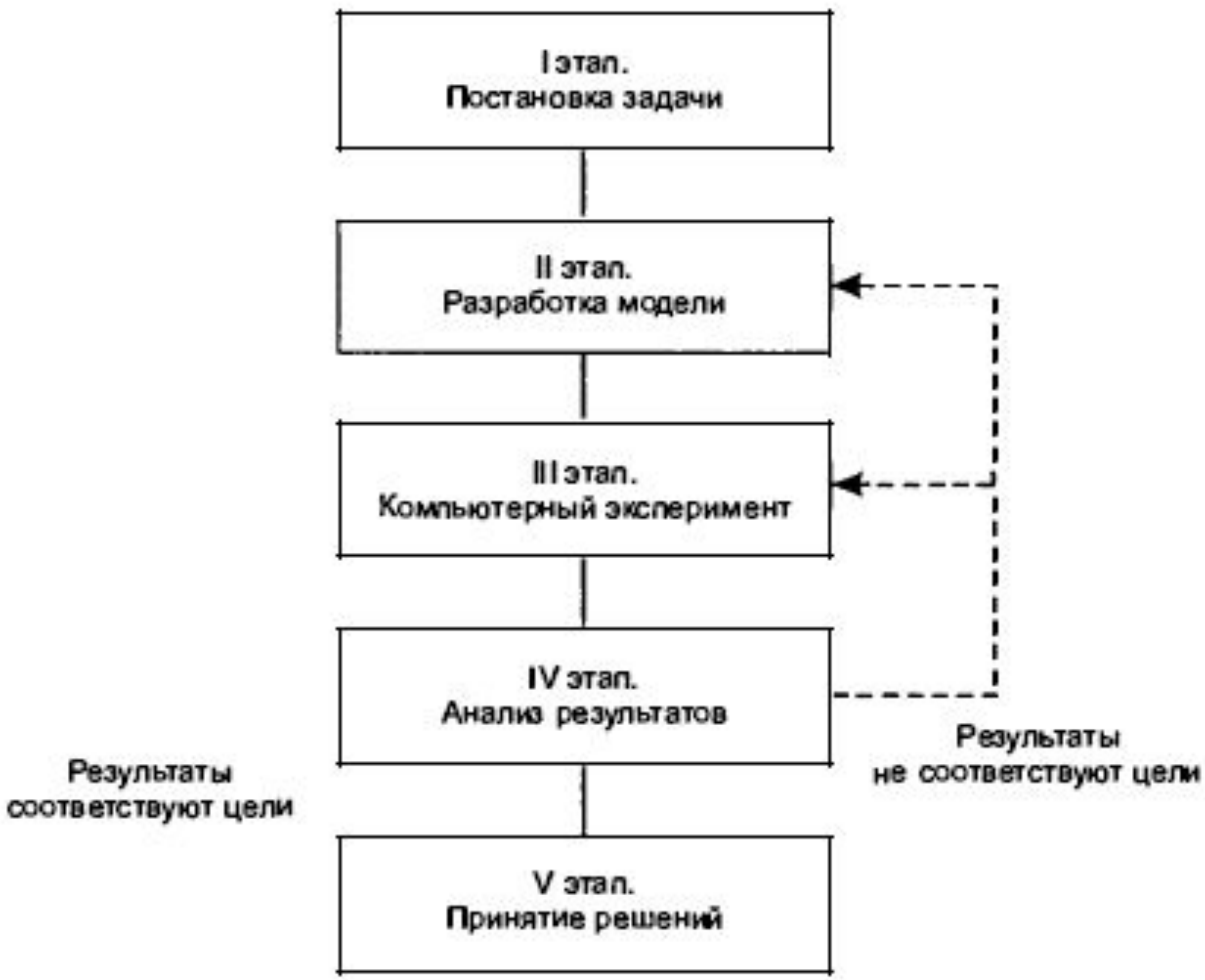
ПРИБЛИЖЁННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Основные определения

Модель – упрощённое представление о реальном объекте, процессе или явлении

Моделирование – построение моделей для исследования и изучения объектов, процессов или явлений

Основные этапы моделирования



Основные определения

Математическая модель – совокупность математических формул, отражающих связь различных параметров объекта или процесса

Математическое моделирование – метод исследования объектов и процессов реального мира с помощью математических моделей

Методология математического моделирования

Модель → Алгоритм → Программа

Особенности математического моделирования

- ***этап разработки модели*:**

 выбранная или построенная модель должна в математической форме отражать важнейшие свойства изучаемого процесса;

 модели реальных процессов являются достаточно сложными (содержат системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных);

 исследование модели аналитическими средствами прикладной математики позволяет получить предварительные знания об объекте;

Особенности математического моделирования

- ***этап разработки алгоритма*:**

- **выбранный или разработанный вычислительный алгоритм не должен искажать основные свойства модели;**

- **алгоритм должен адаптироваться к особенностям решаемой задачи и используемым вычислительным средствам;**

- **для изучения математической модели применяются методы вычислительной математики;**

Особенности математического моделирования

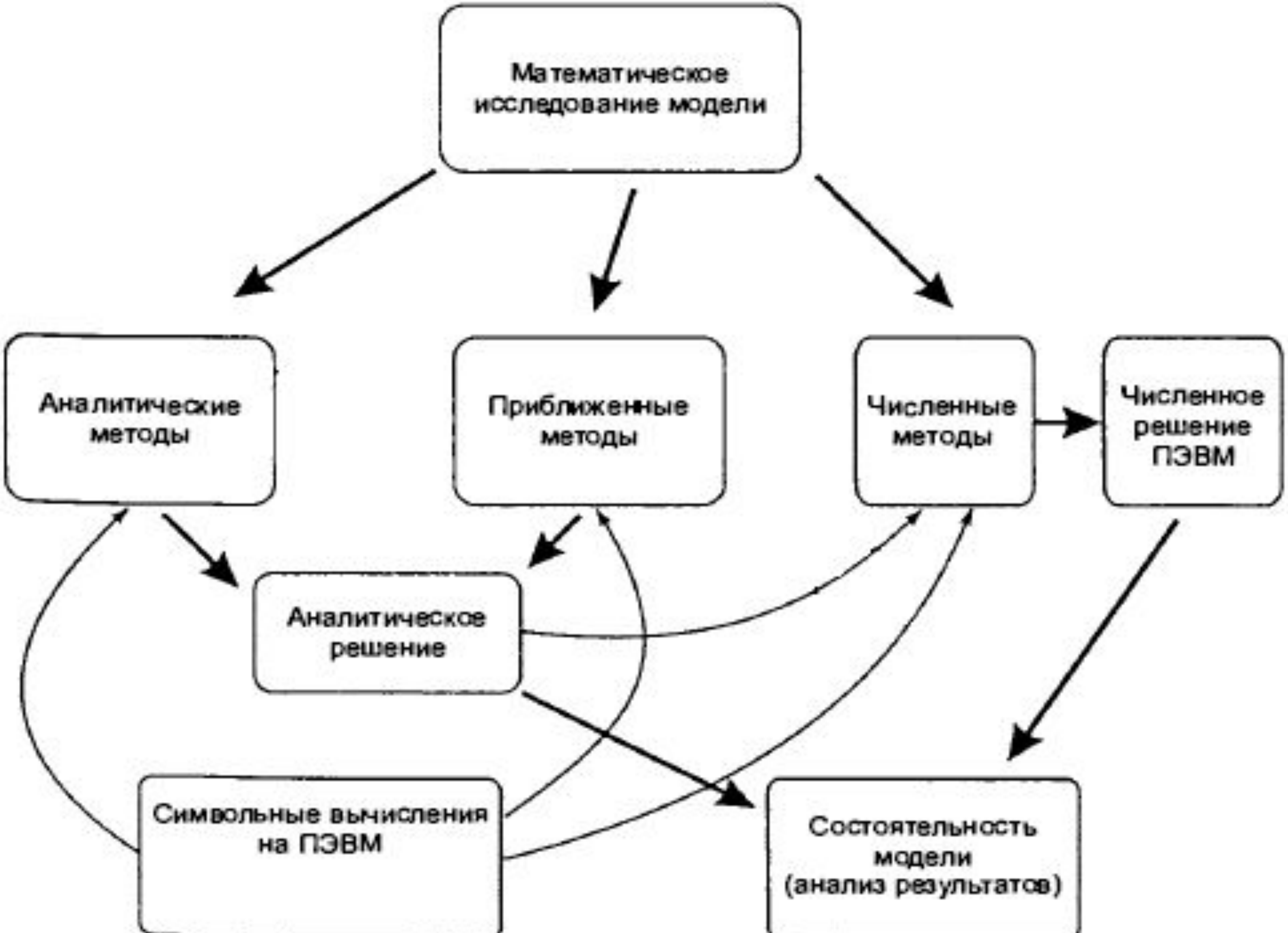
- *этап разработки программы*:

- учёт специфики математического моделирования (необходимость использования набора моделей и многовариантность расчётов);

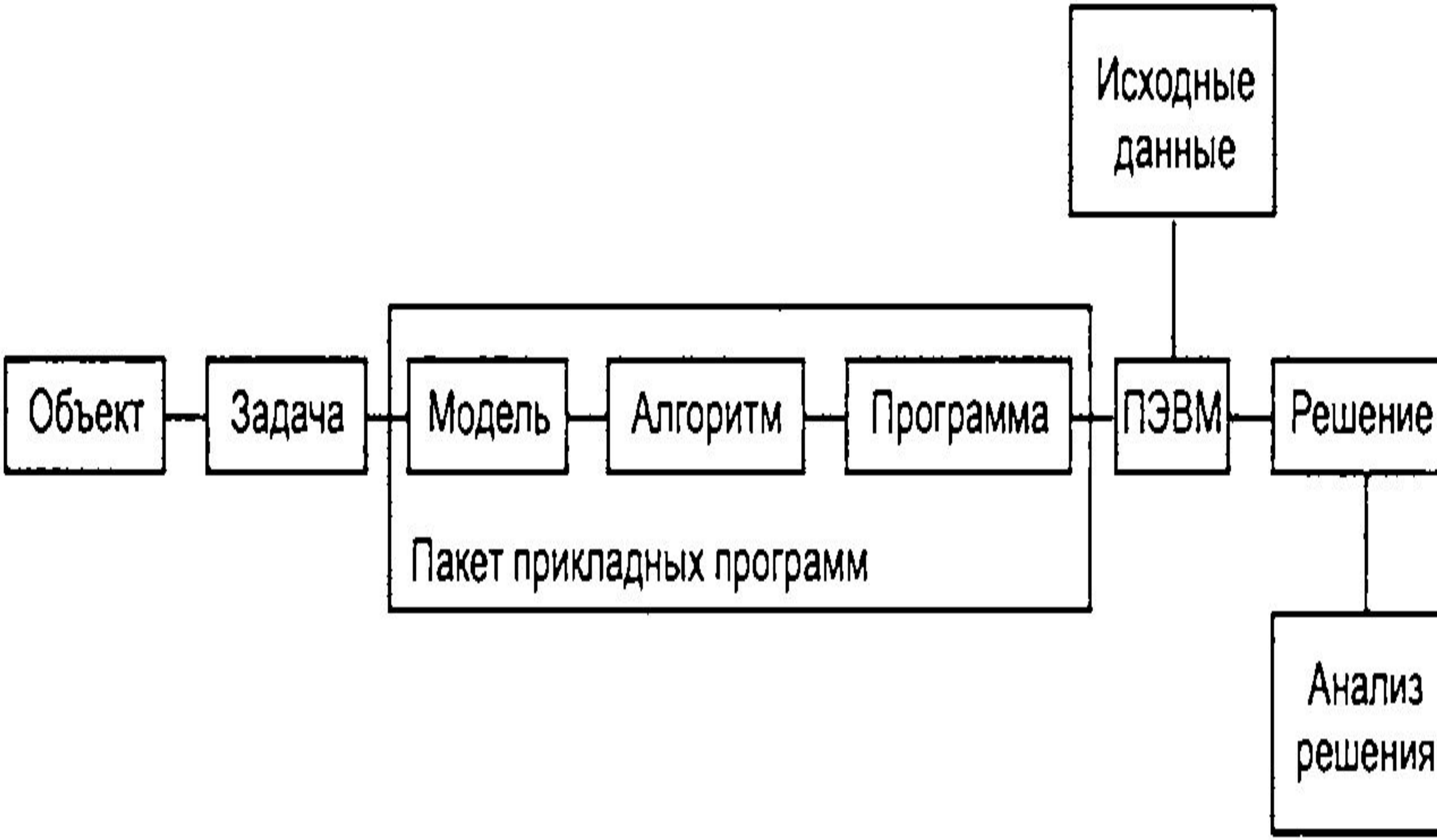
- отладка и тестирование программы на решении набора пробных задач;

- полное исследование математической модели для получения качественных и количественных характеристик исследуемого объекта;

Взаимосвязь этапов математического моделирования



Основные этапы решения задач на ПЭВМ



Классификация погрешностей

Численные методы дают приближённое решение задач, поэтому полученный результат всегда содержит погрешность

- **Погрешности**
  - **Неустранимые**
    - **Погрешность модели**
    - **Погрешность исходных данных**
  - **Устранимые**
    - **Погрешность метода**
    - **Погрешность округления**

Классификация погрешностей

- ***погрешность модели*:**
  - процесс моделирования связан с упрощением изучаемого явления;
  - упрощение явления вносит погрешность в его описание;
- ***погрешность исходных данных*:**
  - математическая модель содержит параметры, зависящие от исходных данных;
  - исходные данные определяются в результате измерений, выполненных с погрешностью;

Классификация погрешностей

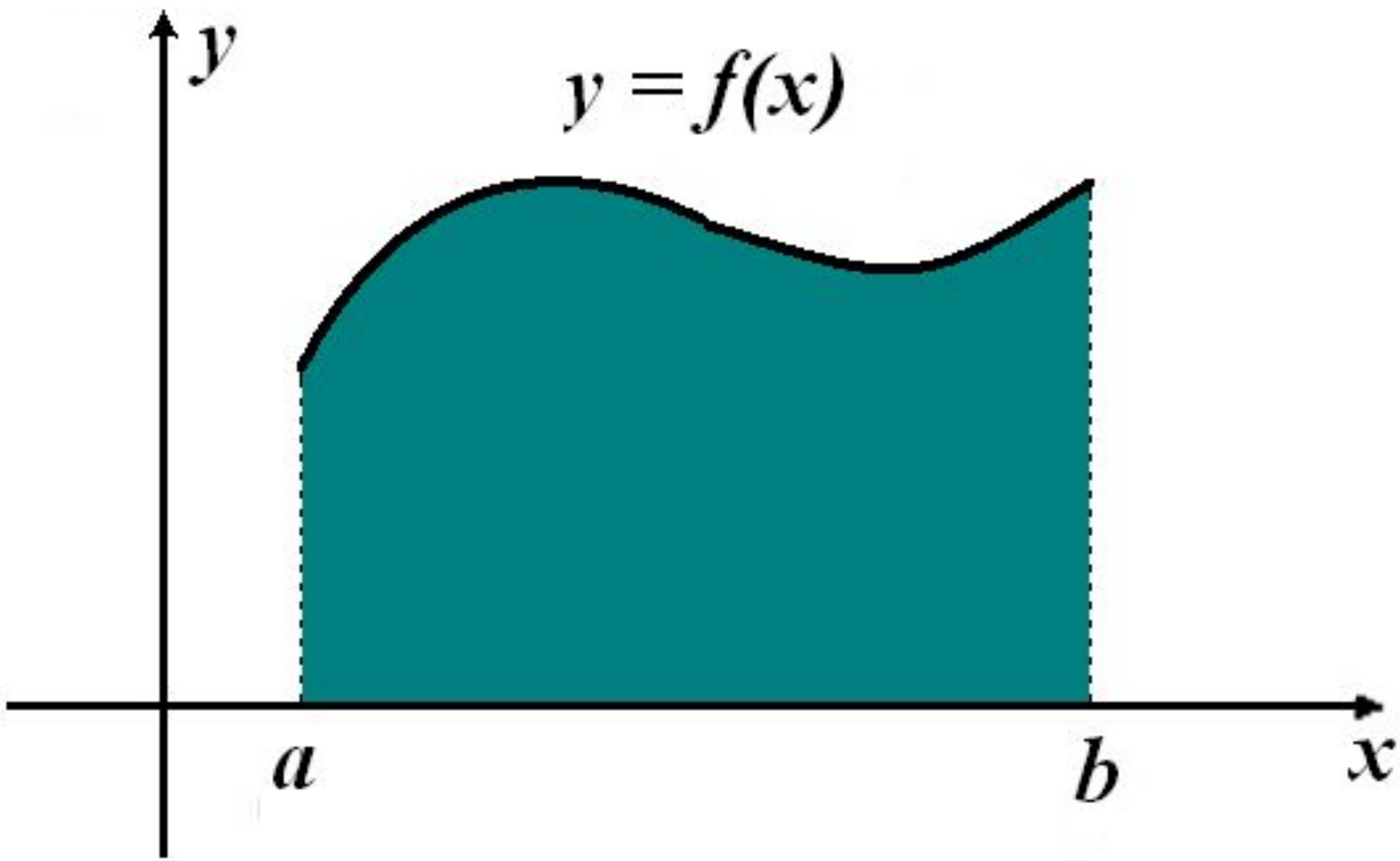
- ***погрешность метода*:**

- вычисления в рамках модели можно проводить различными способами;
- сложная математическая задача заменяется более простой, при этом возникает погрешность метода вычислений;

- ***погрешность округлений*:**

- расчеты, выполняемые вручную или с помощью вычислительной техники, проводятся с конечным числом цифр;
- возникает необходимость округления промежуточных результатов и окончательного ответа;
- погрешность округления может накапливаться в ходе вычислений;

<u>Пример учёта погрешностей</u>



Пример учёта погрешностей

***Постановка задачи*:**

вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс

Пример учёта погрешностей

Математическая модель вычисления площади – определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

Погрешность модели определяется:

- **погрешностью чисел *a* и *b*;**
- **погрешностью функции *y = f(x)*;**

Пример учёта погрешностей

Метод вычисления интеграла – расчёт интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Пример учёта погрешностей

S – точное значение площади

S_1 – точное значение интеграла

S_2 – точное значение интегральной суммы

S_3 – результат вычисления интегральной суммы

Пример учёта погрешностей

Расчётная формула	Вид погрешности
$S - S_1$	неустранимая погрешность
$S_1 - S_2$	погрешность метода
$S_2 - S_3$	вычислительная погрешность
$S - S_3$	полная погрешность

Абсолютная и относительная погрешности чисел

x – точное значение величины (неизвестно!)

$$\tilde{x}$$

Приближённое значение числа *x* – число, мало отличающееся от ***x*** и заменяющее его в вычислениях

Погрешность характеризует точность измерения приближённого числа

Абсолютная и относительная погрешности чисел

Абсолютная погрешность $\Delta_{\tilde{x}}$ **приближённого числа**

$$\Delta_{\tilde{x}} = |x - \tilde{x}|$$

Предельная абсолютная погрешность $\Delta^{*}_{\tilde{x}}$ **приближённого числа**

$$|x - \tilde{x}| \le \Delta^{*}_{\tilde{x}}$$

Абсолютная и относительная погрешности чисел

Относительная погрешность $\delta_{\tilde{x}}$ **приближённого числа**

$$\delta_{\tilde{x}} = \frac{\Delta_{\tilde{x}}}{|\tilde{x}|}$$

Предельная относительная погрешность приближённого числа $\delta_{\tilde{x}}^*$

$$\delta_{\tilde{x}}^* = \frac{\Delta_{\tilde{x}}^*}{|\tilde{x}|}$$

Абсолютная и относительная погрешности функции

$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – непрерывная дифференцируемая функция;

$\tilde{x}_1 \pm \Delta_{\tilde{x}_1}, \ \tilde{x}_2 \pm \Delta_{\tilde{x}_2}, ..., \ \tilde{x}_n \pm \Delta_{\tilde{x}_n}$ – приближённые значения аргументов.

Тогда $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ – приближённое значение функции

Абсолютная и относительная погрешности функции

Абсолютная погрешность $\Delta_{\tilde{y}}$ функции

$$\Delta_{\tilde{y}} \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \right| \Delta_{\tilde{x}_i}$$

Относительная погрешность $\delta_{\tilde{y}}$ функции

$$\delta_{\tilde{y}} \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \left| f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \right| \right| \Delta_{\tilde{x}_i}$$

Абсолютная и относительная погрешности функции

Прямая задача теории погрешностей – задача вычисления погрешности функции при заданных погрешностях аргументов

Обратная задача теории погрешностей – задача определения допустимой погрешности аргументов по заданной допустимой погрешности функции

Значащие, верные и сомнительные цифры

Значащая цифра приближённого числа – каждая цифра в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Значащая цифра – верная (точная), если абсолютная погрешность числа не превышает единицы разряда, соответствующего этой цифре

Значащая цифра – сомнительная, если она не является верной

Погрешности результатов арифметических операций

- **Абсолютные погрешности:**

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b$$

$$\Delta(a \cdot b) = a\Delta b + b\Delta a = ab(\delta_a + \delta_b)$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2} = \frac{a}{b}(\delta_a + \delta_b)$$

$$\Delta(a^m) = ma^{m-1}\Delta a, \quad m \in Q$$

Погрешности результатов арифметических операций

- **Относительные погрешности:**

$$\delta(a \pm b) = \frac{a\delta_a + b\delta_b}{a \pm b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a \pm b}$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta_a + \delta_b$$

$$\delta(a^m) = m\delta_a, \quad m \in Q$$

<u>Правила подсчёта верных цифр</u>

- **При сложении, вычитании, умножении и делении количество верных цифр в результате равно наименьшему количеству верных цифр среди исходных чисел**

- **При возведении приближённого числа в квадрат или куб, а также при извлечении квадратного и кубического корня в результате сохраняется столько же верных цифр, сколько их было в исходном числе**

Правила подсчёта верных цифр

- При вычислении промежуточных результатов сохраняют 1-2 «запасные» цифры, которые в окончательном результате отбрасываются

- Для получения результата с m верными цифрами исходные числа берутся с таким числом цифр, которое обеспечивает $m+1$ верную цифру в результате

Примеры

$$\mathbf{114{,}568 + 12{,}5 * 0{,}82 = 125}$$

1) $12{,}5 * 0{,}82 = 10{,}25 \approx 10{,}3$

2) $114{,}568 + 10{,}3 = 114{,}6 + 10{,}3 = 124{,}9 \approx 125$

Примеры

$$x = \frac{(a+b)c}{ab-c}, \quad a = 28{,}35; \quad b = 16{,}23; \quad c = 1{,}7$$

$$a + b = 44{,}58$$

$$(a+b)c = 44{,}58 \cdot 1{,}7 = 75{,}786 \approx 75{,}8$$

$$ab = 28{,}35 \cdot 16{,}23 = 460{,}1205 \approx 460{,}12$$

$$ab - c = 460{,}12 - 1{,}7 = 458{,}42$$

$$x = \frac{75{,}8}{458{,}42} = 0{,}16535 \approx 0{,}17$$