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
2	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	7	$\lvert a+b\rvert = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert,\ ab \geq 0$
3	$\lvert a\rvert \geq a$	8	$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert = a+b,\ a \geq 0 \text{ и } b \geq 0$
4	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \lvert b\rvert$	9	$\lvert a-b\rvert = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert,\ ab \leq 0$
5	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert},\ b \neq 0$	10	$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \geq 0,\ a^2 - b^2 \geq 0$

Определение

Уравнения, содержащие знак модуля, называются уравнениями, содержащими знак модуля.

$|x-5|=4$

$|x^2-5x+4|=10$

$|x-2|=6x+1$

$x^2-2|x|-3=0$

$x|5-2x|+1=2x-7$

$\frac{|x-2|}{x+4}+25=3$

Алгоритм решения уравнения $|f(x)| = a, a \in R$

Если $a < 0$	$\lvert f(x)\rvert = a$	Уравнение корней не имеет	
Если $a = 0$	$\lvert f(x)\rvert = 0$	$f(x) = 0$	
Если $a > 0$	$\lvert f(x)\rvert = a$	*I* способ	*II* способ
		$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0; \\ f(x) = a; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0; \\ f(x) = -a. \end{cases} \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

Пример 1

$$2|x| - 3 = 0$$

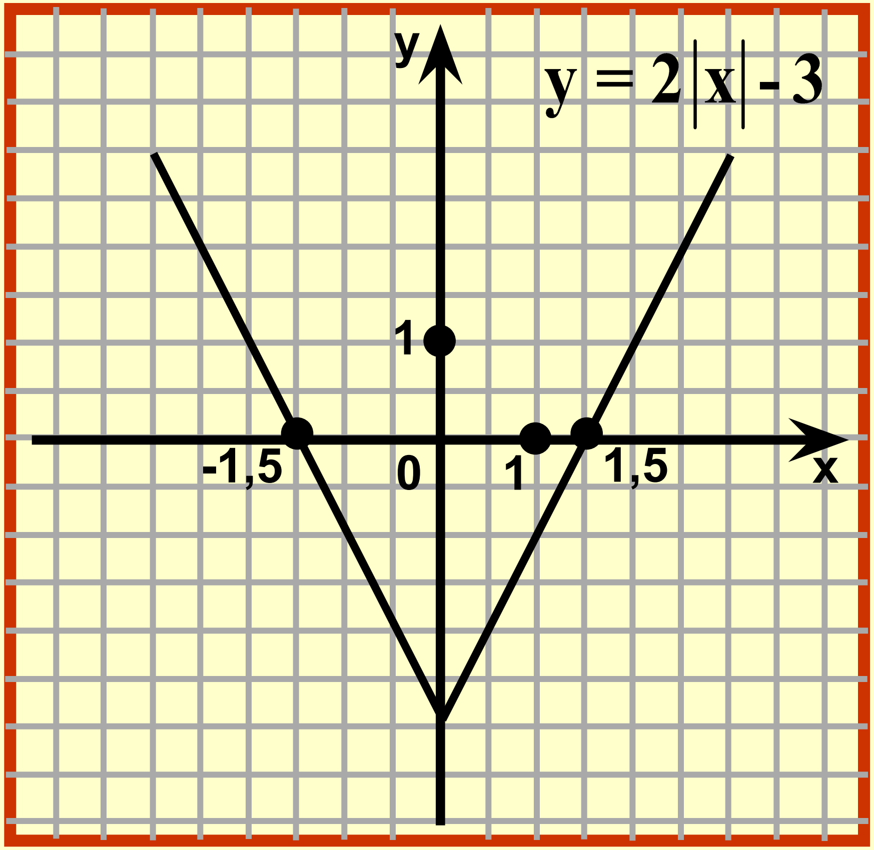
Решение

$$2|x| - 3 = 0,$$

$$2|x| = 3,$$

$$|x| = 1{,}5,$$

$$x = \pm 1{,}5.$$



Ответ: $\pm 1{,}5.$

Пример 2

$$3|x-1|-5=1$$

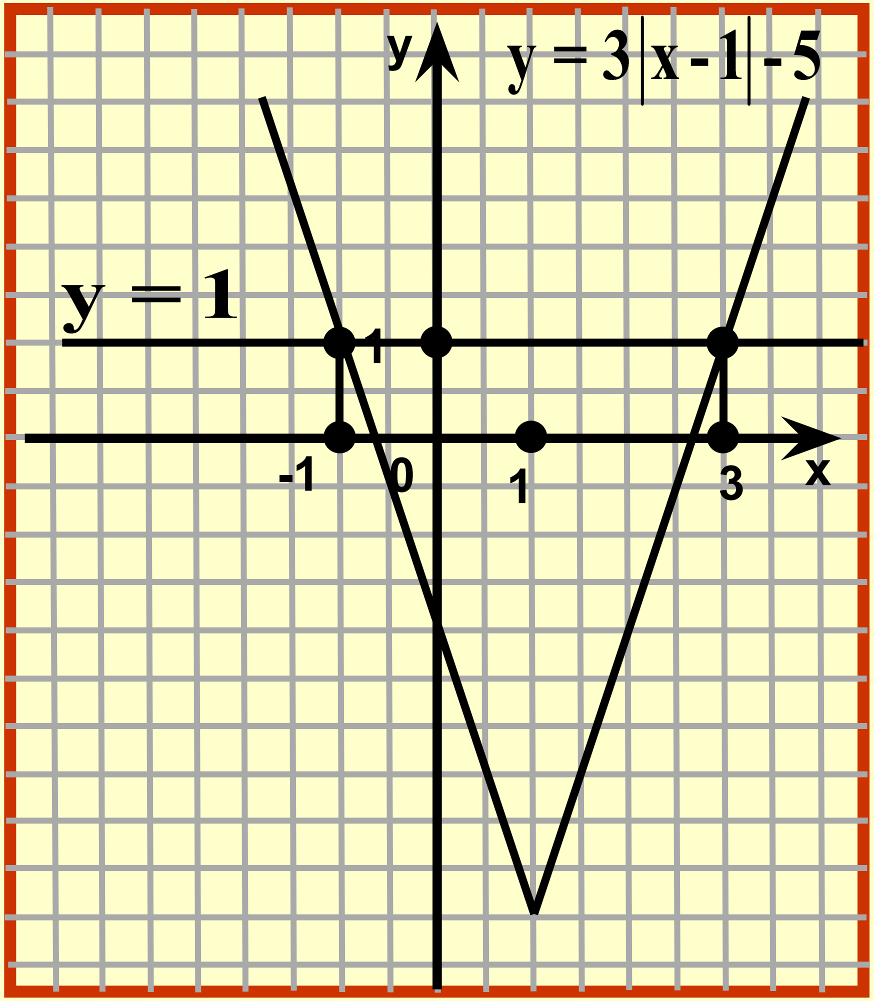
Решен

$$3|x-1|-5=1,$$

$$|x-1|=2,$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=2, \\ x-1=-2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1. \end{array}\right.$$



Ответ: $-1;3.$

Пример 3

$$|x| + 2 = 0.$$

Решение

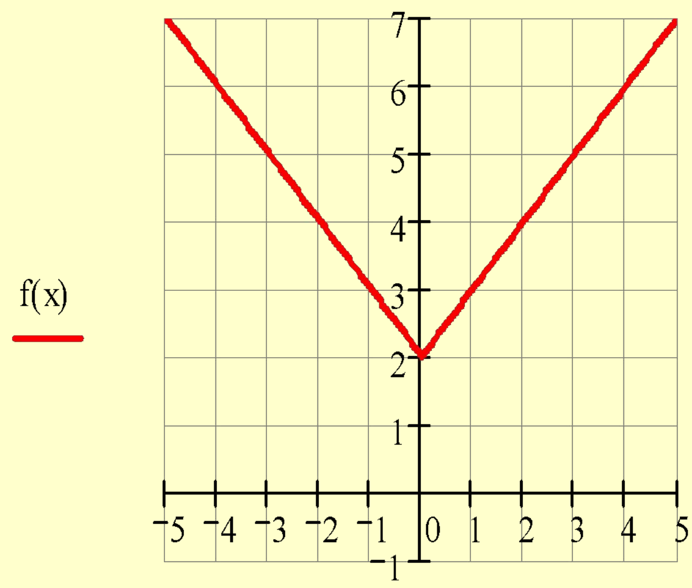
$$|x| + 2 = 0.$$

Так как

$$|x| + 2 > 0$$

при $x \in R,$ то

уравнение корней не имеет.



Ответ: уравнение корней не имеет.

Пример 4

$$\left|x^2+x+1\right|=0.$$

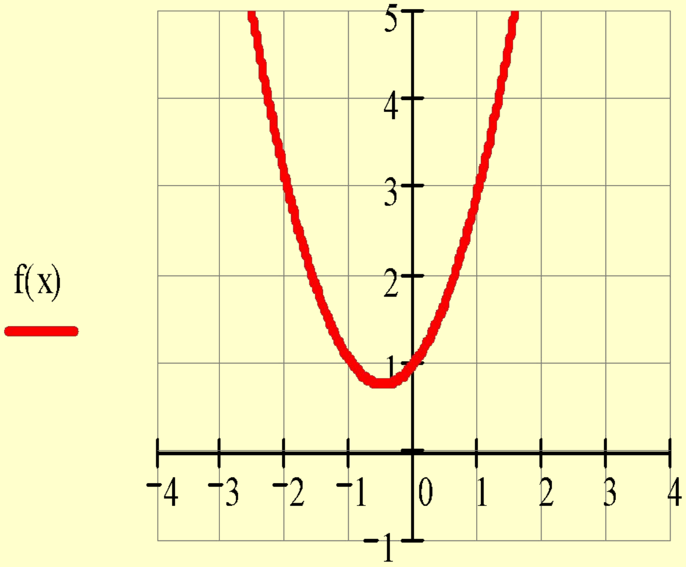
Решение

$$\left|x^2+x+1\right|=0.$$

Так как

$$x^2+x+1>0$$

при $x\in R$, то уравнение корней не имеет.



Ответ: уравнение корней не имеет.

Пример 5

$$||x| - 2| = 2$$

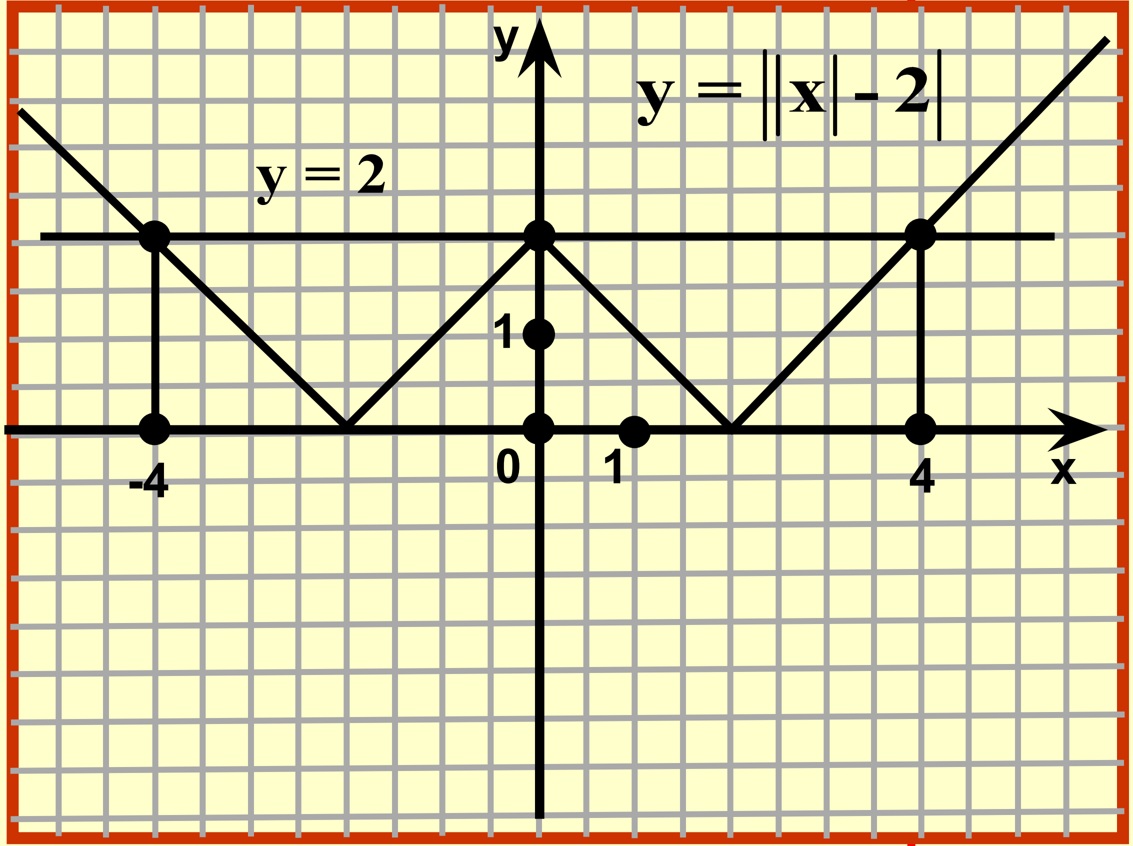
Решение:

$$||x| - 2| = 2,$$

$$\left[\begin{array}{l} |x| - 2 = 2, \\ |x| - 2 = -2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} |x| = 4, \\ |x| = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4, \\ x = 0. \end{array}\right.$$



Ответ: $\pm 4; 0.$

Пример 6

$$|x^2 - x - 1| = 1.$$

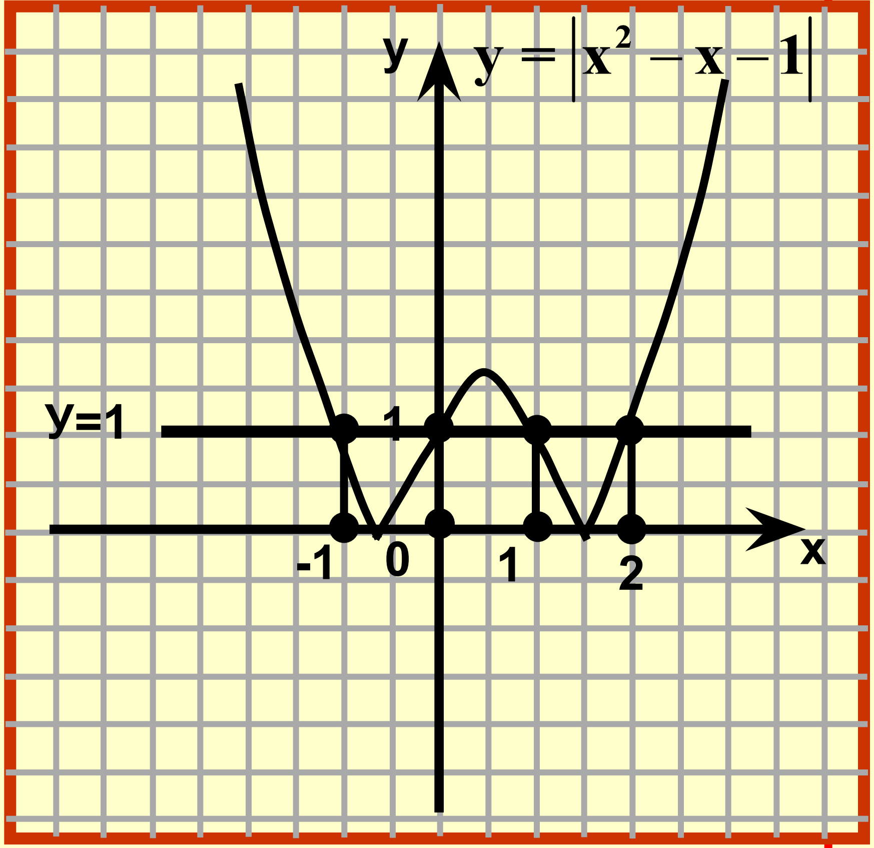
Решен

$$|x^2 - x - 1| = 1,$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 1, \\ x^2 - x - 1 = -1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - x = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$



Ответ: $\pm 1; 0; 2.$

Пример 7

$x^2 - 2|x| - 3 = 0$. (ЦТ 2003 г)

Решение

$x^2 - 2|x| - 3 = 0$. Так как $x^2 = |x|^2$.

Тогда $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$. Пусть $|x| = t, t \geq 0$.

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \geq 0, \\ t = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} t \geq 0, \\ t = 3; \end{cases} \end{array}\right. \quad t = 3.$$

Вернёмся к переменной х $|x| = 3$,

$x = \pm 3$.

Ответ: ± 3.

Пример 8

$$x|x| - 7x + 12 = 0.$$

Решение

$$x|x| - 7x + 12 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -x^2 - 7x + 12 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 7x - 12 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 3; x = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{97}}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 4, \\ x = \dfrac{-7 - \sqrt{97}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{-7 - \sqrt{97}}{2}; 3; 4.$

Пример 9

$$x^2 - 5x\frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0$$ **(ЦТ 2004 г)**

Решение

$$x^2 - 5x\frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2>0, \\ x^2-5x-14=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0, \\ x^2+5x-14=0; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2, \\ x=-2; x=7; \end{cases} \\ \begin{cases} x<2, \\ x=-7; x=2; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-7. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm 7.$

Домашнее задание

1) Материал лекции.
2) М.Л.Галицкий «Сборник задач по алгебре для 8-9 классов» §1п.6.
В помощь учащимся лицея-интерната при СГАУ им. Н.И. Вавилова «Сборник задач по математике. Часть I.» §5 стр. 74 ; 84.
3) М.Л.Галицкий «Сборник задач по алгебре для 8-9 классов» §5 №5.7;5.8.
В помощь учащимся лицея-интерната при СГАУ им. Н.И.
Вавилова «Сборник задач по