Учение без размышления бесполезно,
но и размышление без учения опасно.

Конфуций

Перестановки. Сочетания. Размещения.

Проказница-Мартышка, Осел, Козел да косолапый Мишка
Затеяли сыграть Квартет.
Достали нот, баса, альта, две скрипки
И сели на лужок под липки -
Пленять своим искусством свет.
Ударили в смычки, дерут, а толку нет.
"Стой, братцы, стой! - кричит Мартышка. - Погодите!
Как музыке идти? Ведь вы не так сидите.
И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.
Вот пуще прежнего пошли у них разборы
И споры,
Кому и как сидеть…

Решение:

1 * 2 * 3 * 4 = 24

Исторические сведения

- Комбинаторика как наука стала развиваться в XIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей.

- Первые научные исследования по этой теме принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Чарталье (1499-1557), Г. Галилею (1564-1642) и французским ученым Б.Пискамо (1623-1662) и П. Ферма.

- Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики, первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».

Пьер Ферма
1601-1665

Готфрид Вильгельм Лейбниц
1646-1716

Первые научные исследования принадлежат:

Леонард Эйлер
1707-1783

Блез Паскаль
1623-1662

Комбинаторика

Комбинаторикой называется раздел математики, в котором исследуется, сколько различных комбинаций (всевозможных объединений элементов), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять, сочетать».

Термин "комбинаторика" был введён знаменитым Готфридом Вильгельмом Лейбницем, - всемирно известным немецким учёным.

ПОНЯТИЕ ФАКТОРИАЛА

n! = 1·2·3 … n, где n - натуральное число

Принято считать, что 0! = 1

Пример:

Решить уравнение: $$\frac{(n+2)!}{n!}=20;$$

Решение: $$\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!}=20;$$

$$(n+1)(n+2)=20;$$

Решаем квадратное уравнение:

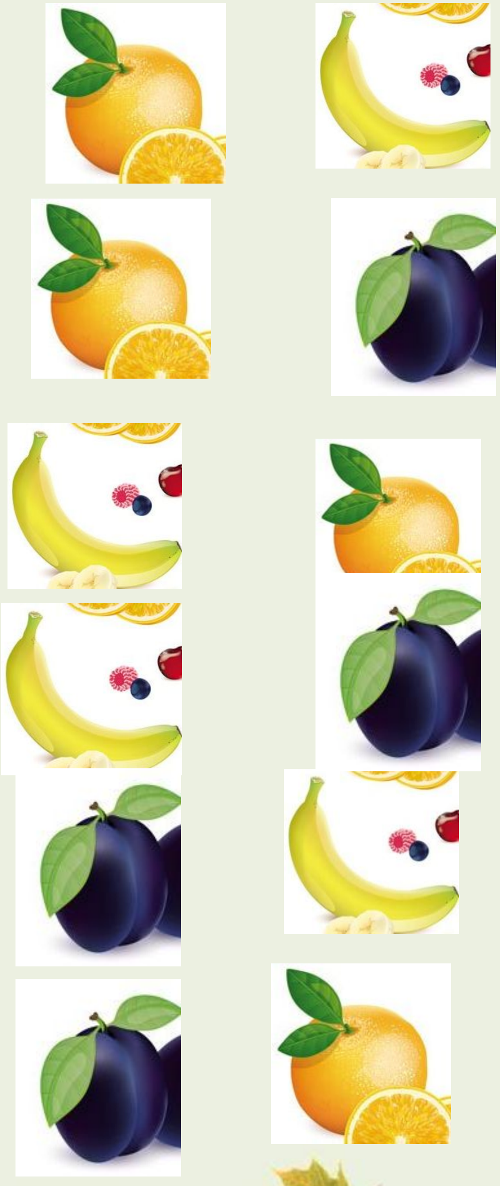
$$n_1=3; n_2=-6$$

Ответ: $n=3$

1) установить различие между задачами
2) предположить, в какой задаче результат будет больше, и почему
3) предложить способ решения

- **Задача 1.** Имеются три различных фрукта: апельсин(А),банан (В), слива (С). Сколькими способами можно два из них отдать Пете и Коле?
- **Задача 2.** Имеются три различных фрукта: апельсин(А),банан (В), слива (С). Сколькими способами можно два из них выбрать для обеденного перекуса?











Различают три вида комбинаций: **перестановки, размещения** и **сочетания**.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же **различных** объектов и отличающиеся только порядком их расположения. Количество всех возможных перестановок выражается формулой

$$P_n = n!$$

Сочетания

Сочетаниями называют различные комбинации из объектов, которые выбраны из множества различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из элементов, в которой не важен их порядок (расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$$

Решение задачи №2 $n = 3.\ m = 2 \quad C_3^2 = 3$

А теперь решим ту же задачу для случая m=3, n=8:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{(1\cdot2\cdot3)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)} = 7\cdot8 = 56(\text{способов})$$

Размещения

Размещениями называют различные комбинации из объектов, которые выбраны из множества различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком. Количество размещений рассчитывается по формуле:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Решение задачи №1 n = 2. m = 3 $A_3^2 = 6$

А теперь решим ту же задачу для случая m=8, n=3:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336(\textit{способов})$$

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n мест	n элементов k мест	n элементов k мест
Порядок имеет значение	Порядок имеет значение	Порядок не имеет значения
$\boxed{P_n = n!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

«Проказница Мартышка, Осёл, Козёл да косолапый Мишка задумали сыграть квартет». Сколькими способами они могут выбрать каждый для себя по одному инструменту из 10 данных различных инструментов?

(Ответ: $A_{10}^{4} = 5040$)

Задания для повторения

Вычислите:

$$\frac{7!}{5!}$$

$$\frac{15!}{10! \cdot 5!}$$

$$\frac{5!+6!+7!}{8!-7!}$$

Ответы

1) **42**

2) 3003

3) $\frac{1}{6}$

Практическое занятие

1. **Вычислите (каждое выражение – 1 балл).**

1 вариант

- 1 $\frac{100!}{99!}$
- 2 $\frac{11!}{8! \cdot 5!}$
- 3 $\frac{4! + 6! + 7!}{6! - 5!}$;

2 вариант

- 1 $\frac{2015!}{2014!}$
- 2 $\frac{16!}{14! \cdot 3!}$
- 3 $\frac{9! + 10! + 11!}{12! - 11!}$;

2. Решите задачи на подсчет перестановок, сочетаний, размещений, подобрав соответствующую формулу (Каждая задача – 2 балла).

1. Изменяя порядок слов: **руки, мою, я,** составьте всевозможные предложения.
2. Сколькими способами в игре «спортлото» можно выбрать 6 номеров из 49?
3. На собрании пожелали выступить 5 человек – Иванов, Петров, Сидоров, Белочкин и Пеночкин. Сколькими способами можно составить список ораторов?
4. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 человек, можно создать из 5 преподавателей?
5. Сколько различных трехзначных чисел, в каждом из которых все цифры различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
6. Сколькими способами можно составить расписание на день из 4 различных уроков, если изучается 10 предметов?

Критерии оценки:
«5» – 14-15 баллов
«4» – 10-до 14 баллов
«3» – 7- до 10 баллов
«2» – менее 7баллов