

Основные правила и формулы комбинаторики

Шармин Валентин – кандидат
физико-математических наук,
доцент, почетный работник
высшего профессионального
образования РФ

Определение комбинаторики

- *Комбинаторикой* называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из принадлежащих данному конечному множеству элементов.
- При решении задач комбинаторики используют правила суммы и произведения.

Правило суммы и произведения

- *Правило суммы.* Если некоторый объект A можно выбрать способами n , а объект B можно выбрать способами m (не такими, как A), то объект «либо A , либо B » можно выбрать $n+m$ способами.
- *Правило произведения.* Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора объект B можно выбрать способами m (независимо от выбора объекта A), то пару объектов « A и B » в указанном порядке можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пример

- В магазине бытовой техники имеется 8 видов электрических чайников и 10 видов микроволновых печей. Сколькими способами можно: а) совершить покупку, состоящую из одного электроприбора; б) купить чайник и микроволновую печь?
- а) Электрический чайник можно выбрать 8 способами, а микроволновую печь – 10 способами. Число способов купить один электроприбор (то есть выбрать либо чайник, либо микроволновую печь), по правилу суммы, равно $8+10=18$.
- б) Купить чайник и микроволновую печь (то есть выбрать пару объектов) можно, по правилу произведения, способами $8*10=80$.

Перестановки

- *Перестановками* из различных элементов называются упорядоченные наборы, содержащие данные элементов.
- Таким образом, одна перестановка отличается от другой только порядком расположения элементов.
- Число перестановок из элементов обозначается символом P_n и находится по формуле: $P_n = n!$
где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, 0! = 1.$

Пример

- Сколькими способами можно расставить 7 различных книг на полке?
- Каждый способ расстановки книг отличается от другого способа лишь порядком расположения книг.
Следовательно, число способов равно .

$$P_7 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$$

Размещения без повторений

- *Размещениями* из различных элементов по элементам называются упорядоченные наборы, содержащие элементов из данных .
- Одно размещение отличается от другого либо составом элементов, либо порядком их расположения.
- Число размещений из элементов по обозначается символом и находится по формуле: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, (k \leq n)$

Пример

- Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали между 16 командами, участвующими в соревнованиях?
- Очевидно, что все возможные тройки призеров отличаются одна от другой либо составом команд, либо порядком их расположения на первом, втором и третьем местах.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 13} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360$$

Сочетания

- *Сочетаниями* из различных элементов по n элементов называются неупорядоченные наборы, содержащие k элементов из данных.
- Сочетания отличаются друг от друга только составом элементов.
- Число сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k и находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (k \leq n)$$

Пример

- Сколькими способами можно образовать стартовую пятерку из имеющихся в распоряжении тренера 12 баскетболистов?
- Поскольку в данном случае важен лишь состав стартовой пятерки, а порядок ее элементов не имеет значения, то число

$$\text{спо } C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$$

Выборки с повторениями

- Число размещений с повторениями $\bar{A}_n^k = n^k$
- Число сочетаний с повторениями $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
- Если среди элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с $P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$
где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Примеры

- Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, если цифры в числе могут повторяться?
- По условию задачи, цифры в числе могут повторяться, значит речь идет о комбинациях с повторениями. Числа различаются не только составом цифр, но и порядком их расположения (например, числа 5567 и 6575 состоят из одних и тех цифр, записанных в разном порядке).

$$A_3^4 = 3^4 = 81$$

Примеры

- В продажу поступили открытки 15 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 8 открыток, если в него могут войти одинаковые открытки?
- Так как виды открыток в наборе могут повторяться, а сами наборы отличаются один от другого только своим составом (очевидно, что расположение открыток в наборе не имеет значения), то число таких наборов равно

$$\bar{C}_{15}^8 = C_{15+8-1}^8 = \frac{22!}{8! \cdot 14!} = 319770$$

Примеры

- Сколько различных «слов» (не обязательно имеющих смысл) можно образовать, переставляя буквы в слове КОЛОКОЛ?
- В слове КОЛОКОЛ, состоящем из 7 букв, буква К встречается два раза, буква О – три раза, буква Л – два раза, то есть $n=7$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=2$, $P(2,3,2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 210$, число «слов» равно 210.

Задачи

1. Имеется 3 вида конвертов без марок и 9 видов марок одинаковой стоимости. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
2. На вершину горы ведут 5 тропинок. Сколькими способами турист может подняться в гору и потом спуститься с нее, если подъем и спуск: а) могут проходить по любым тропинкам; б) должны проходить по разным тропинкам?
3. Сколькими способами из 25 членов научного общества учащихся можно выбрать его председателя, заместителя председателя, редактора газеты и секретаря?
4. В отделе НИИ работают 22 человека. Сколькими способами можно выбрать 3 человек для участия в конференции?

Задачи

5. Сколькими способами можно разместить на скамейке 9 человек?
6. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что: а) ни одна цифра не повторяется; б) цифры могут повторяться; в) число оканчивается цифрой 3 и все цифры различны; г) число начинается с цифры 4 и цифры могут повторяться?
7. Сколько различных восьмизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3.
8. Для несения почетного караула из 10 человек могут быть приглашены офицеры 6 родов войск. Сколькими способами можно назначить состав почетного караула?

Задачи

9. Сколько различных «слов» можно образовать при перестановке букв слова МАТЕМАТИКА?
10. Из 10 различных книг выбирают 4 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?
11. Сколько трехбуквенных «слов» можно составить из букв слова ИНТЕГРАЛ (буквы в «слове» могут повторяться)?
12. Сколько различных «слов» (не обязательно имеющих смысл) можно образовать, переставляя буквы слова: а) ЗАМОК; б) САВАННА; в) ЗАМОК, если буква К должна стоять на первом месте?

Задачи

13. Студентам надо сдать 4 экзамена за 12 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в один день не должно быть двух экзаменов?
14. Сколько различных вариантов хоккейной команды можно составить из 9 нападающих, 5 защитников и 3 вратарей, если в состав команды должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?
15. Имеется 11 наименований товаров. Сколькими способами их можно развезти по трем магазинам следующим образом: 5 наименования – в первый магазин, 4 – во второй, 2 – в третий?
16. Сколькими способами на шахматной доске можно указать: а) две клетки; б) две клетки одного цвета; в) две клетки разного цвета?

Задачи

17. Из трех инженеров и девяти экономистов должна быть выбрана комиссия в составе семи человек. Сколькими способами может быть составлена комиссия, если в нее должен войти: а) ровно один инженер; б) хотя бы один инженер?
18. Сколько четных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не должны повторяться?
19. Сколькими способами можно поставить в ряд 6 автомобилей так, чтобы два определенных автомобиля оказались рядом?
20. Сколько автомобильных номеров формата Б ЦЦЦ ББ можно составить, если можно использовать все цифры и те буквы русского алфавита, которые имеют написание, подобное латинским буквам?

ОТВЕТЫ

- **1.** 27. **2.** а) 25; б) 20. **3.** 303600. **4.** 1540. **5.** 362880. **6.** а) 60; б) 125; в) 12; г) 25. **7.** 560. **8.** 3003. **9.** 151200. **10.** 210. **11.** 512. **12.** а) 120; б) 420; в) 24. **13.** 11880. **14.** 2520. **15.** 6930. **16.** а) 2016; б) 992; в) 1024. **17.** а) 252; б) 756. **18.** 48. **19.** 240. **20.** 1726272.