ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются *перестановки*.

Пример.

Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами a, b и c. Эти книги можно расставить на полке по-разному.

Если первой поставить книгу a, то возможны такие расположения книг: abc, acb.

Если первой поставить книгу b, то возможными являются такие расположения: bac, bca.

И наконец, если первой поставить книгу c, то получим такие расположения: cab, cba.

Каждое из этих расположений называют *перестановкой* из трёх элементов.

Определение

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке.

Число перестановок из n элементов обозначают символом

$$P_n$$

(читается «P из n»).

Пусть мы имеем n элементов.

- **На первое место можно поставить любой из них.**
- **Для каждого выбора первого элемента на второе место можно поставить один из оставшихся n-1 элементов.**
- **Для каждого выбора первых двух элементов на третье место можно поставить один из оставшихся**

n-2 элементов и т.д.

- **В результате получим, что**

$$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

(читается «n факториал»).

Например, $2! = 2\cdot 1 = 2$; $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$.

По определению считают, что $1! = 1$.

Таким образом, число всевозможных перестановок из
n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$$

Пример 1.

Сколькими способами могут быть расставлены 8 участников финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение.

- Число способов равно числу перестановок из 8 элементов.
- По формуле числа перестановок находим, что $P_8=8!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=40\ 320$.
- Значит, существует 40 320 способов расстановки участников забега на восьми беговых дорожках.

Пример 2.

Сколько различных четырёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Решение.

Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить $\mathbf{P}_4$ перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно $\mathbf{P}_3$. Значит, искомое число четырёхзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, равно

$\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$

Пример3.

Имеется девять различных книг, четыре из которых – учебники.

Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Решение.

Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не девять, а шесть книг. Это можно сделать $\mathbf{P}6$ способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить $\mathbf{P}4$ перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $\mathbf{P}6 \cdot \mathbf{P}4$. Получаем:

$$\mathbf{P}6 \cdot \mathbf{P}4 = 6! \cdot 4! = \ = 17\,280.$$

Задачи на закрепление пройденного материала.

- Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу:
-     1) 3 человека; 2) 5 человек?
- Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола:
-     1) 6 гостей на 6 стульях; 2) 7 гостей на 7 стульях?
- Сколькими способами можно с помощью букв K, L, M и N обозначить вершины четырехугольника?
- Сколько различных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 4, 5, 6, 7 и 8?
- Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, среди которых 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?
- В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

Вычислить:

$$\frac{13!}{11!} \qquad \frac{6!\cdot 14}{8!}$$