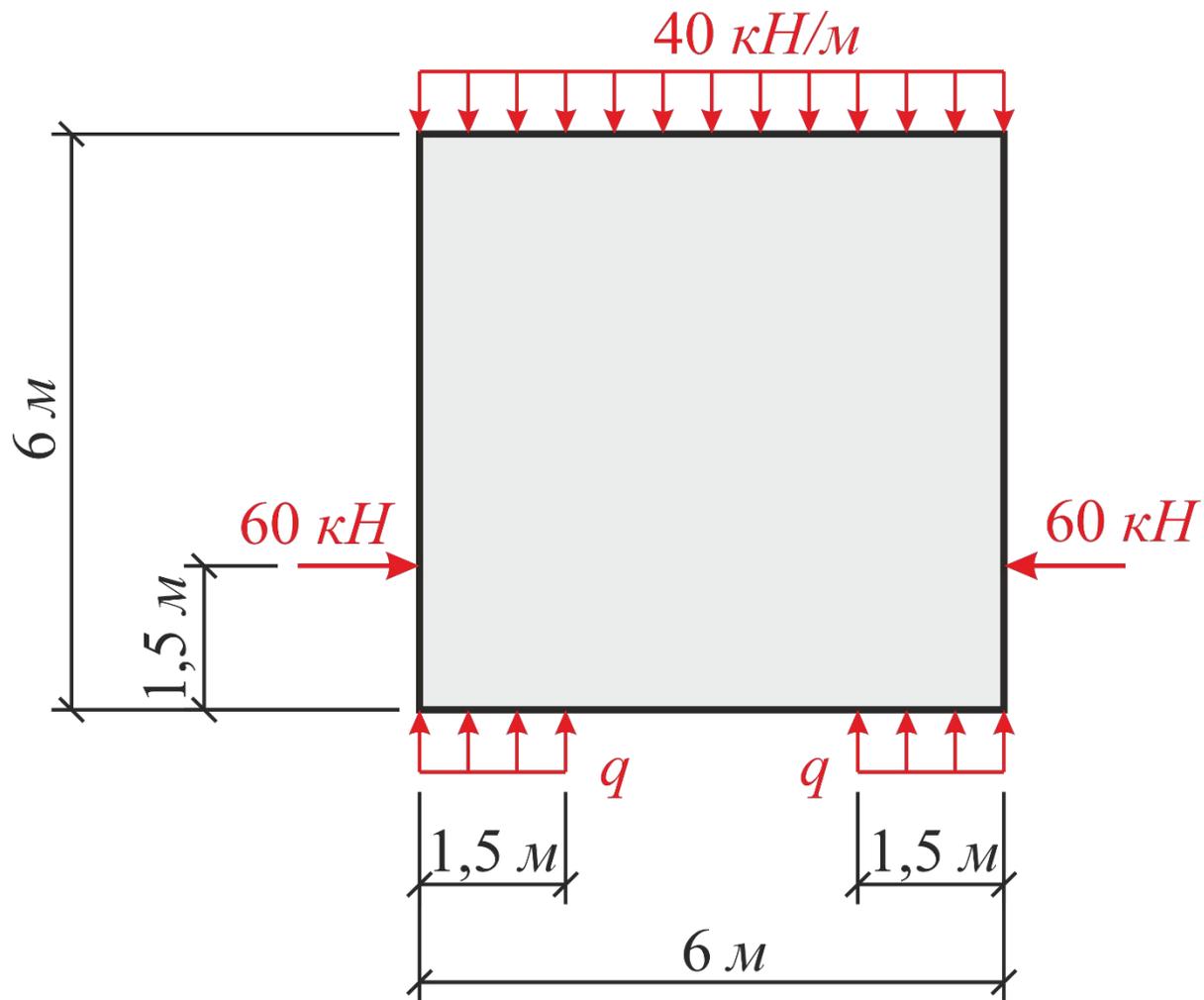


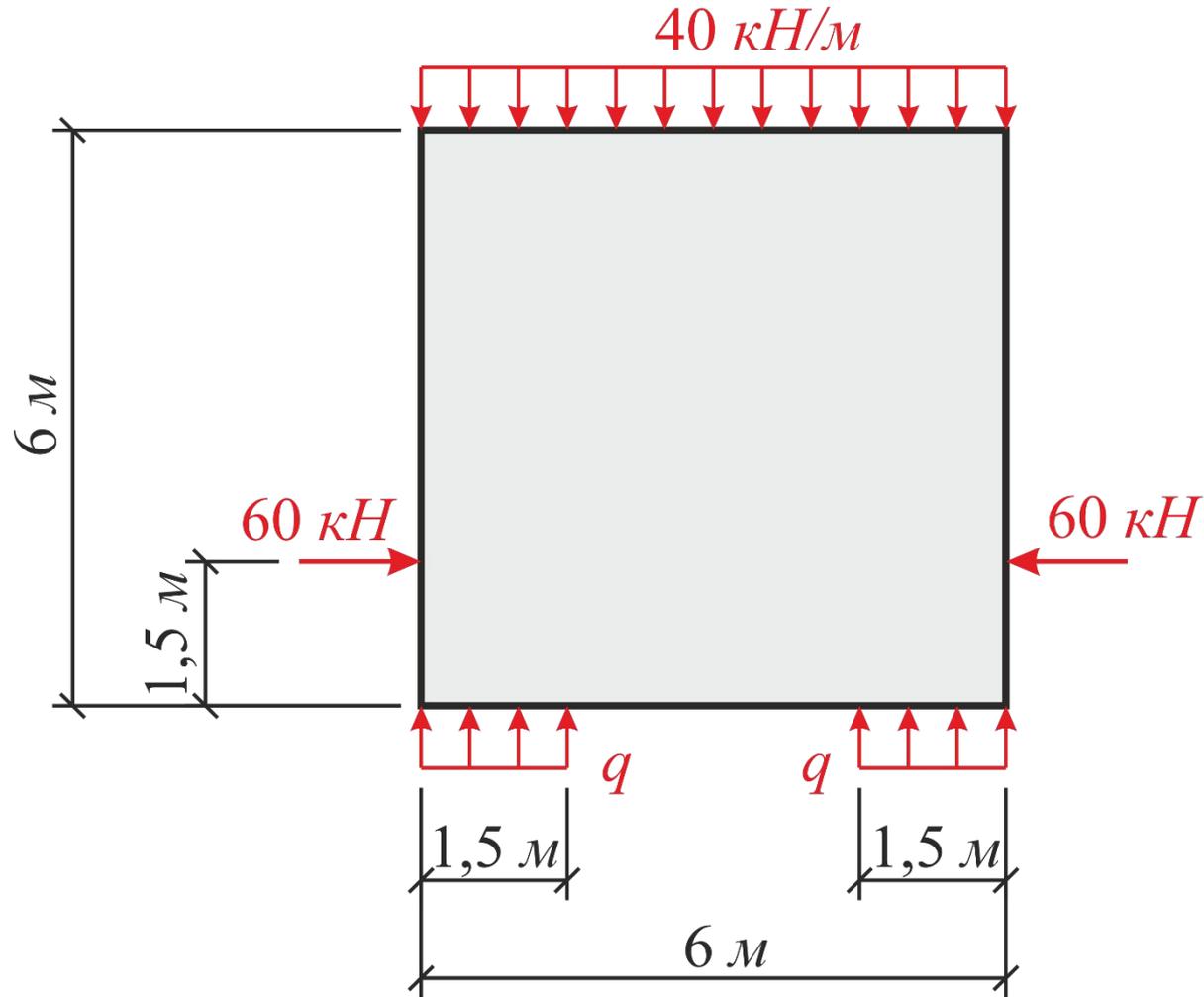
Расчет упругой прямоугольной балки-стенки методом конечных разностей

(задача № 1)

Пример. Для заданной балки-стенки единичной толщины, построить эпюры нормальных и касательных напряжений.

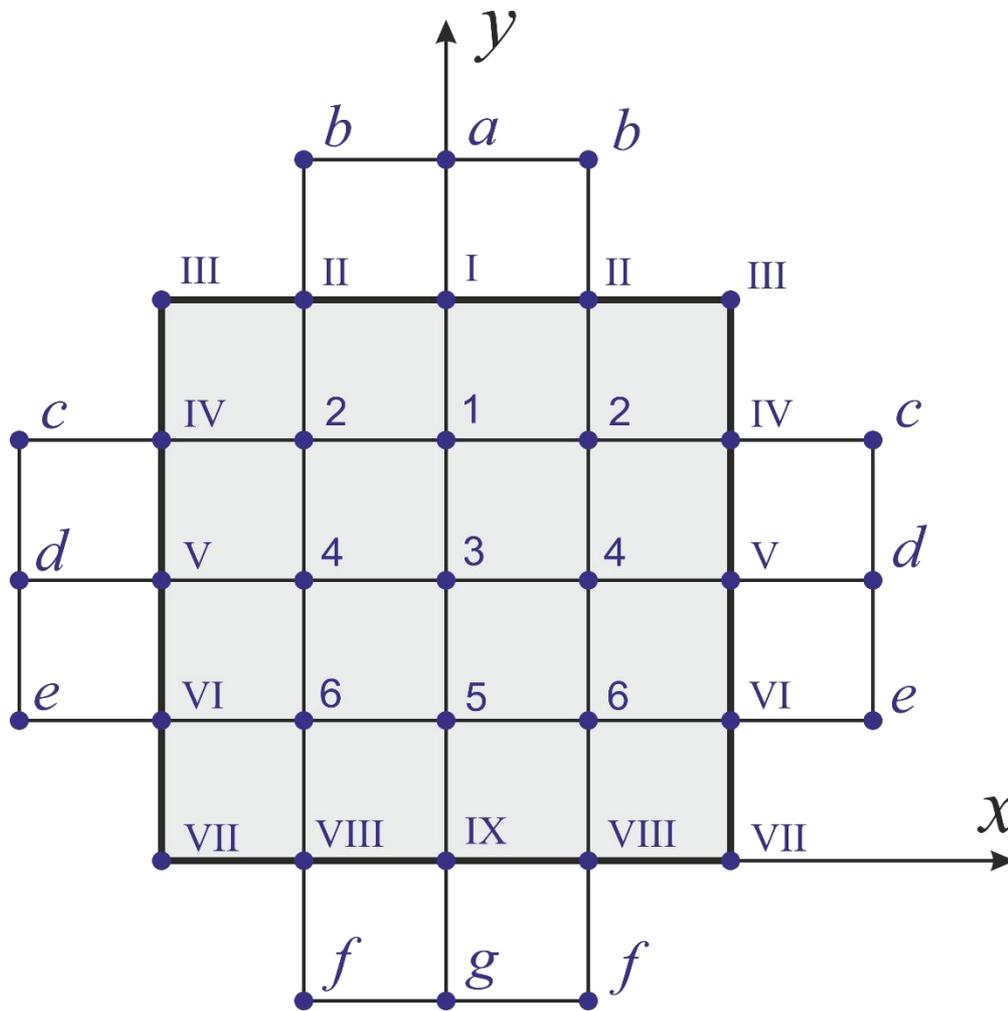


Определяем опорные реакции



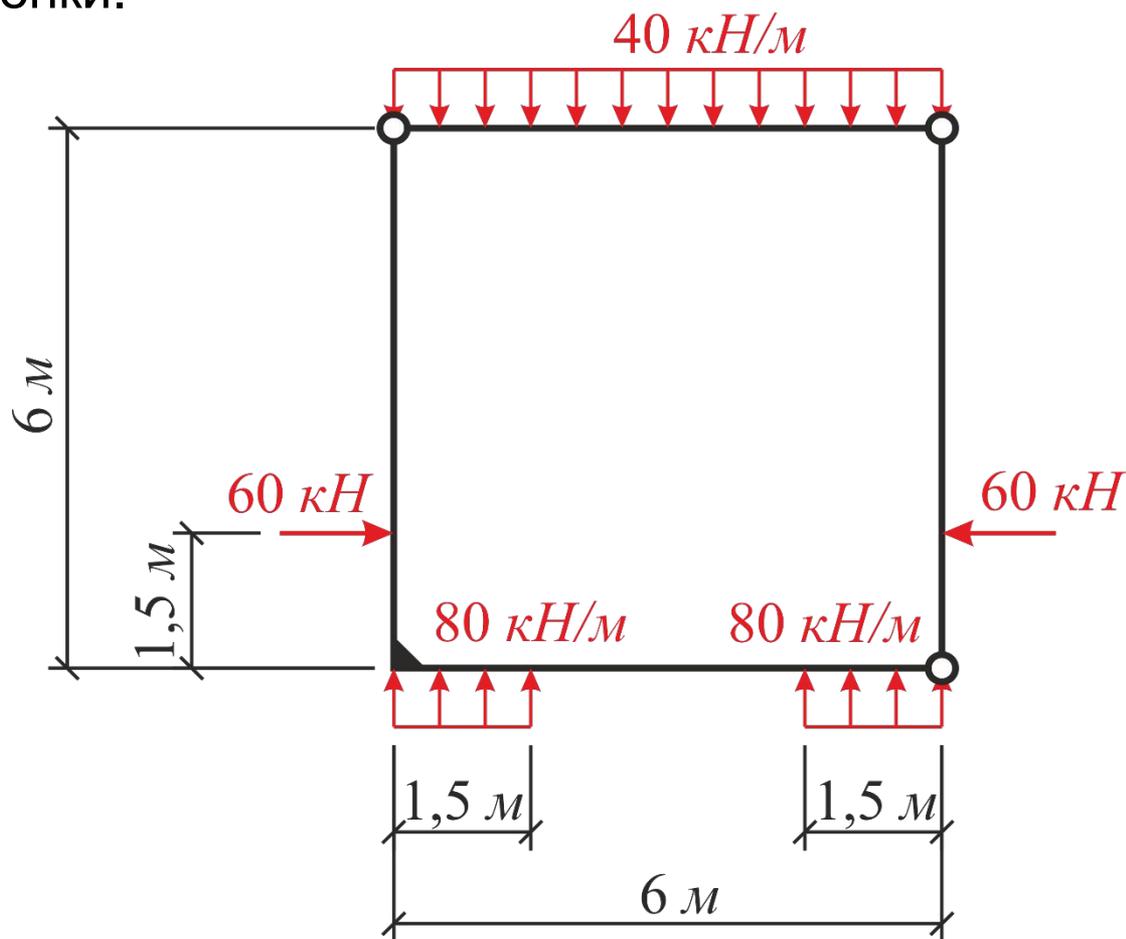
$$\Sigma F_y = 0; -40 \cdot 6 + 2 \cdot q \cdot 1,5 = 0 \qquad q = 80 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

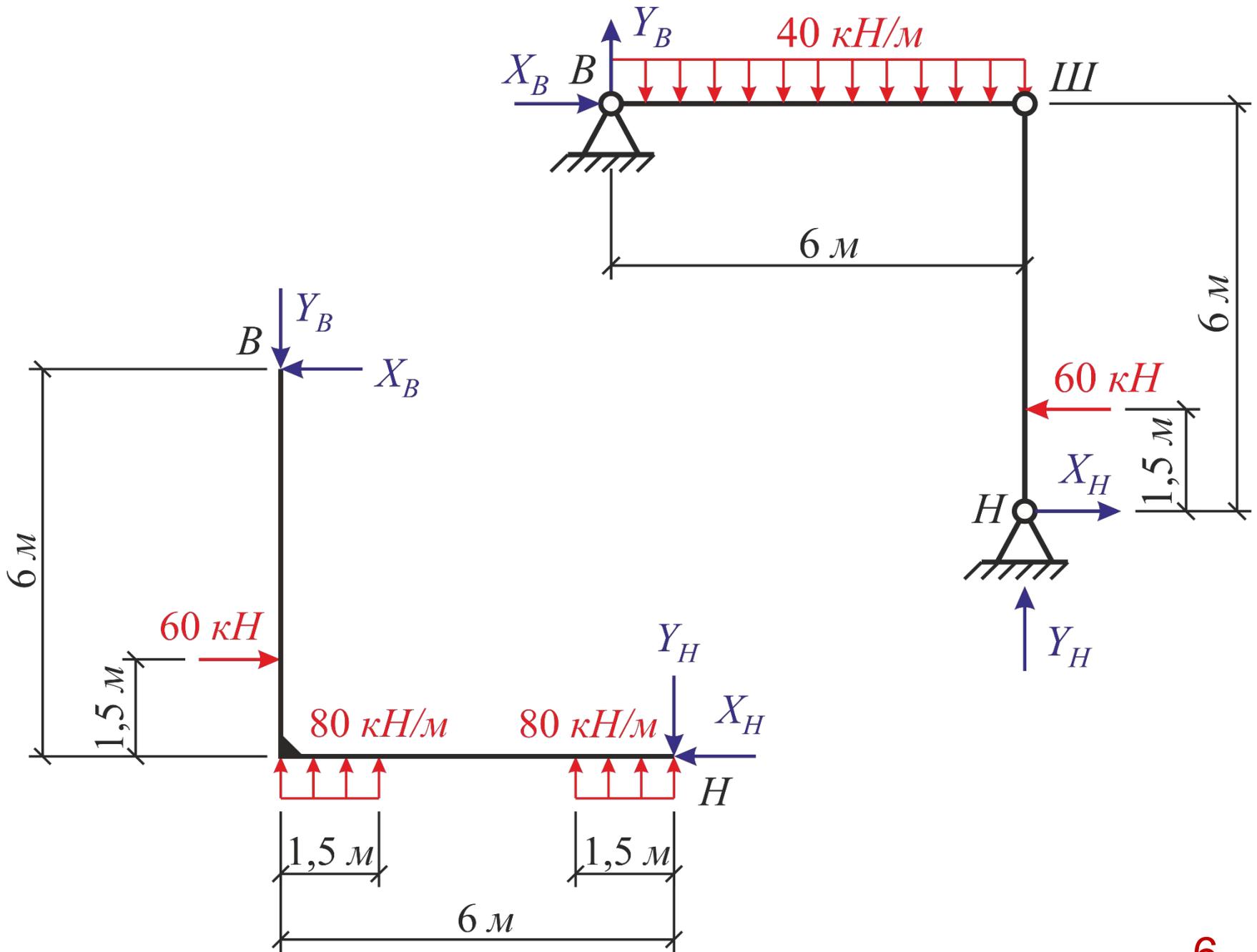
Наносим на поверхность балки-стенки сетку с шагом $\Delta x = \Delta y = 1,5$ м и нумеруем узлы сетки с учетом симметрии.

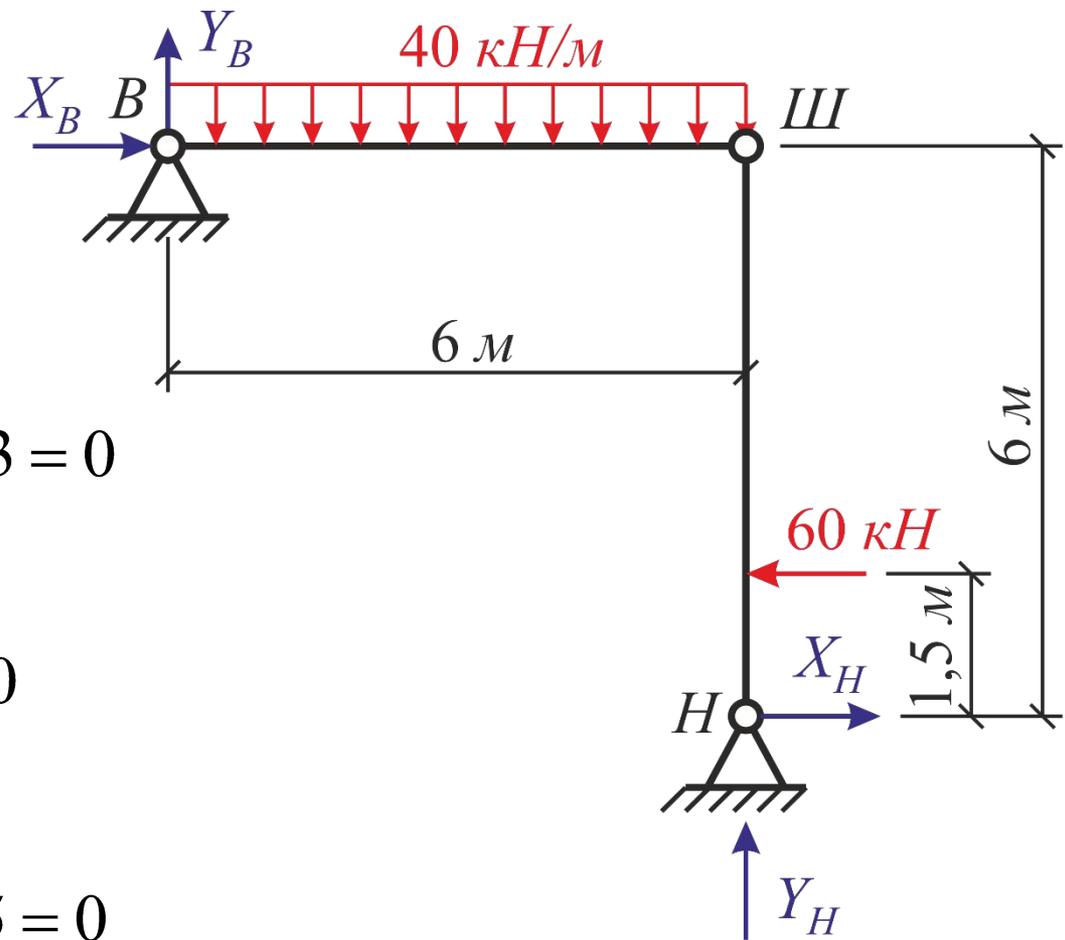


Определяем значения функции напряжений в контурных и в законтурных точках используя рамную аналогию.

Строим эпюры: изгибающих моментов « M » и продольных сил « N » в любой статически определимой раме, имеющей очертание контура балки-стенки.







$$\Sigma M_{III}^{B\check{C}} = 0; -Y_B \cdot 6 + 40 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$Y_B = 120 \text{ kH}$$

$$\Sigma F_y = 0; Y_B + Y_H - 40 \cdot 6 = 0$$

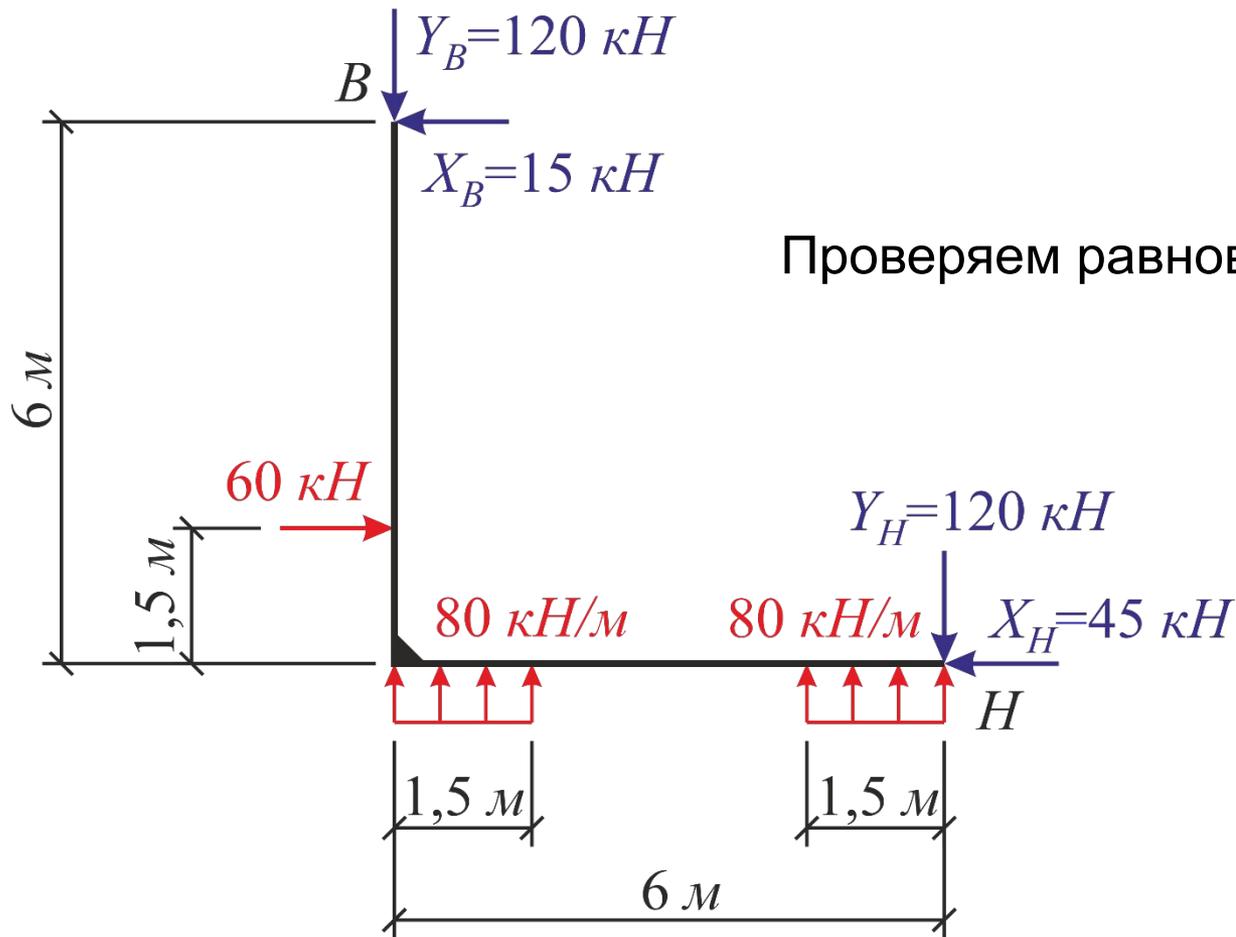
$$Y_H = 120 \text{ kH}$$

$$\Sigma M_{III}^{H\check{C}} = 0; X_H \cdot 6 - 60 \cdot 4,5 = 0$$

$$X_H = 45 \text{ kH}$$

$$\Sigma F_x = 0; X_B + X_H - 60 = 0$$

$$X_B = 15 \text{ kH}$$

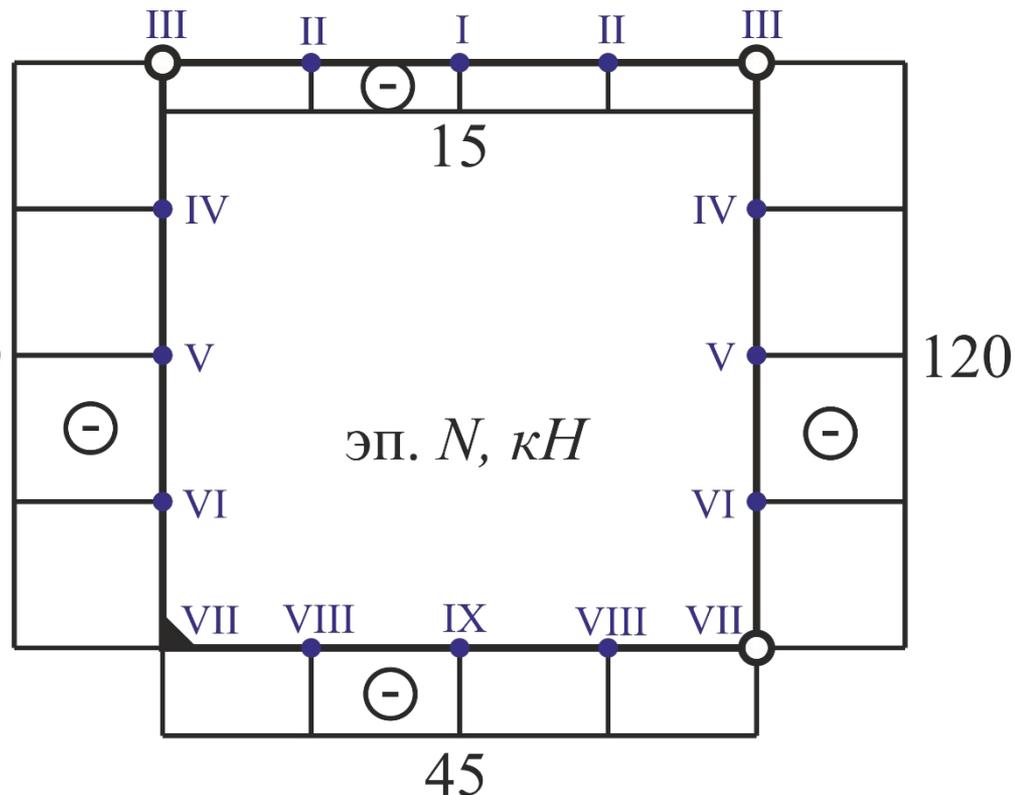
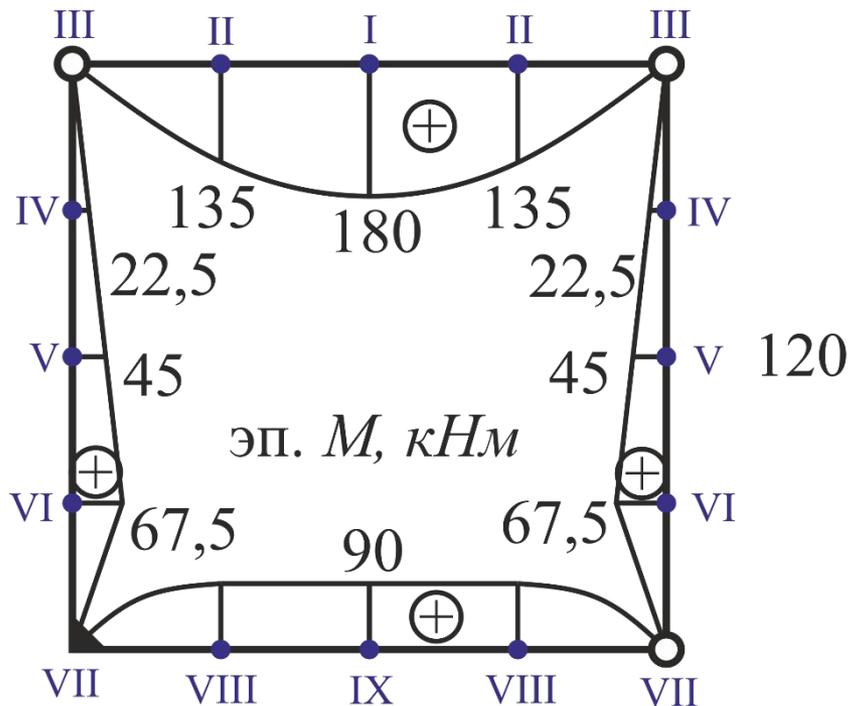


Проверяем равновесие нижней части

$$\Sigma F_x = 0; 60 - 15 - 45 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; 2 \cdot 80 \cdot 1,5 - 120 - 120 = 0$$

$$\Sigma M_B = 0; 60 \cdot 4,5 + 80 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 80 \cdot 1,5 \cdot 5,25 - 120 \cdot 6 - 45 \cdot 6 = 0$$

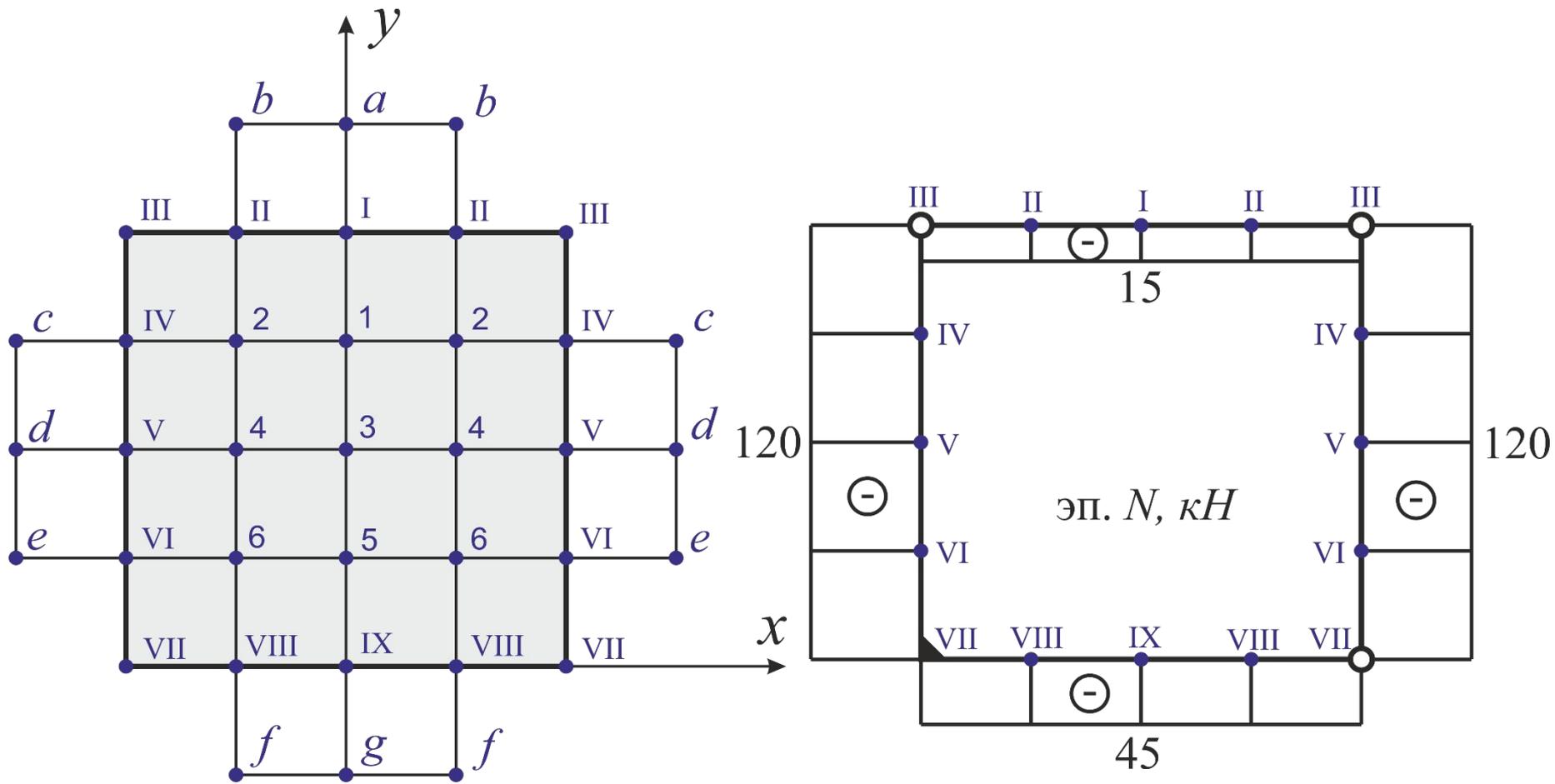


Значения функции напряжений в контурных точках $\varphi_K = M_K$

$$\varphi_I = 180 \text{ кНм} \quad \varphi_{IV} = 22,5 \text{ кНм} \quad \varphi_{VII} = 0$$

$$\varphi_{II} = 135 \text{ кНм} \quad \varphi_V = 45 \text{ кНм} \quad \varphi_{VIII} = 90 \text{ кНм}$$

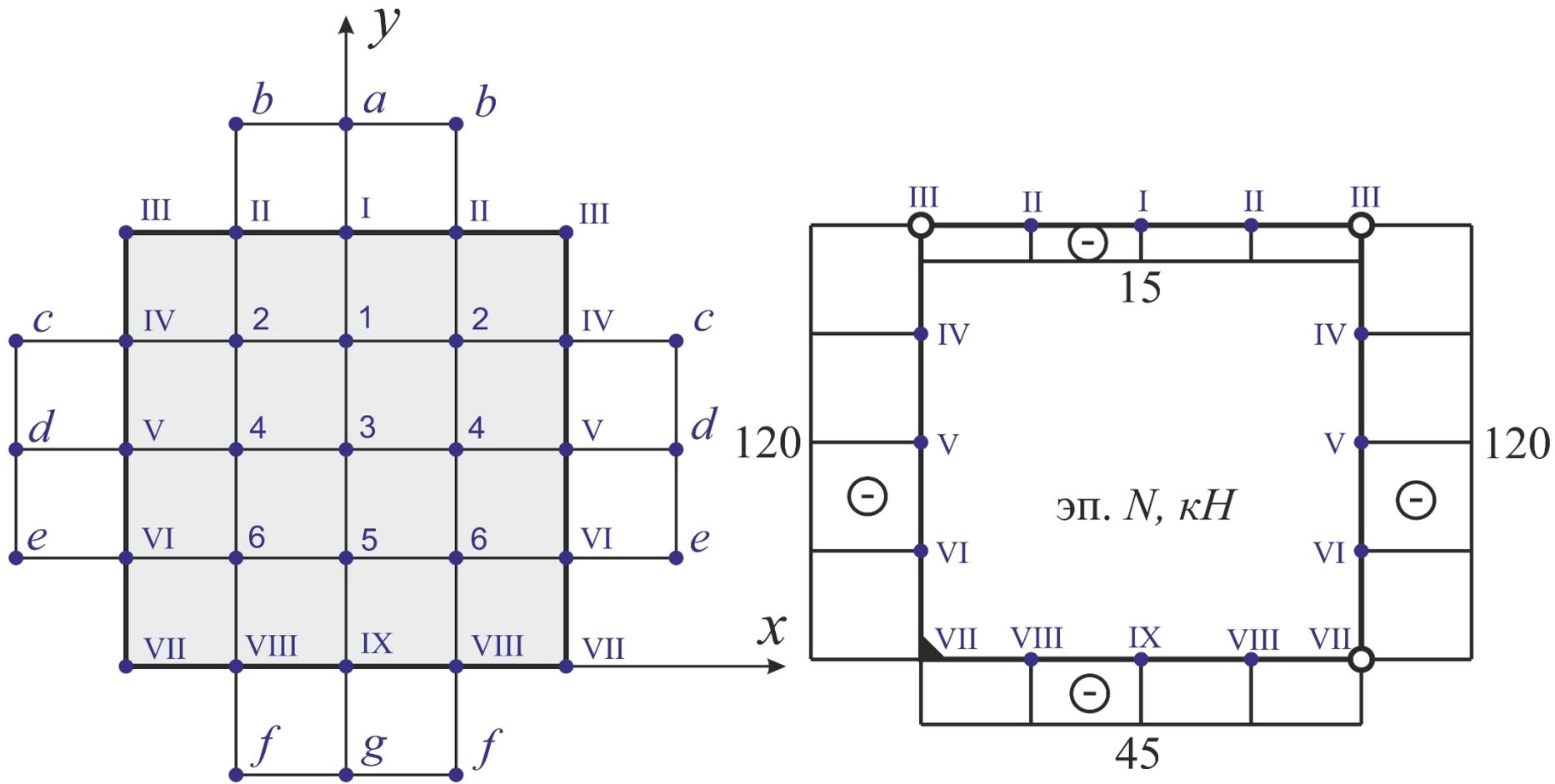
$$\varphi_{III} = 0 \quad \varphi_{VI} = 67,5 \text{ кНм} \quad \varphi_{IX} = 90 \text{ кНм}$$



$$\varphi_a = \varphi_1 + 2 \cdot \Delta y \cdot N_I = \varphi_1 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-15) = \varphi_1 - 45$$

$$\varphi_b = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta y \cdot N_{II} = \varphi_2 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-15) = \varphi_2 - 45$$

$$\varphi_c = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta x \cdot N_{IV} = \varphi_2 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-120) = \varphi_2 - 360$$



$$\varphi_d = \varphi_4 + 2 \cdot \Delta x \cdot N_V = \varphi_4 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-120) = \varphi_4 - 360$$

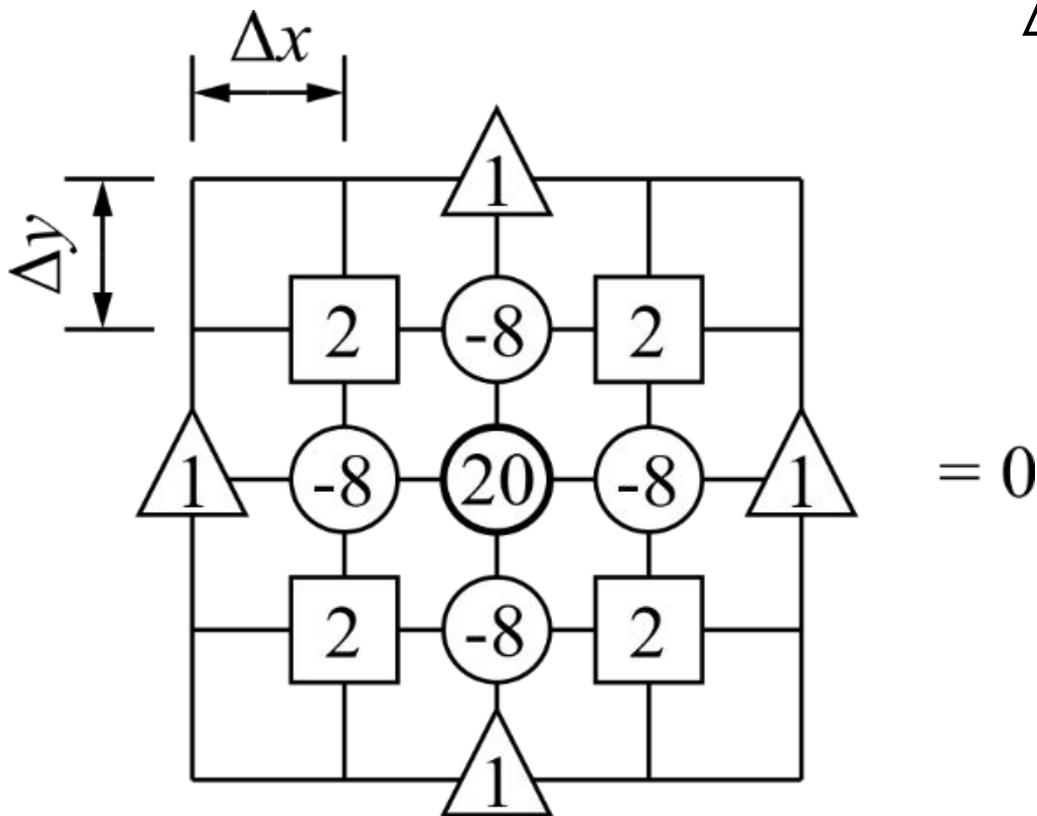
$$\varphi_e = \varphi_6 + 2 \cdot \Delta x \cdot N_{VI} = \varphi_6 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-120) = \varphi_6 - 360$$

$$\varphi_f = \varphi_6 + 2 \cdot \Delta y \cdot N_{VIII} = \varphi_6 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-45) = \varphi_6 - 135$$

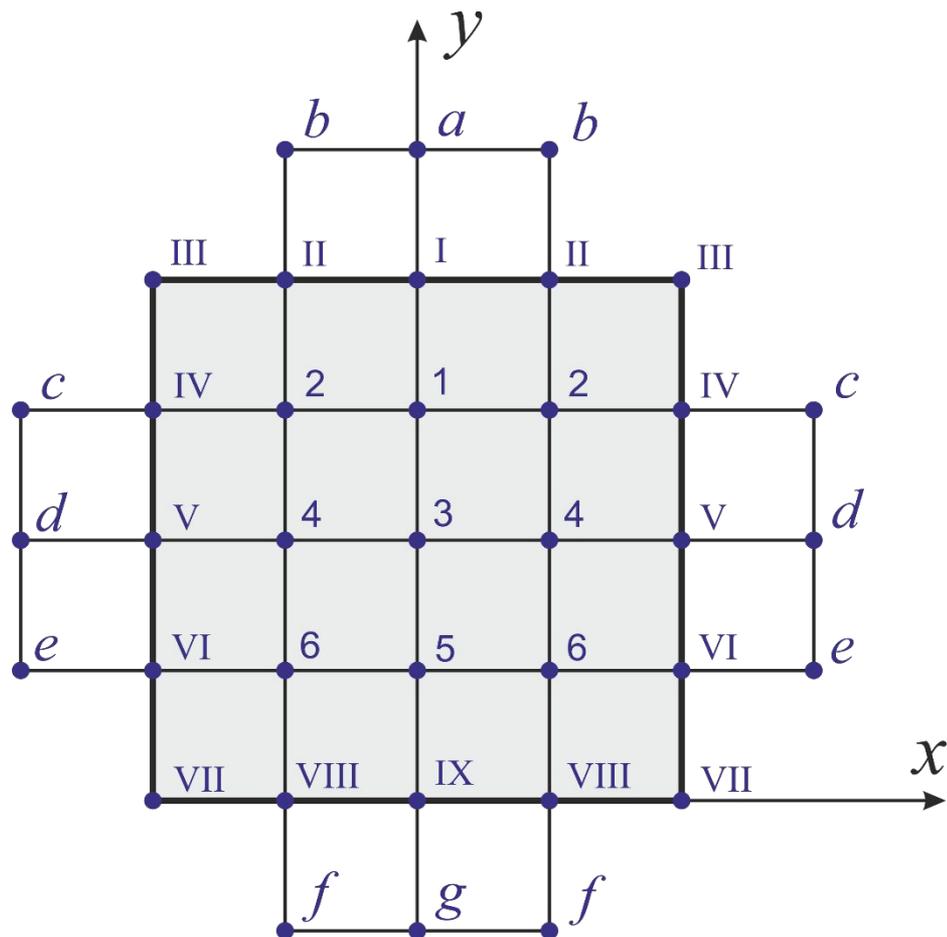
$$\varphi_g = \varphi_5 + 2 \cdot \Delta y \cdot N_{IX} = \varphi_5 + 2 \cdot 1,5 \cdot (-45) = \varphi_5 - 135$$

Записываем уравнение совместности деформаций в конечных разностях для точек внутри контура балки-стенки с использованием шаблона

$$\Delta x = \Delta y$$

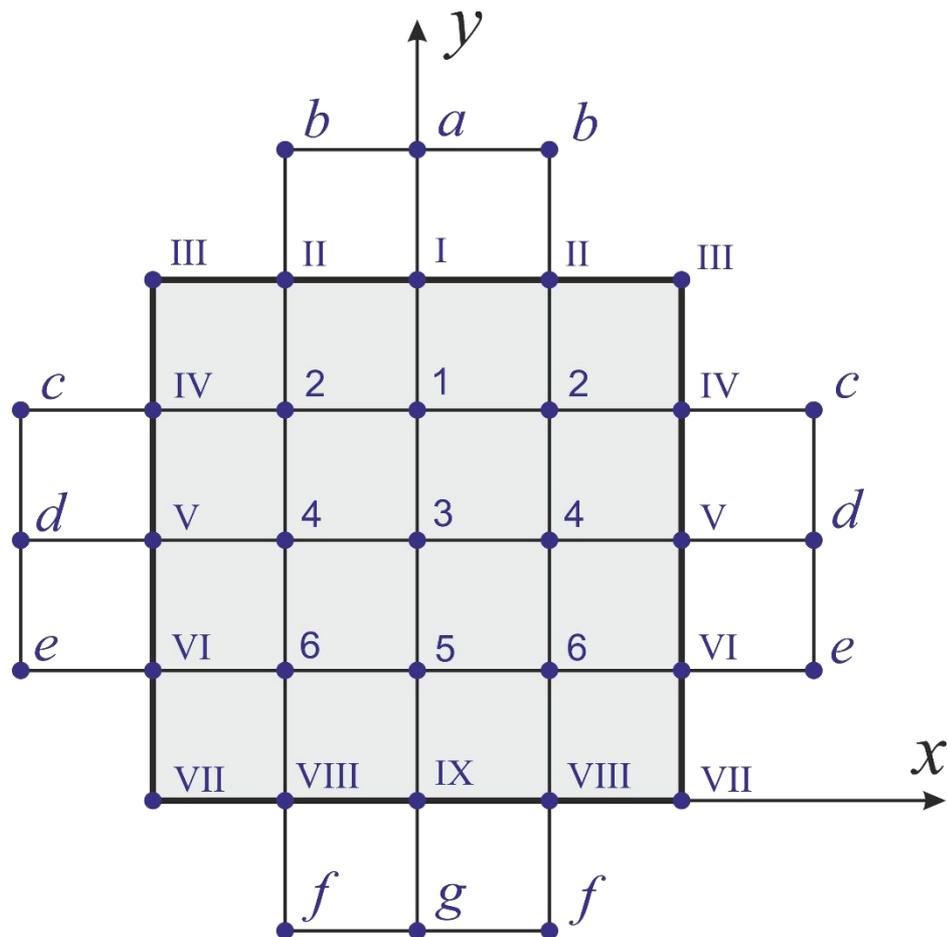


Точка 1



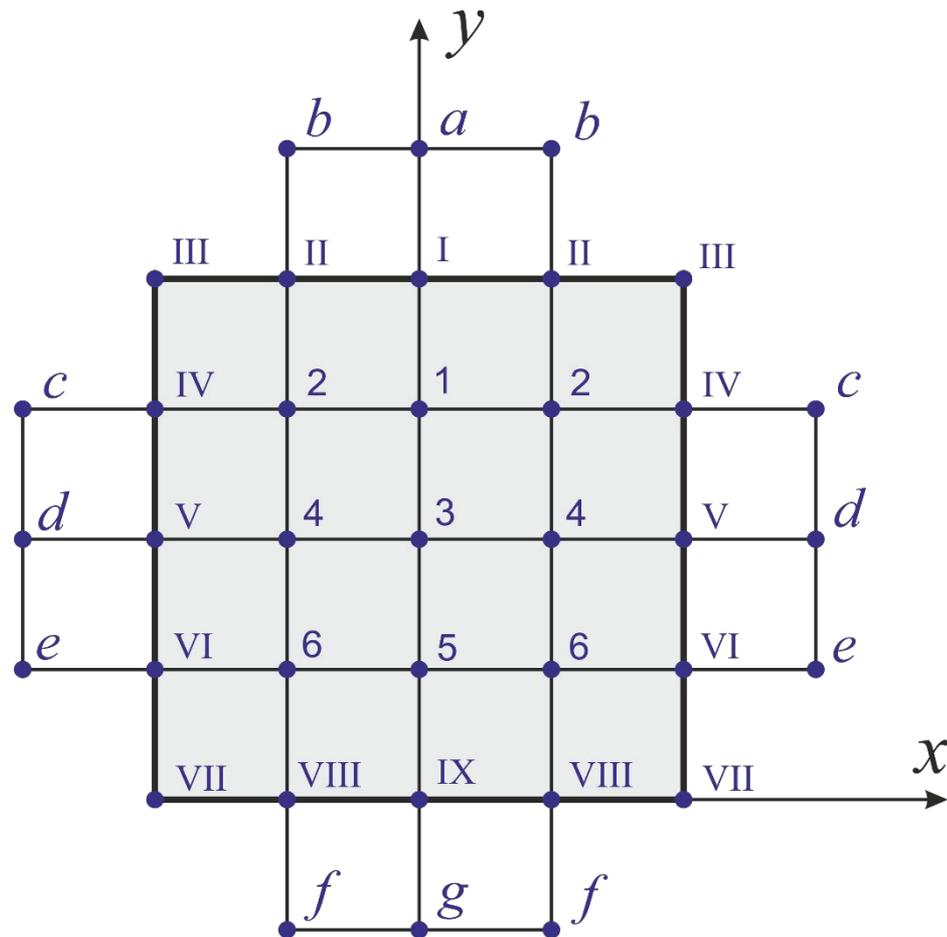
$$20\varphi_1 - 8(\varphi_I + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_2) + 2(\varphi_{II} + \varphi_{II} + \varphi_4 + \varphi_4) + \varphi_a + \varphi_{IV} + \varphi_5 + \varphi_{IV} = 0$$

Точка 2



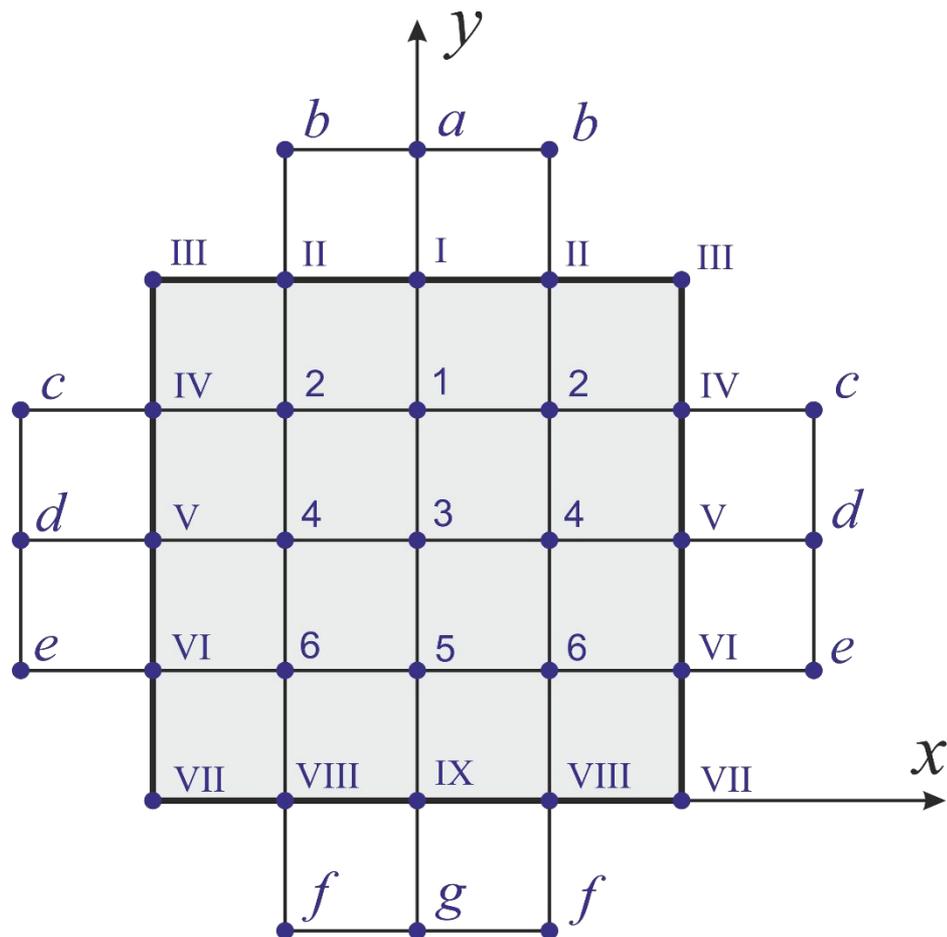
$$20\varphi_2 - 8(\varphi_{II} + \varphi_{IV} + \varphi_4 + \varphi_1) + 2(\varphi_I + \varphi_{III} + \varphi_V + \varphi_3) + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_6 + \varphi_2 = 0$$

Точка 3



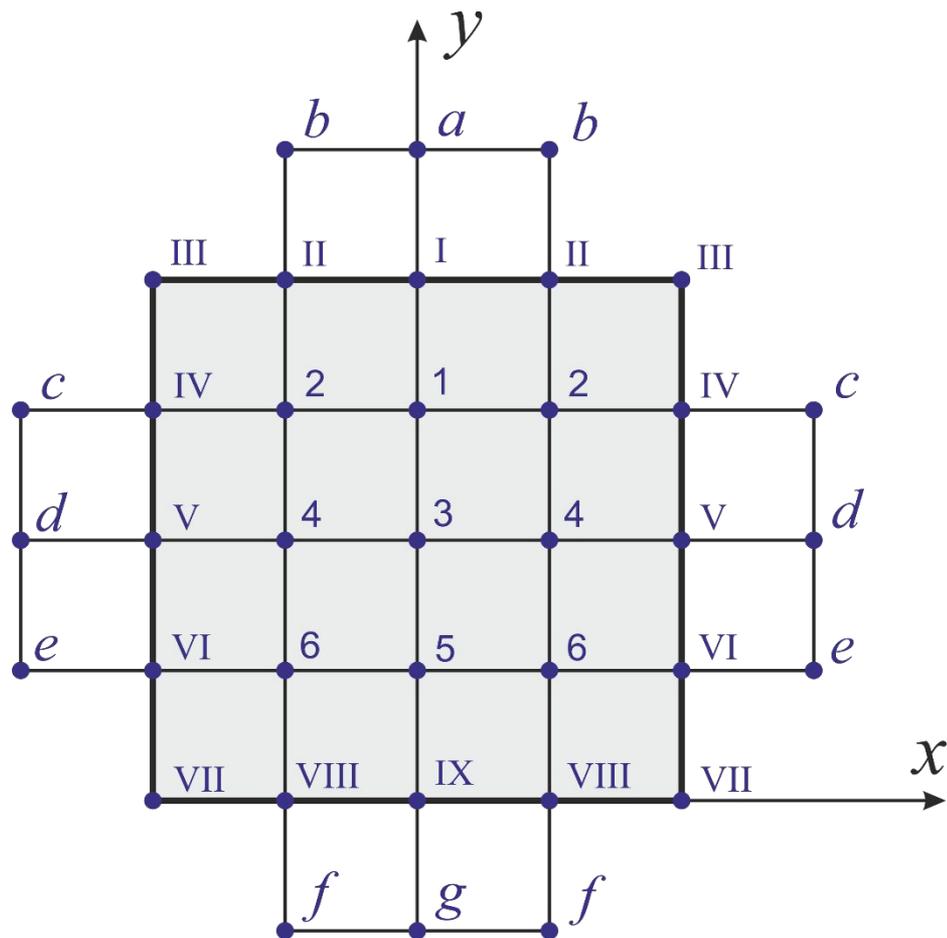
$$20\varphi_3 - 8(\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_4) + 2(\varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_6 + \varphi_6) + \varphi_I + \varphi_V + \varphi_{IX} + \varphi_V = 0$$

Точка 4



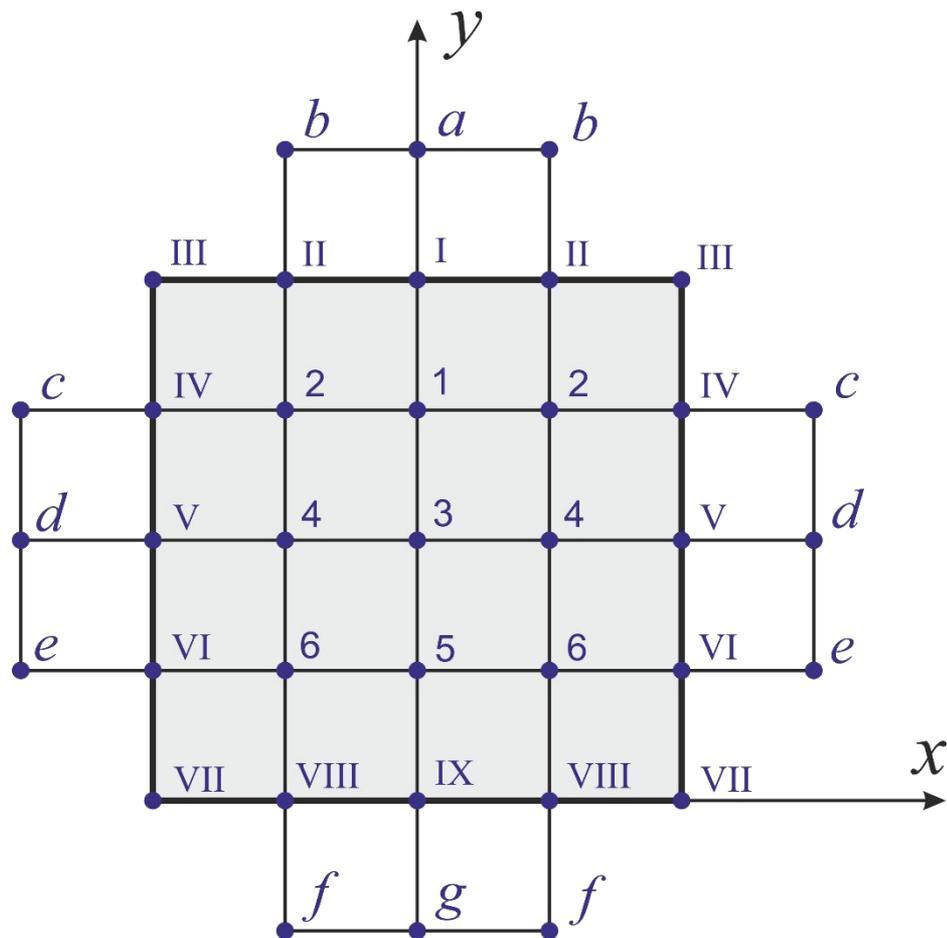
$$20\varphi_4 - 8(\varphi_2 + \varphi_V + \varphi_6 + \varphi_3) + 2(\varphi_1 + \varphi_{IV} + \varphi_{VI} + \varphi_5) + \varphi_{II} + \varphi_d + \varphi_{VIII} + \varphi_4 = 0$$

Точка 5



$$20\varphi_5 - 8(\varphi_3 + \varphi_6 + \varphi_{IX} + \varphi_6) + 2(\varphi_4 + \varphi_4 + \varphi_{VIII} + \varphi_{VIII}) + \\ + \varphi_1 + \varphi_{VI} + \varphi_g + \varphi_{VI} = 0$$

Точка 6



$$20\varphi_6 - 8(\varphi_4 + \varphi_{VI} + \varphi_{VIII} + \varphi_5) + 2(\varphi_3 + \varphi_V + \varphi_{VII} + \varphi_{IX}) + \varphi_2 + \varphi_e + \varphi_f + \varphi_6 = 0$$

После подстановки значений функции напряжений в контурных и в законтурных точках балки-стенки, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{vmatrix} 21 & -16 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ -8 & 23 & 2 & -8 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & 20 & -16 & -8 & 4 \\ 2 & -8 & -8 & 22 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -8 & 4 & 21 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & -8 & 23 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 900 \\ 1215 \\ -360 \\ 315 \\ 360 \\ 1485 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 2 \\ \\ \times 2 \\ \\ \times 2 \end{matrix}$$

Приводим систему уравнений к симметричному виду.

Если система уравнений к симметричному виду не приводится, то ищем ошибку в расчетах.

Симметричная система линейных алгебраических уравнений

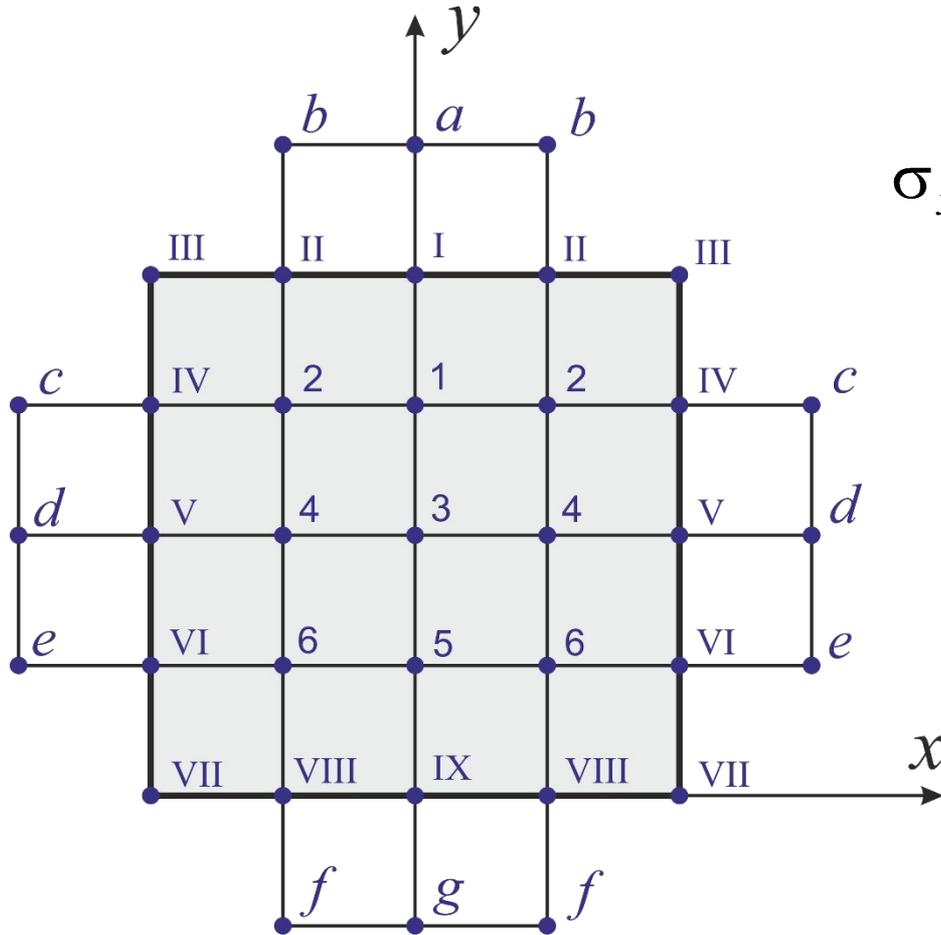
$$\begin{vmatrix} 21 & -16 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ -16 & 46 & 4 & -16 & 0 & 2 \\ -8 & 4 & 20 & -16 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & -16 & 44 & 4 & -16 \\ 1 & 0 & -8 & 4 & 21 & -16 \\ 0 & 2 & 4 & -16 & -16 & 46 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 900 \\ 2430 \\ -360 \\ 630 \\ 360 \\ 2970 \end{vmatrix}$$

Решаем систему уравнений на ЭВМ и находим величины функции напряжений в узлах сетки.

Значения функции напряжений в узлах сетки.

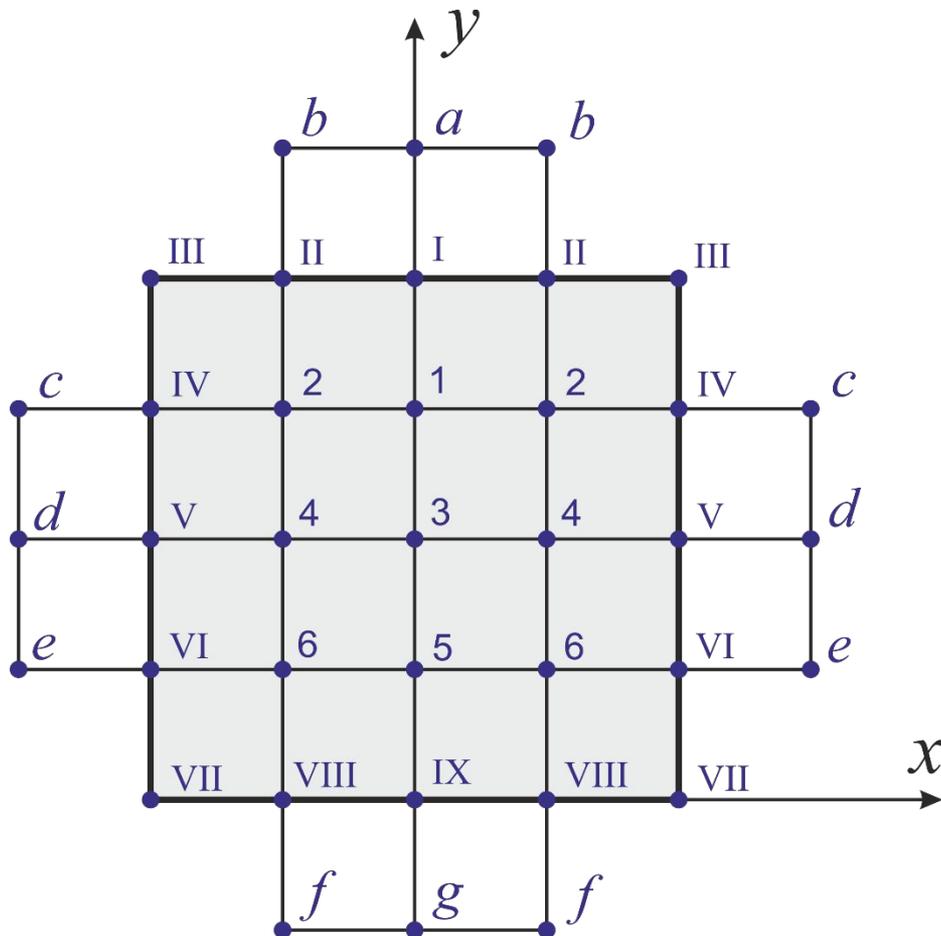
$$\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{array} = \begin{array}{l} 198,97 \\ 156,28 \\ 203,76 \\ 169,35 \\ 174,74 \\ 159,74 \end{array} \quad \text{кНм}$$

Строим эпюру σ_x в сечении $a-g$



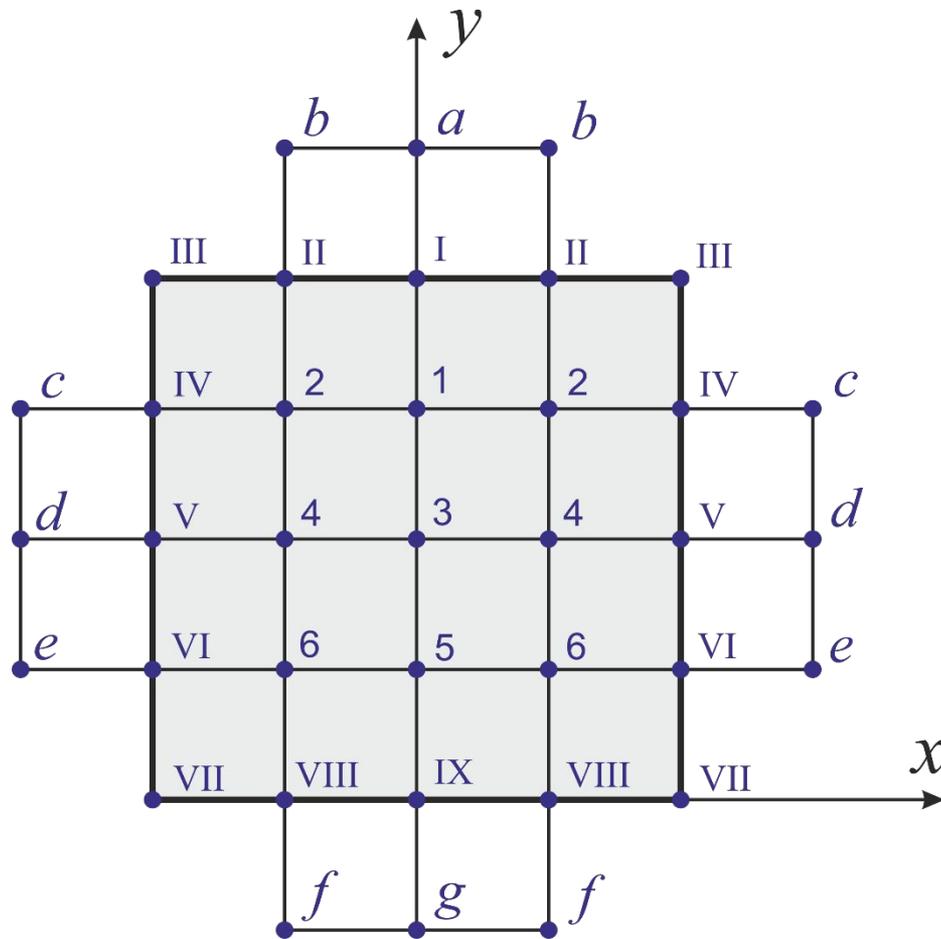
$$\sigma_{x,C} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_C \approx \frac{\varphi_B - 2\varphi_C + \varphi_H}{\Delta y^2}$$

Точка I



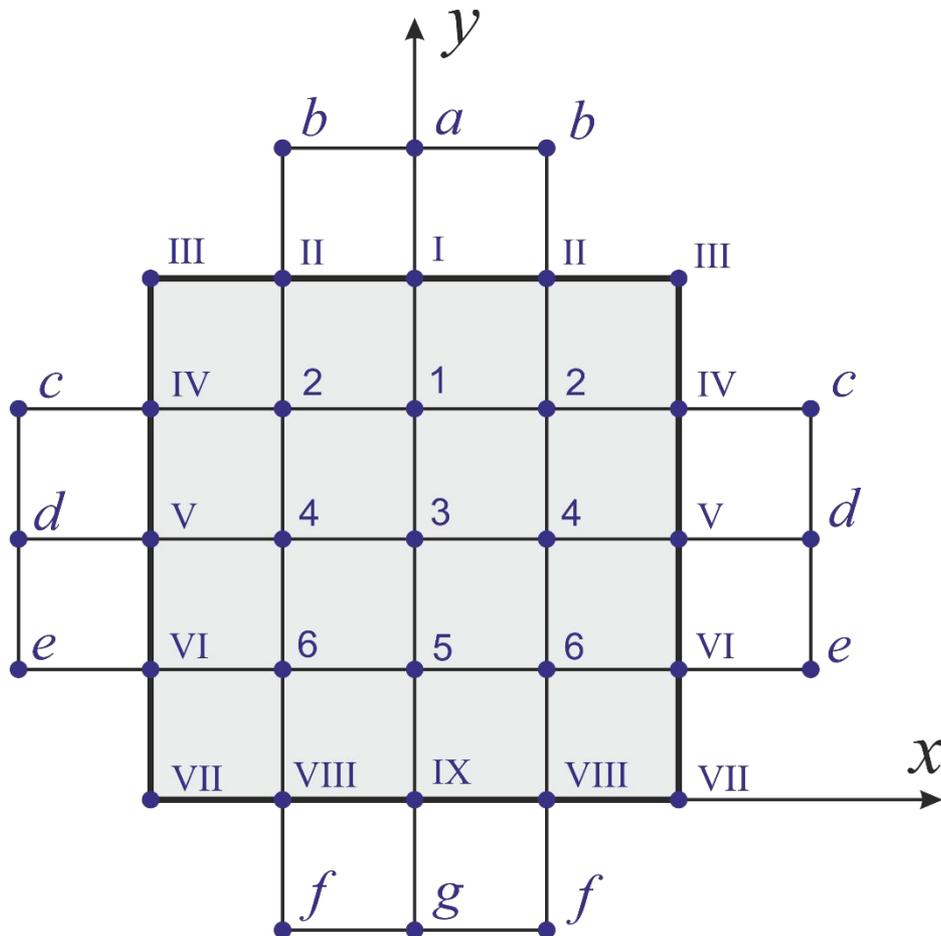
$$\sigma_{x,I} \approx \frac{\varphi_a - 2\varphi_I + \varphi_1}{\Delta y^2} = \frac{(198,97 - 45) - 2 \cdot 180 + 198,97}{1,5^2} = -3,138 \text{ кПа}$$

Точка 1



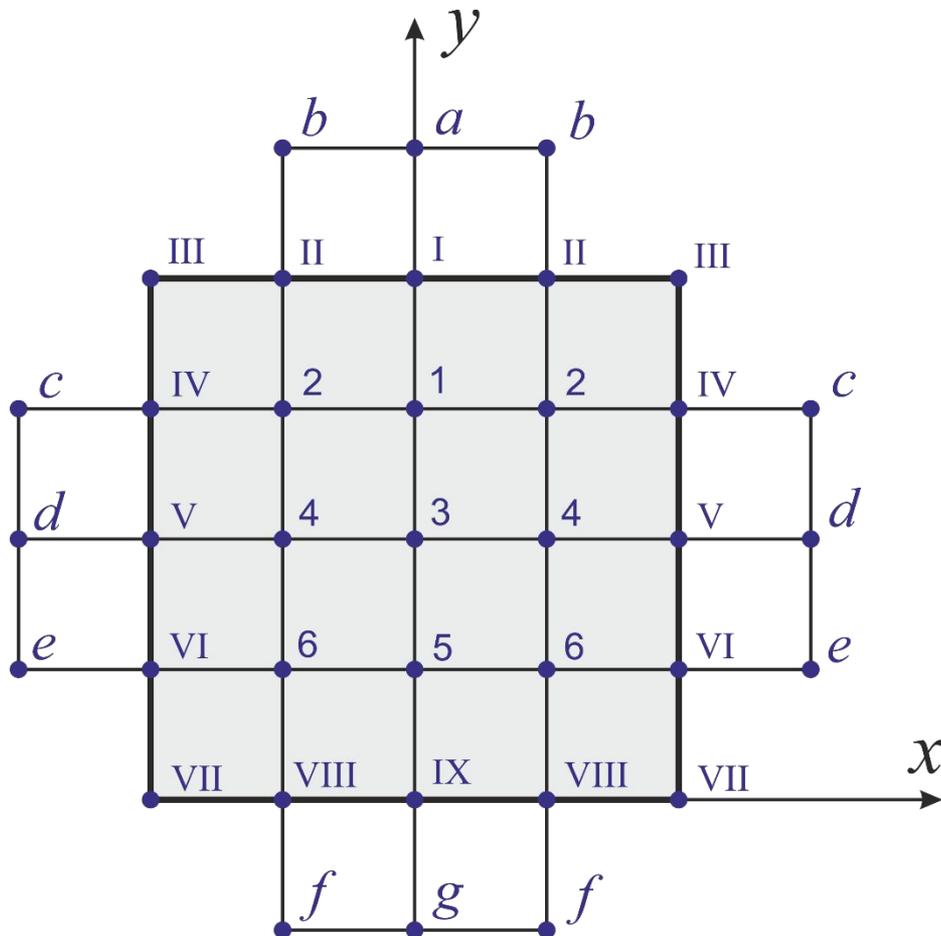
$$\sigma_{x,1} \approx \frac{\varphi_I - 2\varphi_1 + \varphi_3}{\Delta y^2} = \frac{180 - 2 \cdot 198,97 + 203,76}{1,5^2} = -6,302 \text{ кПа}$$

Точка 5



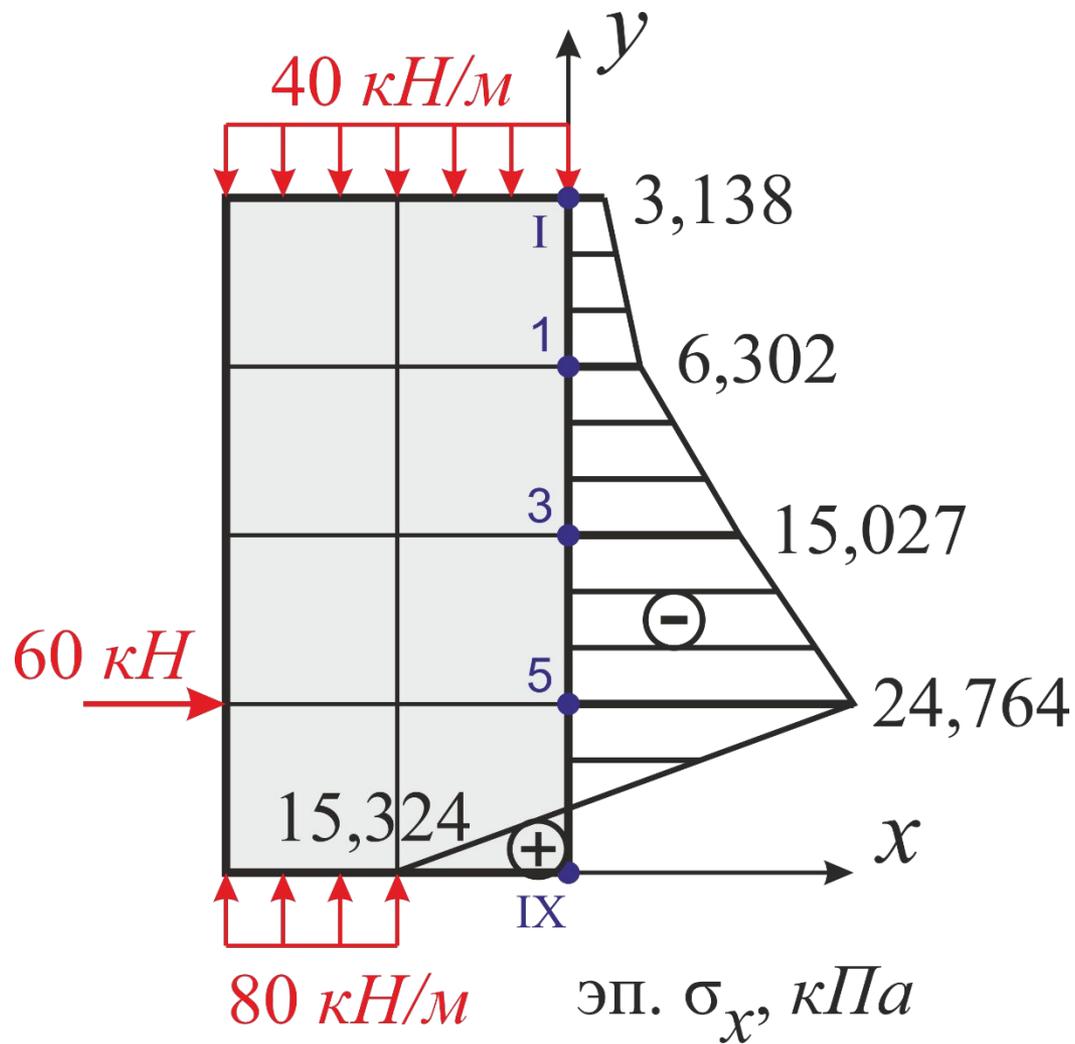
$$\sigma_{x,5} \approx \frac{\varphi_3 - 2\varphi_5 + \varphi_{IX}}{\Delta y^2} = \frac{203,76 - 2 \cdot 174,74 + 90}{1,5^2} = -24,764 \text{ кПа}$$

Точка IX

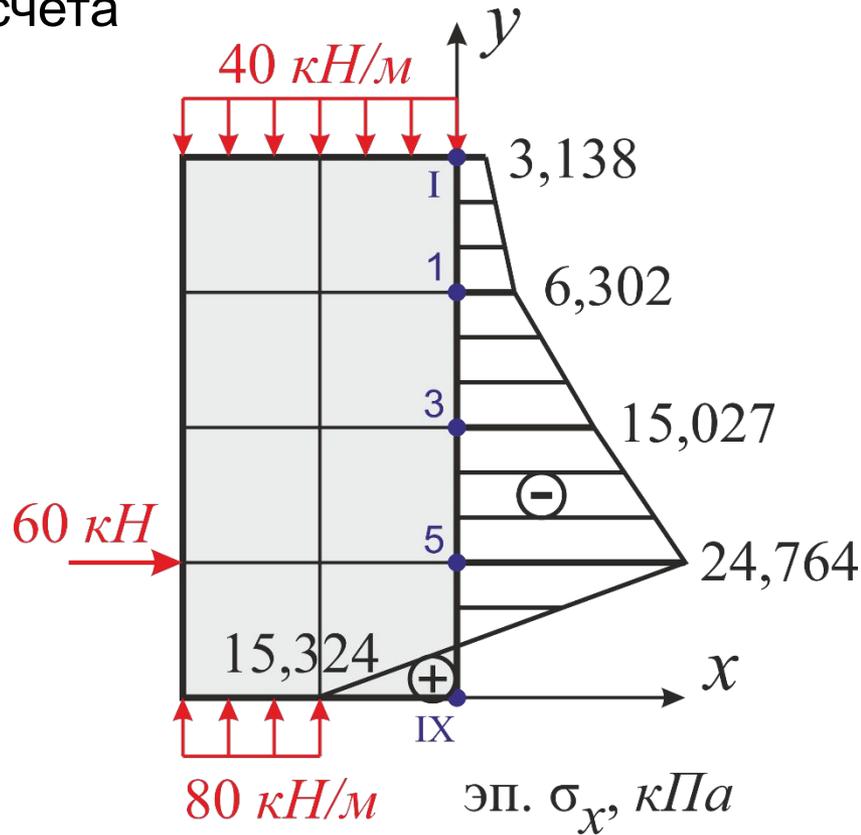


$$\sigma_{x,IX} \approx \frac{\varphi_5 - 2\varphi_{IX} + \varphi_g}{\Delta y^2} = \frac{174,74 - 2 \cdot 90 + (174,74 - 135)}{1,5^2} =$$

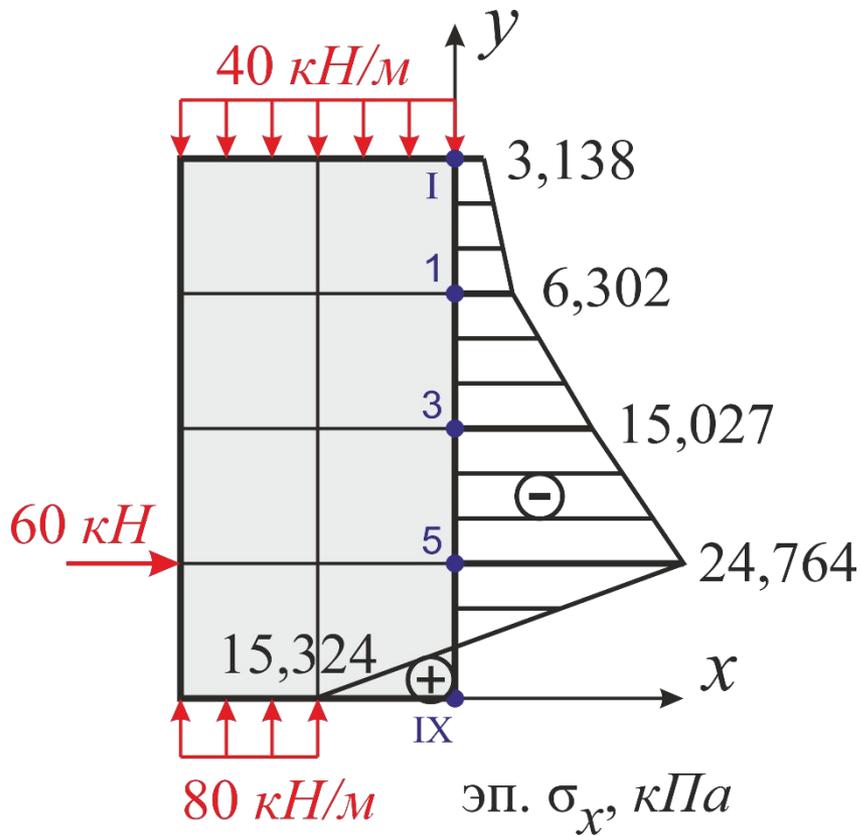
$$= 15,324 \text{ кПа}$$



Проверка расчета



$$\Sigma F_x = 0; 60 + 1,5 \cdot \left(\frac{-3,138 - 6,302}{2} + \frac{-6,302 - 15,027}{2} + \frac{-15,027 - 24,764}{2} + \frac{-24,764 + 15,324}{2} \right) = 0$$



$$\begin{aligned}
 \Sigma M_{\text{IX}} = 0; & 40 \cdot 3 \cdot 1,5 - 80 \cdot 1,5 \cdot 2,25 - \\
 & - 60 \cdot 1,5 + 3,138 \cdot 1,5 \cdot 3,5 \cdot 1,5 + \\
 & + \frac{6,302 - 3,138}{2} \cdot 1,5 \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 + \\
 & + 6,302 \cdot 1,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 + \\
 & + \frac{15,027 - 6,302}{2} \cdot 1,5 \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 + \\
 & + 15,027 \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + \\
 & + \frac{24,764 - 15,027}{2} \cdot 1,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 +
 \end{aligned}$$

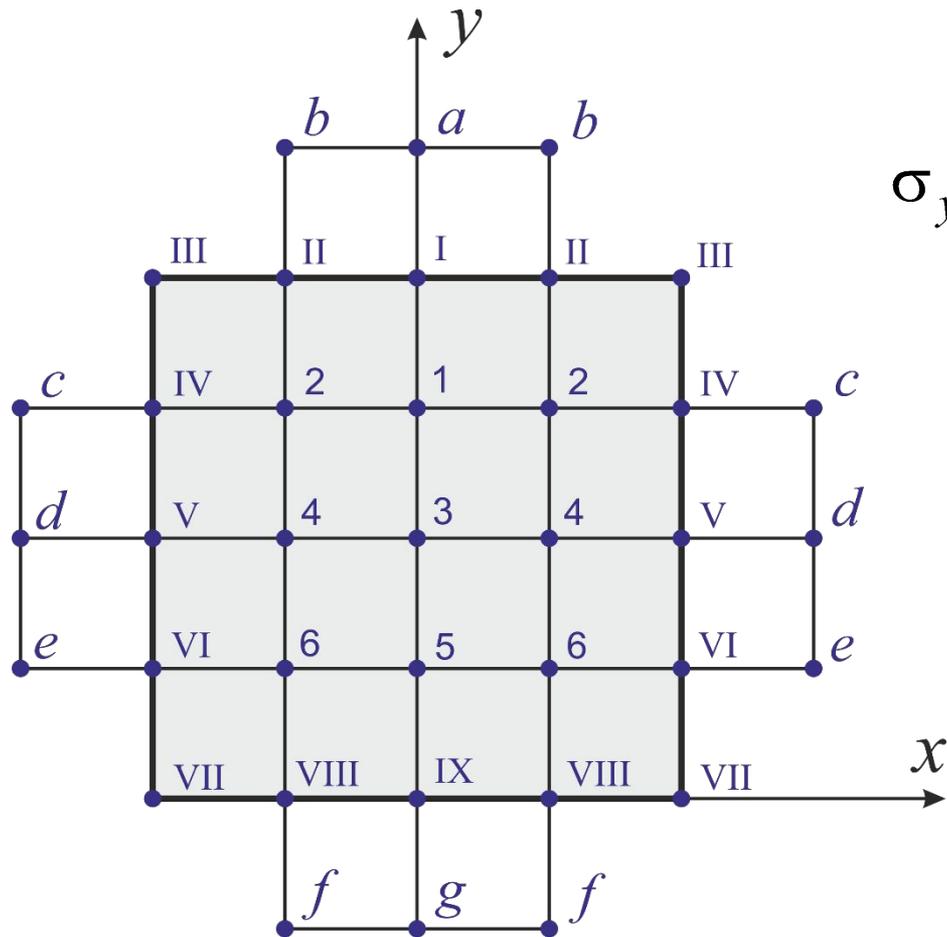
$$+ 24,764 \cdot 1,5 \cdot 0,75 - \frac{24,764 + 15,324}{2} \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 = 368,11 - 375,03 =$$

$$= -6,92$$

Погрешность расчета

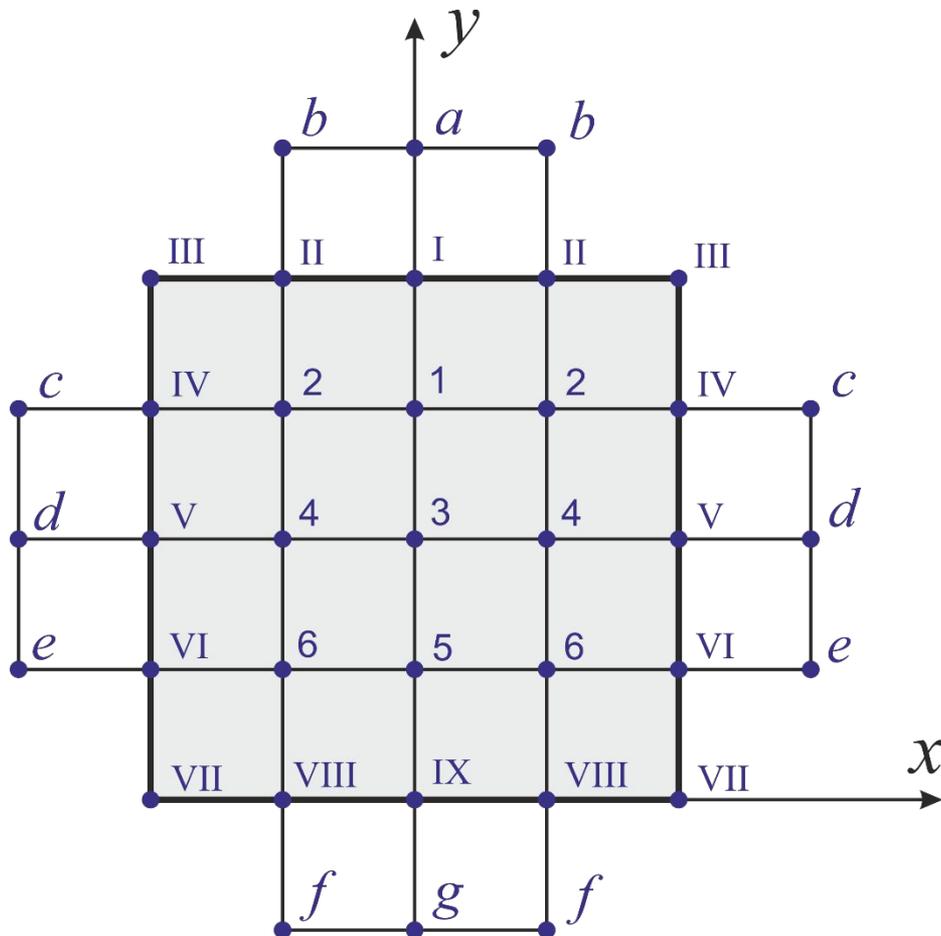
$$\delta = \frac{-6,92}{-375,03} 100\% = 1,8\%$$

Строим эпюру σ_y в сечении $d-d$



$$\sigma_{y,C} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_C \approx \frac{\varphi_{\text{II}} - 2\varphi_C + \varphi_{\text{I}}}{\Delta x^2}$$

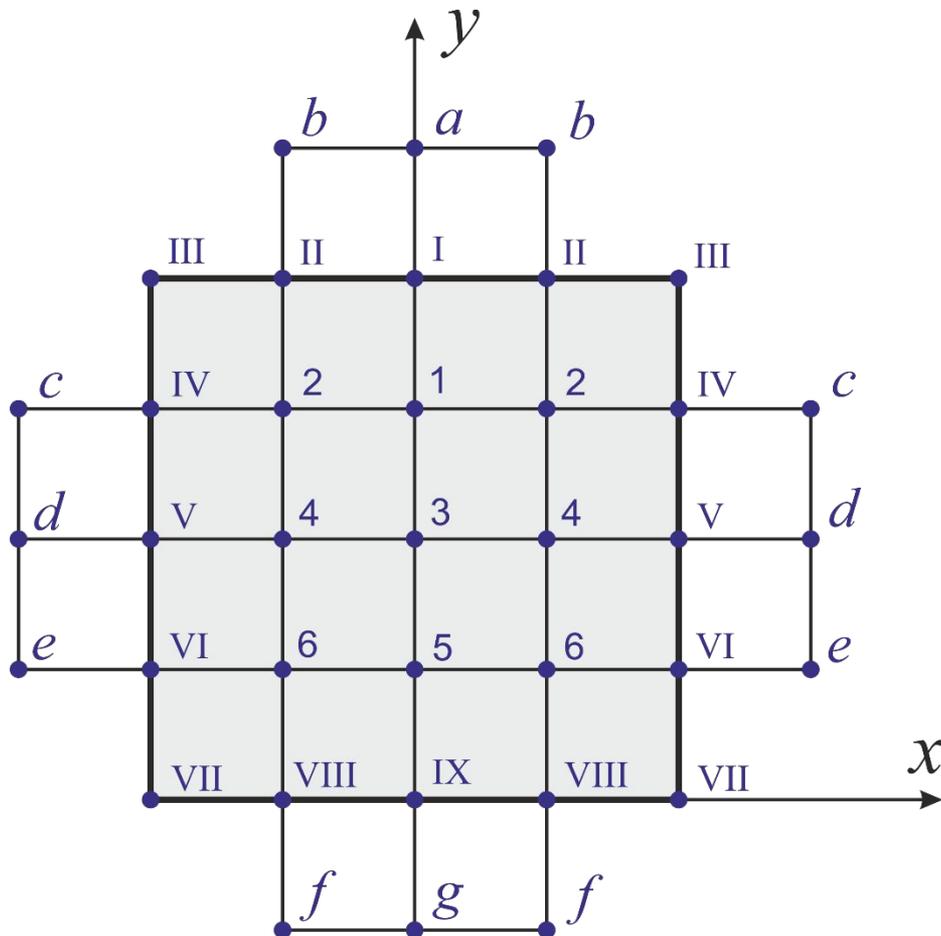
Точка V



$$\sigma_{y,V} \approx \frac{\varphi_4 - 2\varphi_V + \varphi_d}{\Delta x^2} = \frac{169,35 - 2 \cdot 45 + (169,35 - 360)}{1,5^2} =$$

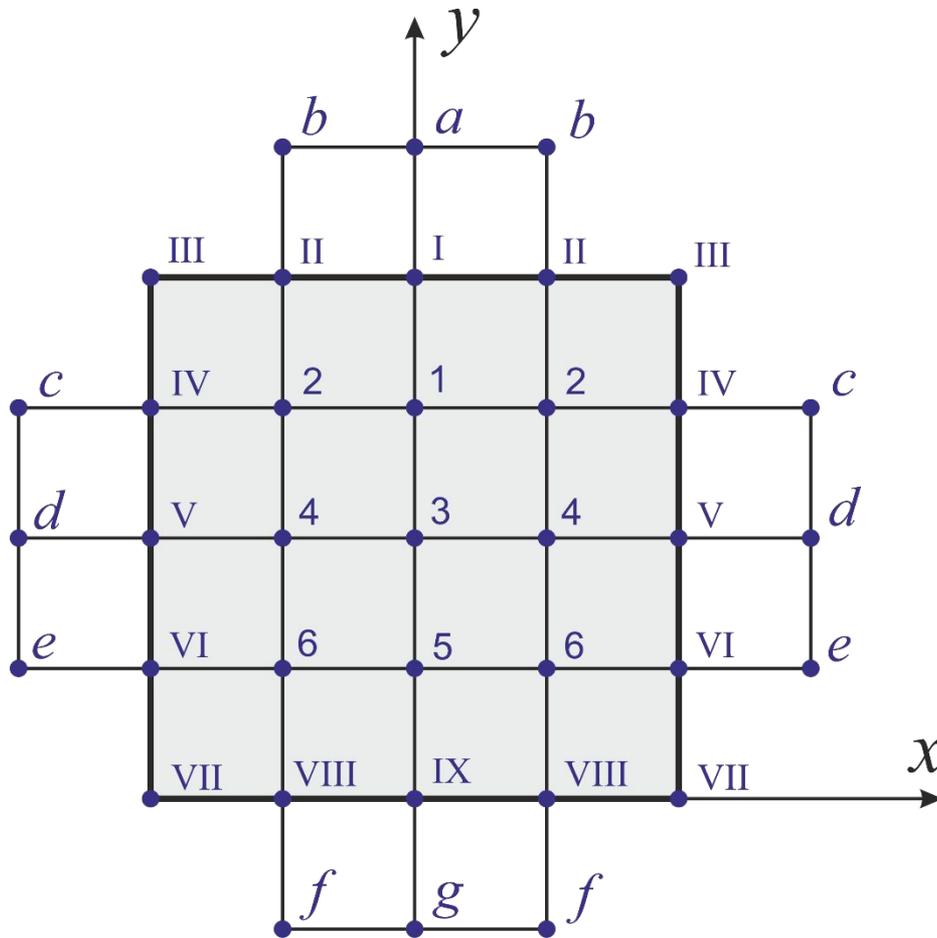
$$= -49,467 \text{ кПа}$$

Точка 4

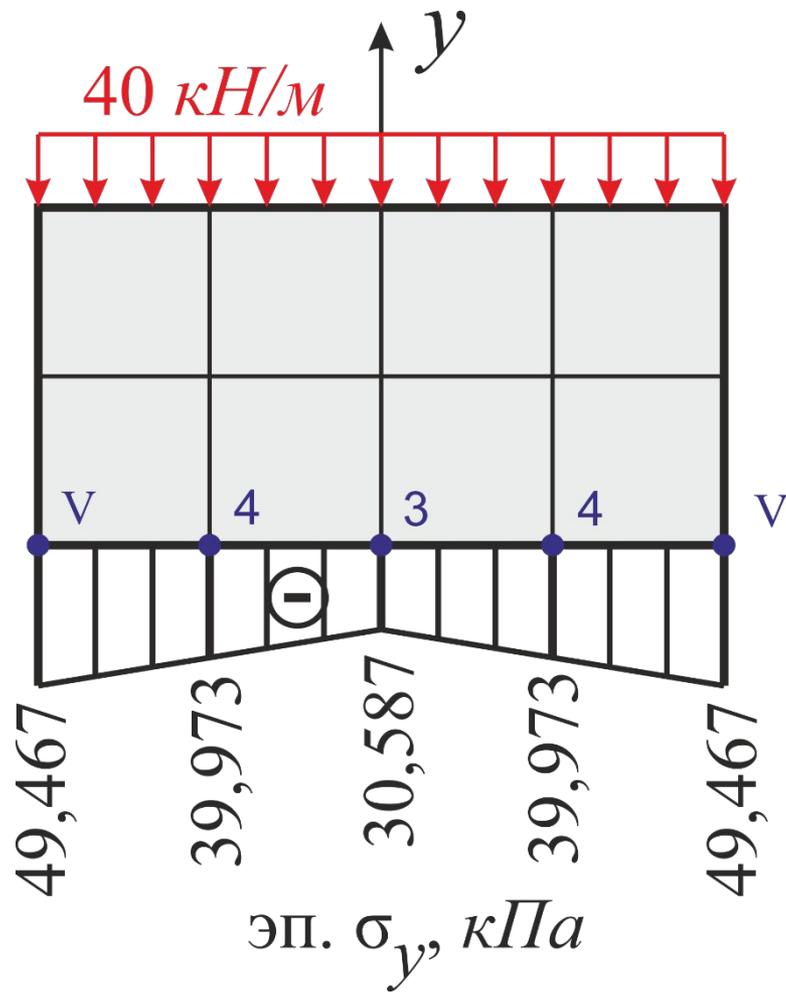


$$\sigma_{y,4} \approx \frac{\varphi_3 - 2\varphi_4 + \varphi_V}{\Delta x^2} = \frac{203,76 - 2 \cdot 169,35 + 45}{1,5^2} = -39,973 \text{ кПа}$$

Точка 3



$$\sigma_{y,3} \approx \frac{\varphi_4 - 2\varphi_3 + \varphi_4}{\Delta x^2} = \frac{169,35 - 2 \cdot 203,76 + 169,35}{1,5^2} = -30,587 \text{ кПа}$$

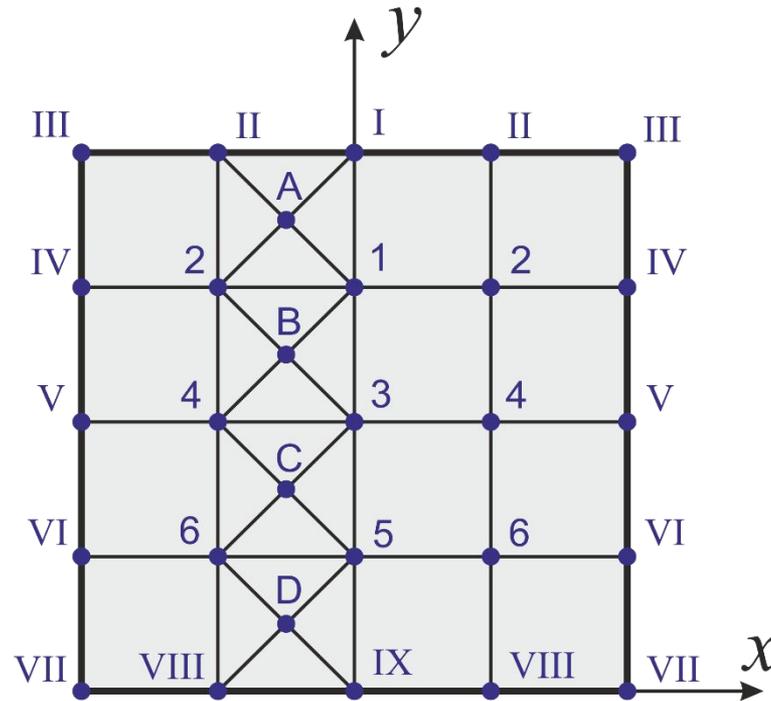


Проверка расчета

$$\Sigma F_y = 0; -40 \cdot 6 + 1,5 \cdot \left(\frac{49,467}{2} + 39,973 + 30,587 + 39,973 + \frac{49,467}{2} \right) =$$

$$= -240 + 240 = 0$$

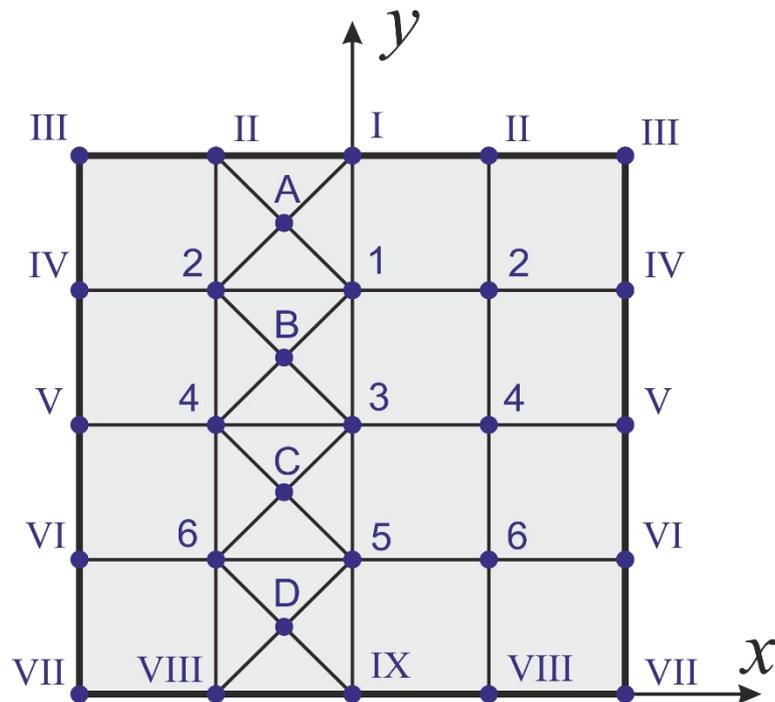
Точка А



$$\tau_{xy,A} \approx \frac{\varphi_{II} + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_I}{\Delta x \Delta y} = \frac{135 + 198,97 - 156,28 - 180}{1,5^2} =$$

$$= -1,027 \text{ кПа}$$

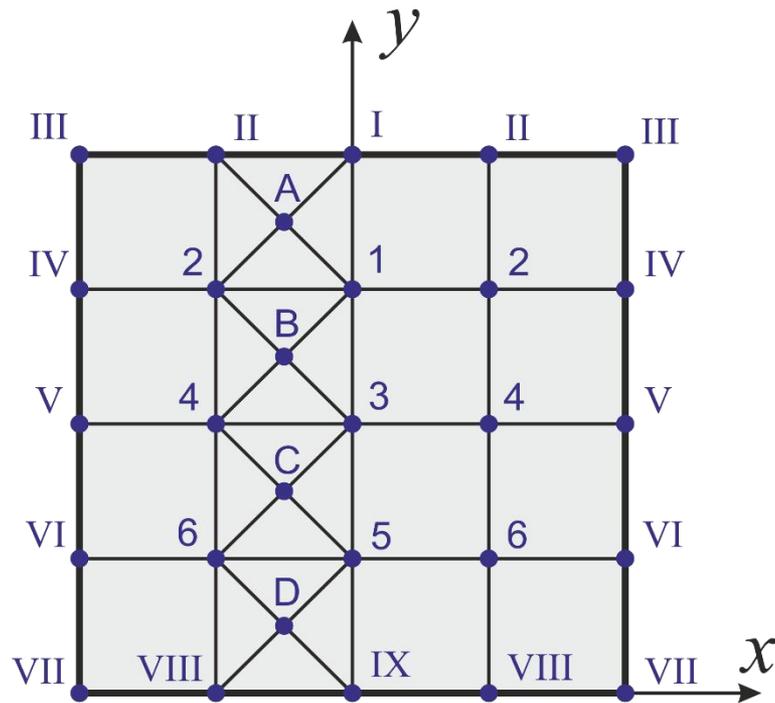
Точка В



$$\tau_{xy,B} \approx \frac{\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1}{\Delta x \Delta y} = \frac{156,28 + 203,76 - 169,35 - 198,97}{1,5^2} =$$

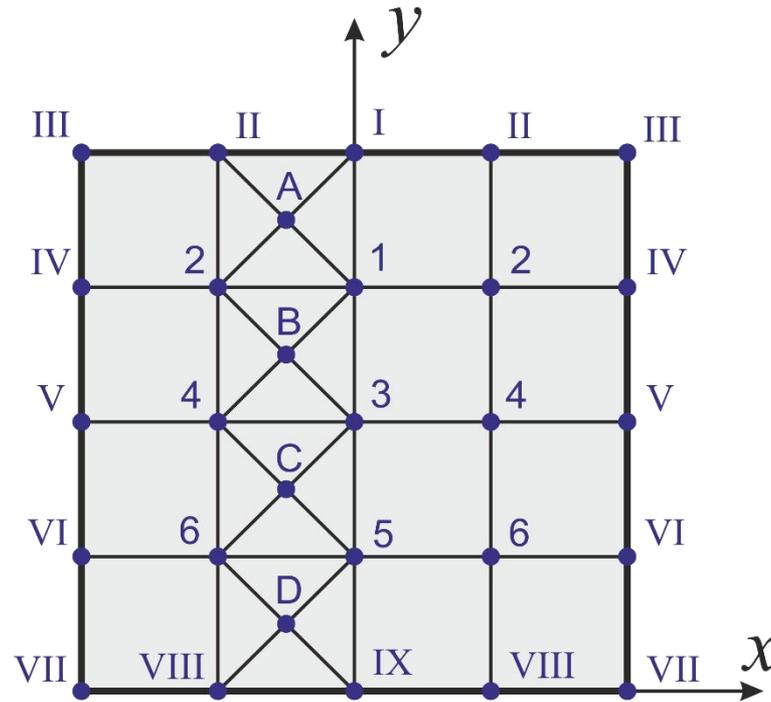
$$= -3,68 \text{ кПа}$$

Точка С



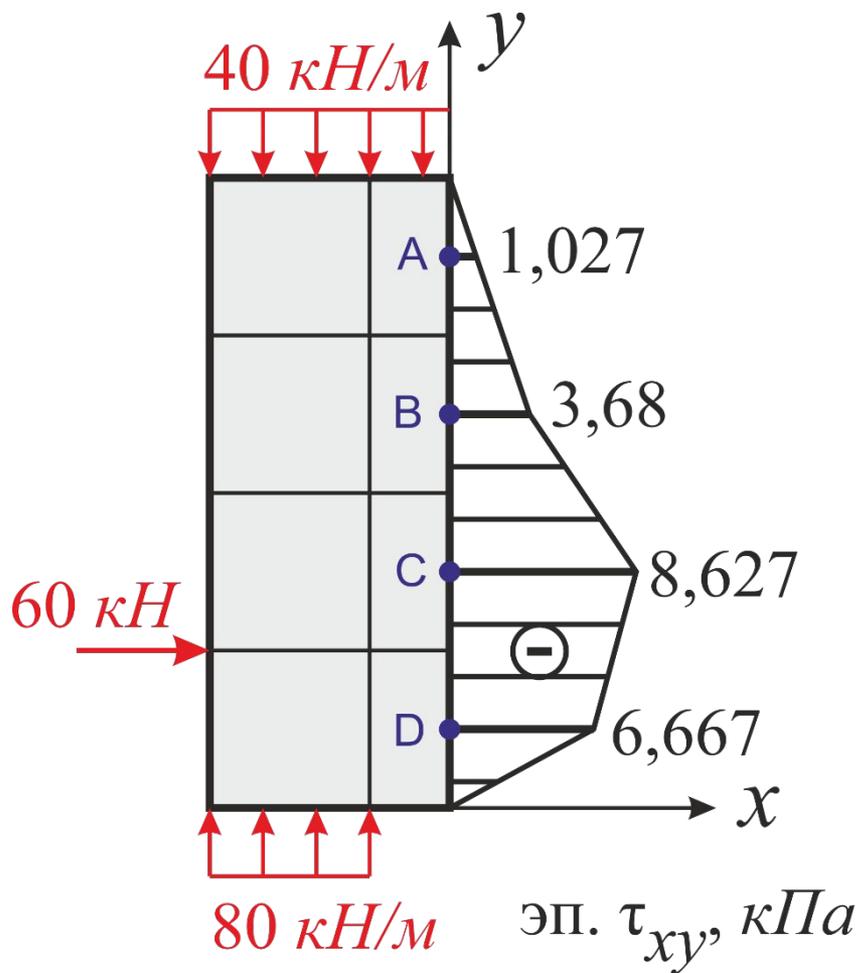
$$\tau_{xy,C} \approx \frac{\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_6 - \varphi_3}{\Delta x \Delta y} = \frac{169,35 + 174,74 - 159,74 - 203,76}{1,5^2} =$$
$$= -8,627 \text{ кПа}$$

Точка D



$$\tau_{xy,D} \approx \frac{\varphi_6 + \varphi_{IX} - \varphi_{VIII} - \varphi_5}{\Delta x \Delta y} = \frac{159,74 + 90 - 90 - 174,74}{1,5^2} =$$

$$= -6,667 \text{ кПа}$$



Проверка расчета

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0; & -40 \cdot 2,25 + 80 \cdot 1,5 - \\ & - \frac{1}{2} \cdot 1,027 \cdot 0,75 - \\ & - \frac{1,027 + 3,68}{2} \cdot 1,5 - \\ & - \frac{3,68 + 8,627}{2} \cdot 1,5 - \\ & - \frac{8,627 + 6,667}{2} \cdot 1,5 - \\ & - \frac{1}{2} \cdot 6,667 \cdot 0,75 = \\ & = 120 - 117,12 = 2,88 \end{aligned}$$

Погрешность расчета

$$\delta = \frac{2,88}{120} 100\% = 2,4\%$$

Программа для расчета балки-стенки МКР

Расчет прямоугольной балки-стенки

Размеры
Длина 6 м
Высота 6 м
Толщина 1 м

Сетка
Nx 4
Ny 4

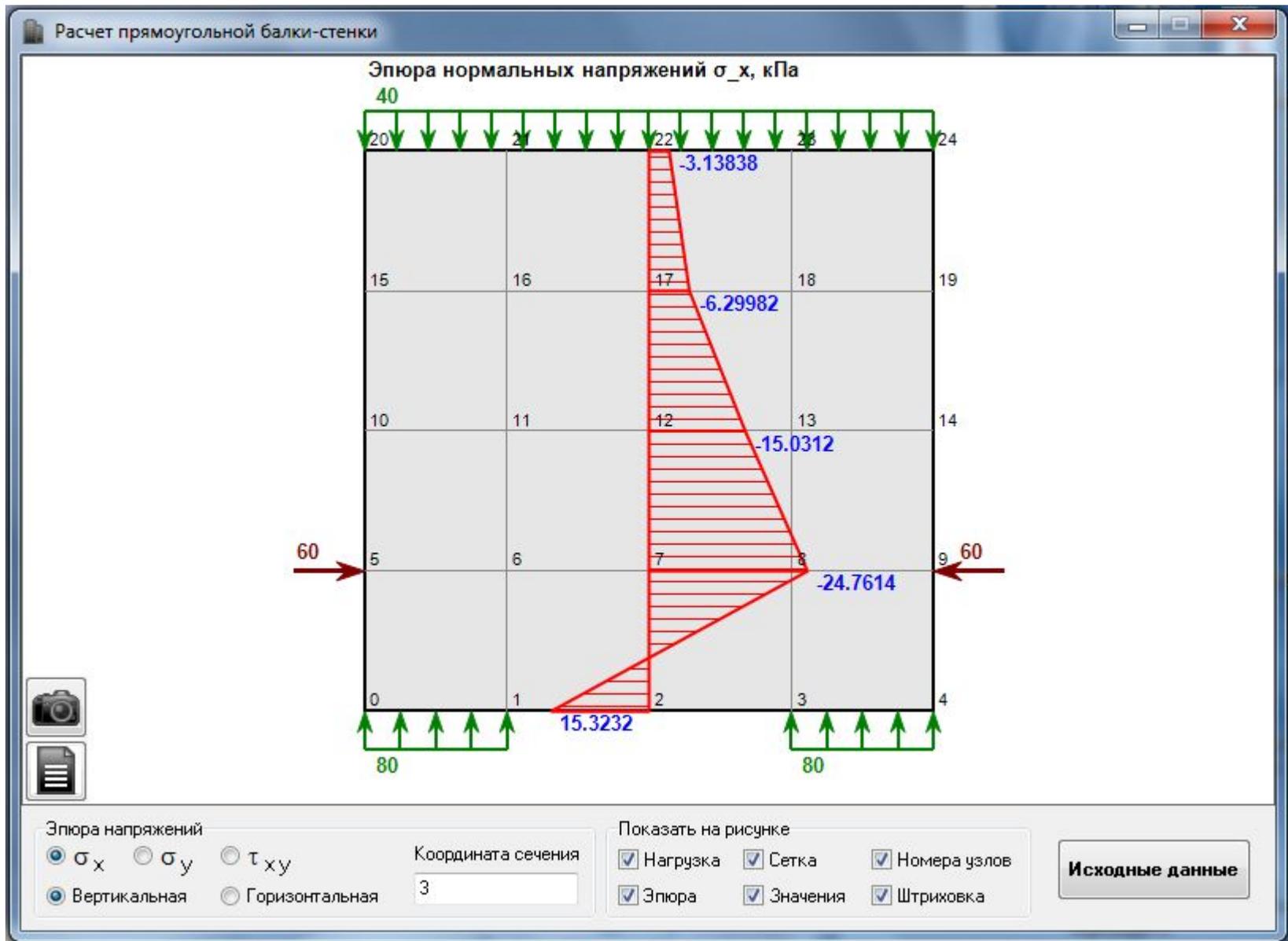
Нагрузка
 Сосредоточенная
 Распределенная
Справа
P -60 кН a 1.5 м

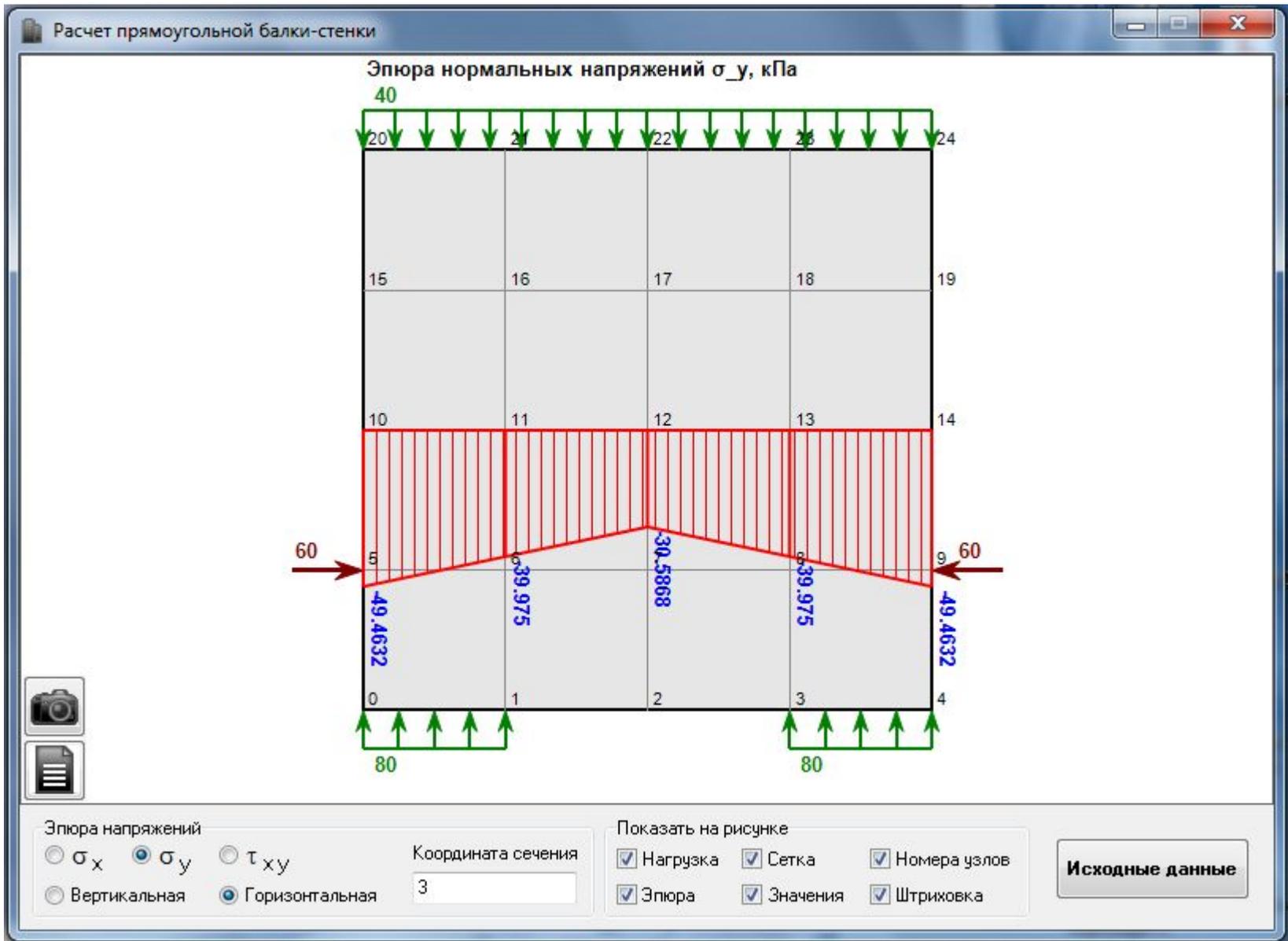
Край	P или q	a	b
<input type="radio"/> Сверху	-40	0	6
<input type="radio"/> Снизу	80	0	1.5
<input type="radio"/> Снизу	80	4.5	6
<input type="radio"/> Слева	60	1.5	---
<input checked="" type="radio"/> Справа	-60	1.5	---

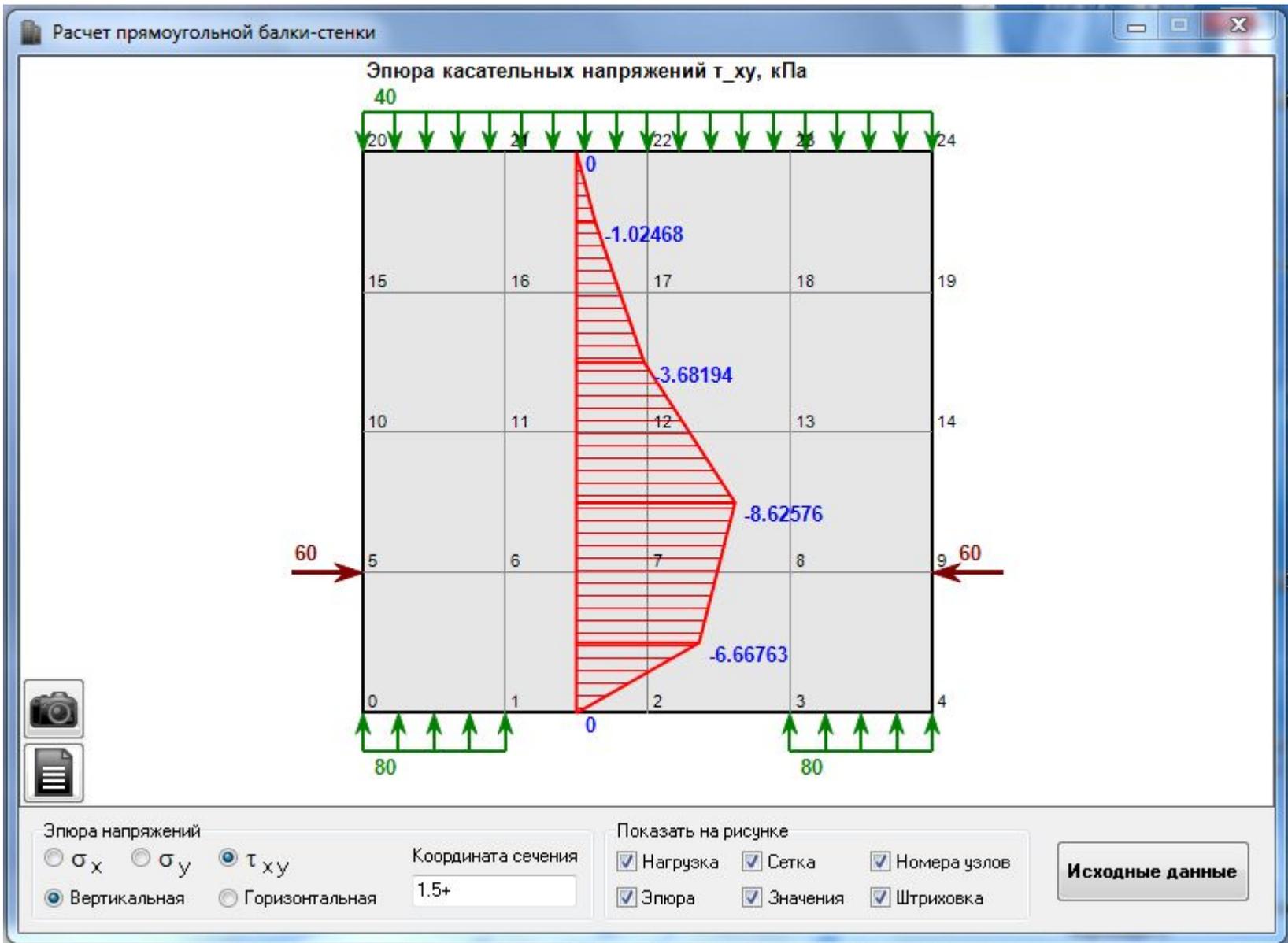
Добавить Изменить Удалить

Показать на рисунке
 Нагрузка Сетка Номера узлов
 Эпюра Значения Штриховка

РАСЧЕТ

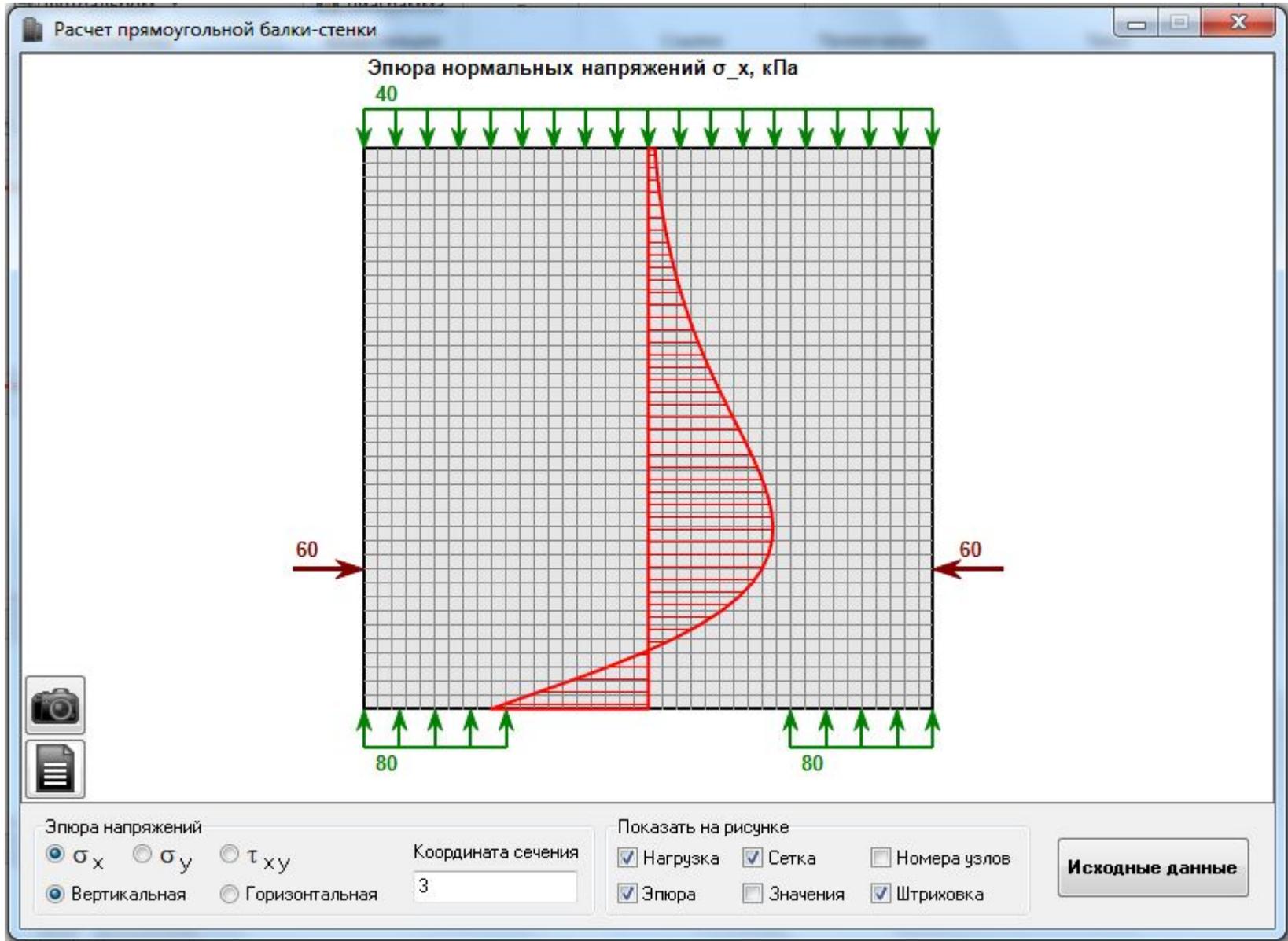




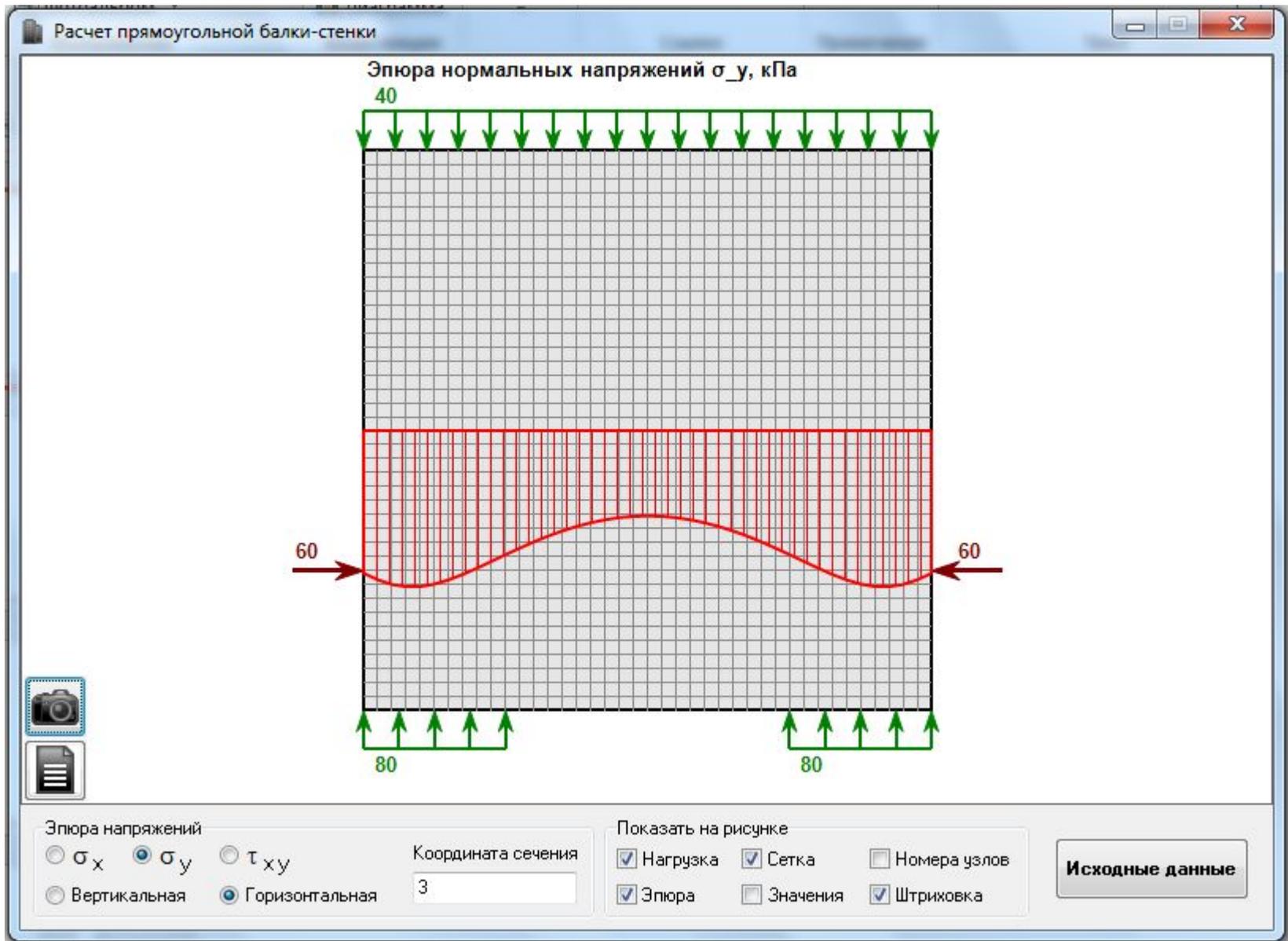


Расчет при шаге сетки

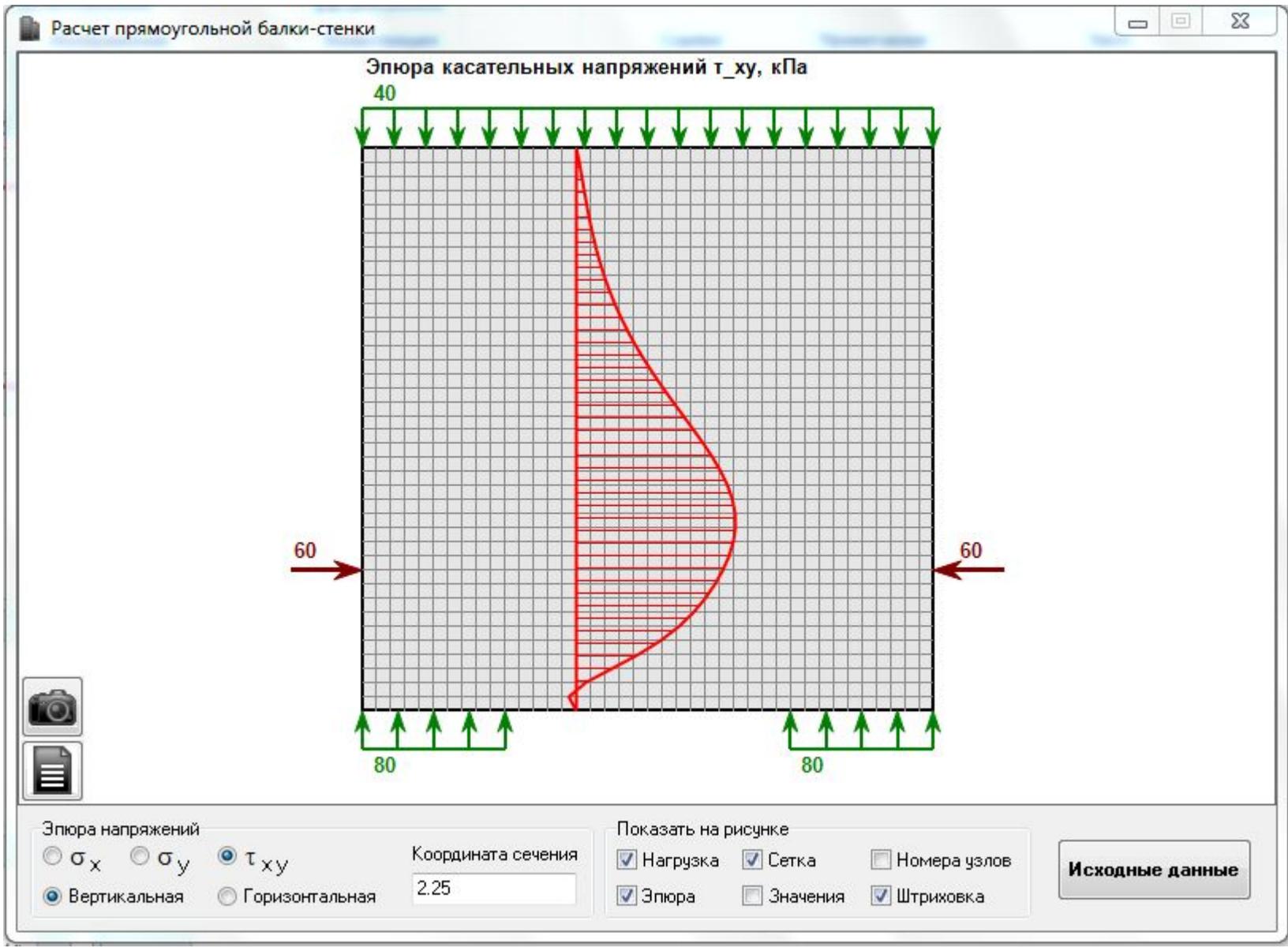
$$\Delta x = \Delta y = 0,15 \text{ м}$$



Узел	Напряжение σ_x , кПа		Погрешность, %
	при $\Delta x=1,5$ м	при $\Delta x=0,15$ м	
I	- 3,138	- 1,367	56,4
1	- 6,302	- 6,414	1,7
3	- 15,027	- 18,477	18,7
5	- 24,764	- 23,126	6,6
IX	15,324	32,301	52,6



Узел	Напряжение σ_y , кПа		Погрешность, %
	при $\Delta x=1,5$ м	при $\Delta x=0,15$ м	
V	- 49,467	- 46,559	5,9
4	- 39,973	- 40,461	1,2
3	- 30,587	- 27,818	9,1



Узел	Напряжение τ_{xy} , кПа		Погрешность, %
	при $\Delta x=1,5$ м	при $\Delta x=0,15$ м	
A	- 1,027	- 0,845	17,7
B	- 3,68	- 4,422	16,8
C	- 8,627	- 10,223	15,6
D	- 6,667	- 5,523	17,2