Конкурс презентаций «Подготовка к ОГЭ и ЕГЭ по математике»

Окружность, круг и их элементы

Марова Светлана Николаевна,
МБОУ «Обоянская СОШ № 2»
учитель математики,
высшая категория

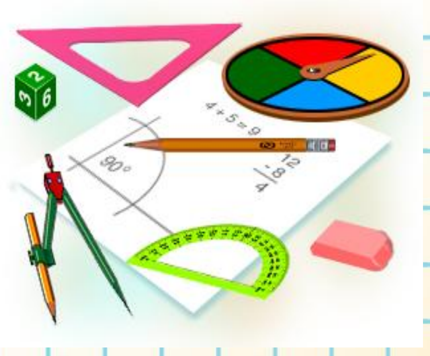
Окружность, круг и их элементы

1 часть: задания № 16, 19

2 часть: задания № 23, 24, 25

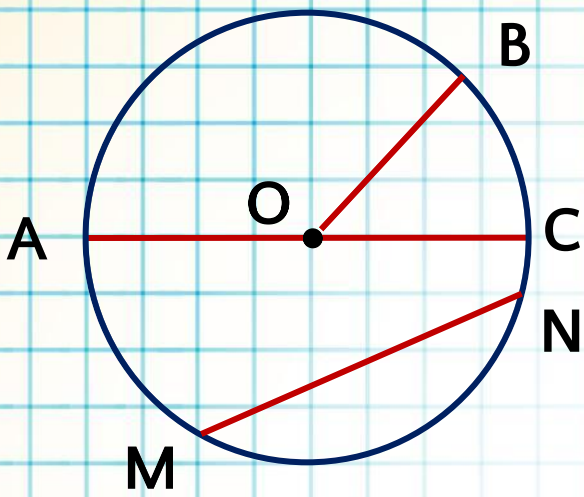
Цель:

- Повторить понятия: окружность, радиус, диаметр, хорда, круг, дуга, центральный и вписанный угол, касательная к окружности, вписанная и описанная окружности.
- Вспомнить формулы длины окружности и площади круга.
- Разобрать решение типовых задач.

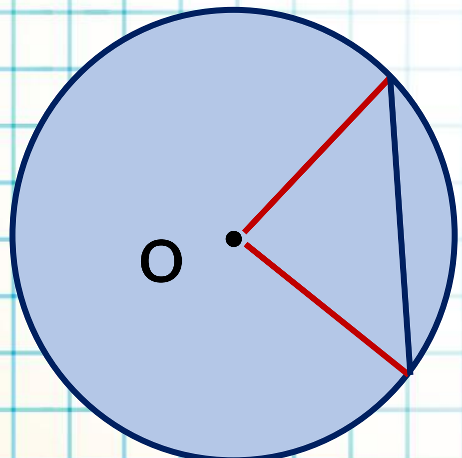


Думать – оперативно!
Отвечать – доказательно!
Решать – внимательно!
И открытия нас ждут обязательно!

Повторим теорию



окружность
радиус окружности
хорда
диаметр
дуга окружности
круг
сектор, сегмент
длина окружности и дуги

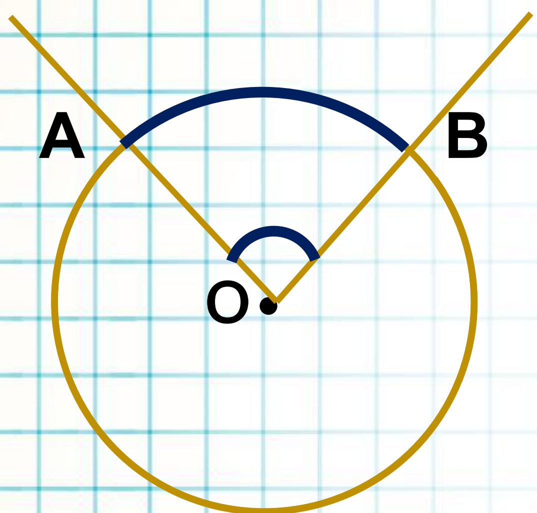


площадь круга

площадь сектора, сегмента

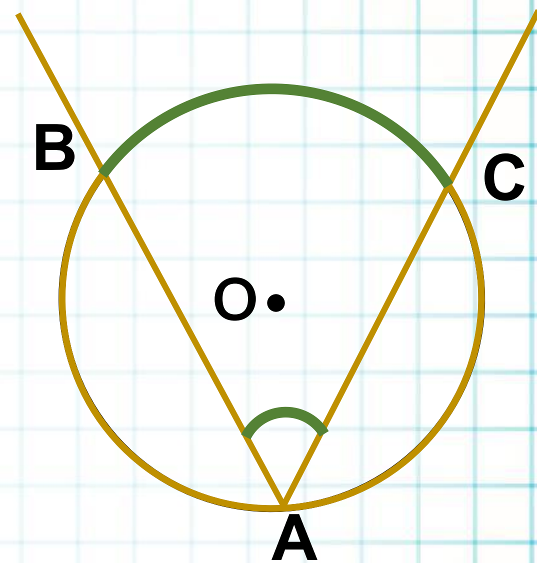
Повторим теорию

Центральный угол



$\angle AOB = \cup AB$

Вписанный угол

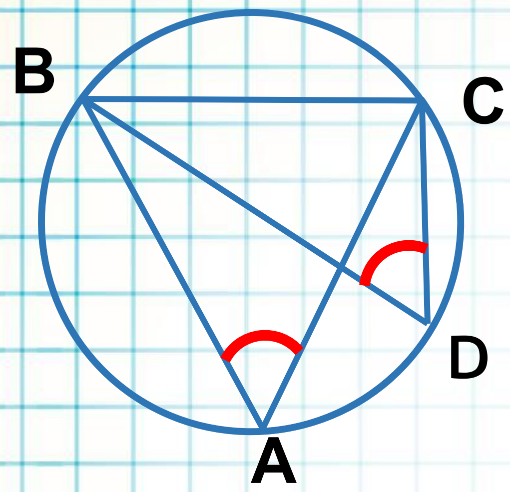


$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$

*

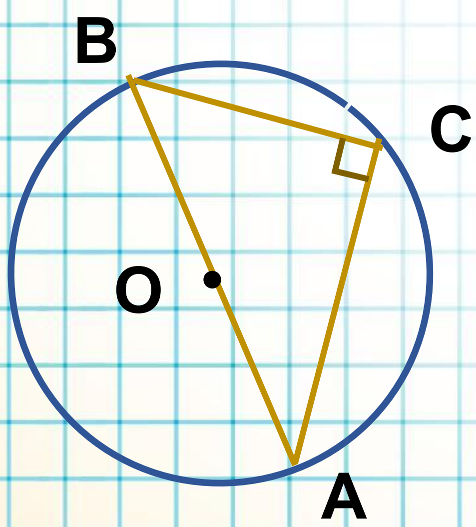
Назад

Повторим теорию

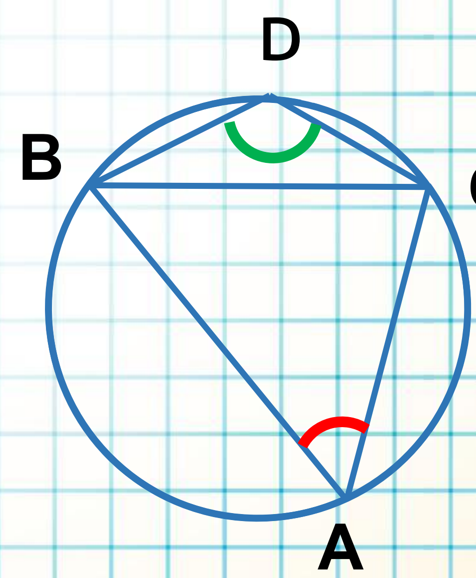


Вписанные углы, опирающиеся на одну хорду равны, если они лежат по одну сторону хорды.

Вписанные углы, опирающиеся на одну хорду в сумме составляют 180^0, если они лежат по разные стороны хорды.

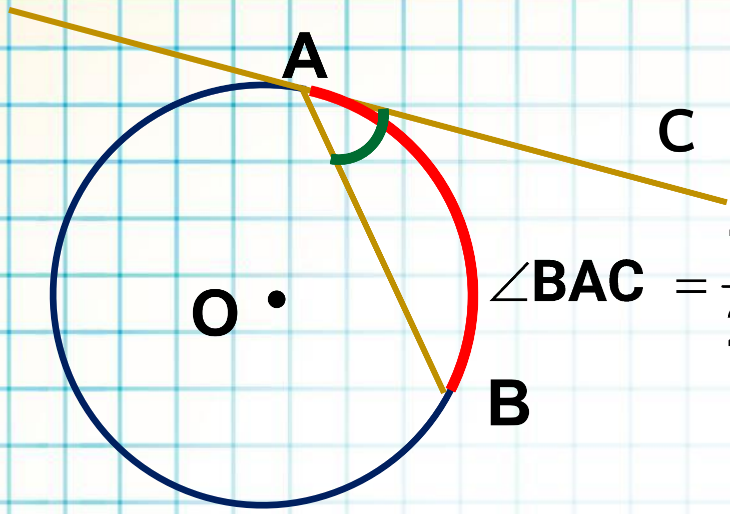


Вписанный угол, опирающийся на диаметр (или на полуокружность) равен 90^0.



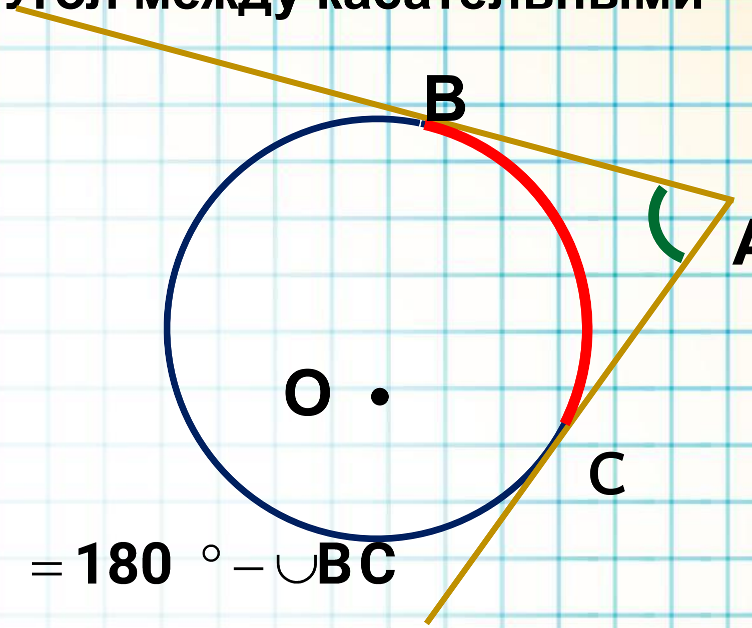
Повторим теорию

Угол между касательной и хордой



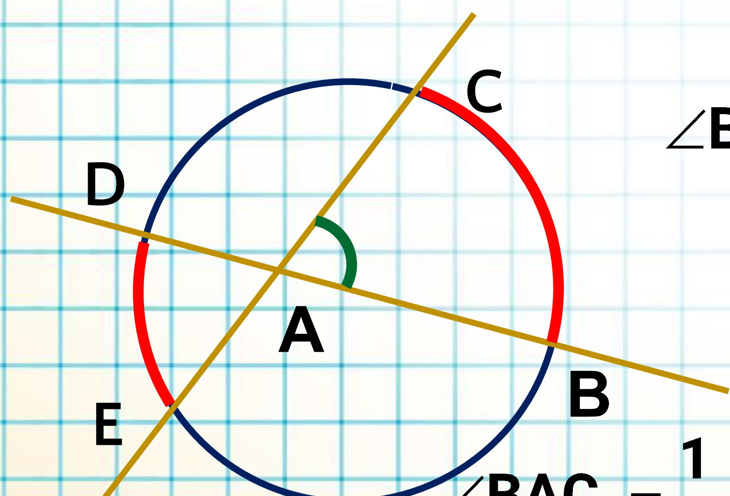
$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup AB$$

Угол между касательными



$$\angle BAC = 180^\circ - \cup BC$$

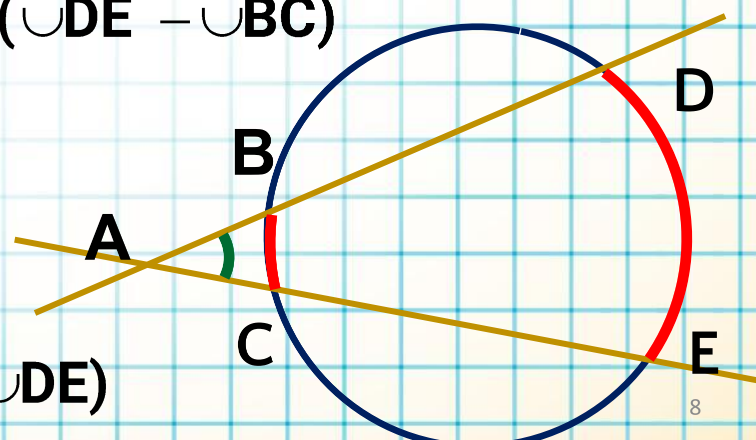
Угол между секущими внутри окружности



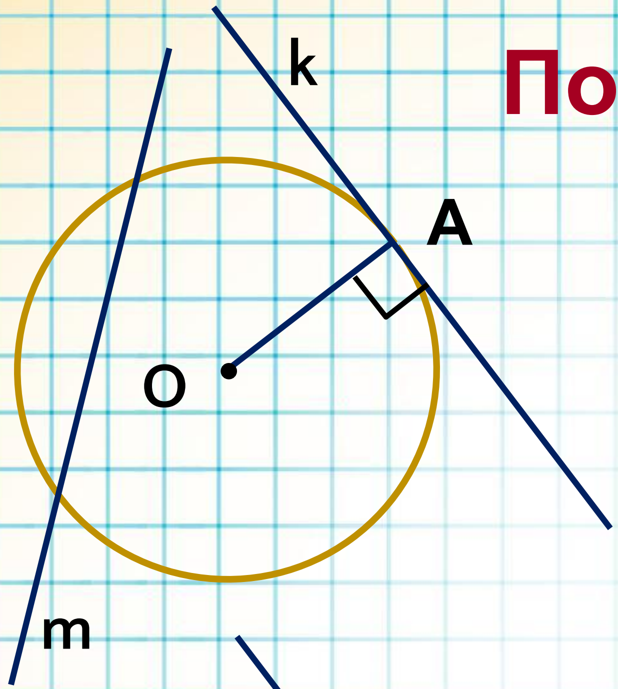
$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\cup BC + \cup DE)$$

Угол между секущими вне окружности

$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\cup DE - \cup BC)$$

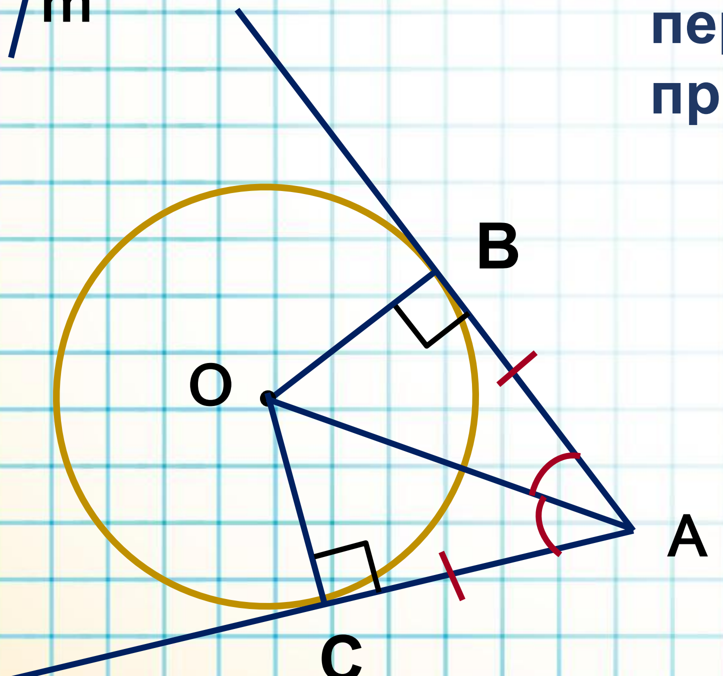


Повторим теорию



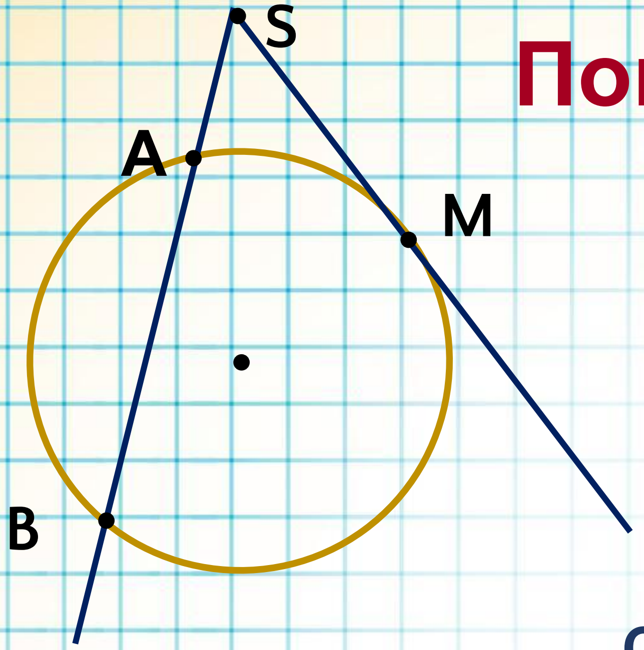
Касательная – это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.
Секущая – это прямая, имеющая с окружностью две общие точки

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



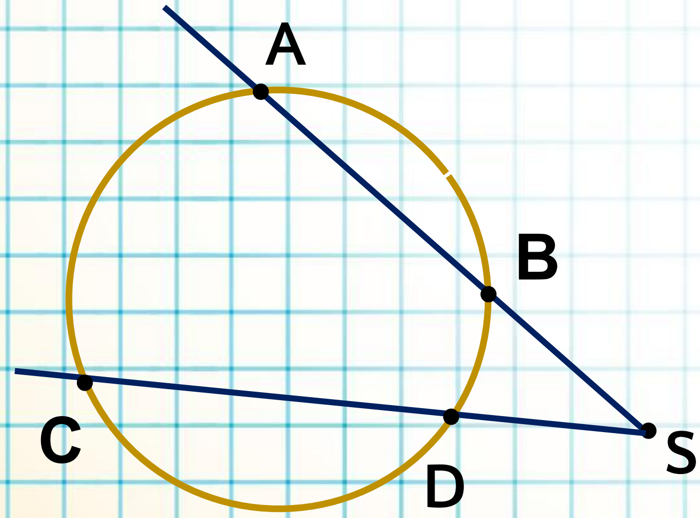
Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Повторим теорию



$$\boxed{SA \cdot SB = SM^2}$$

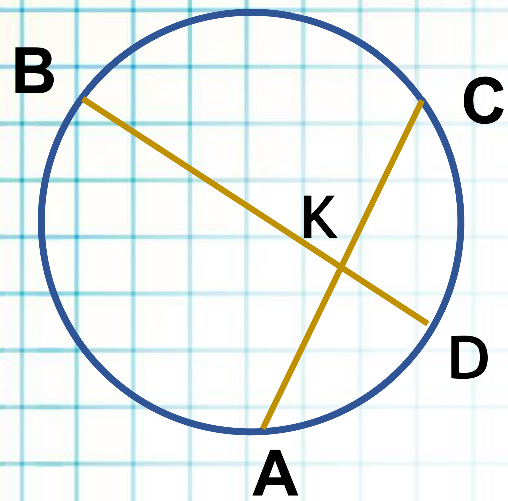
Свойство касательной и секущей



$$\boxed{SA \cdot SB = SC \cdot SD}$$

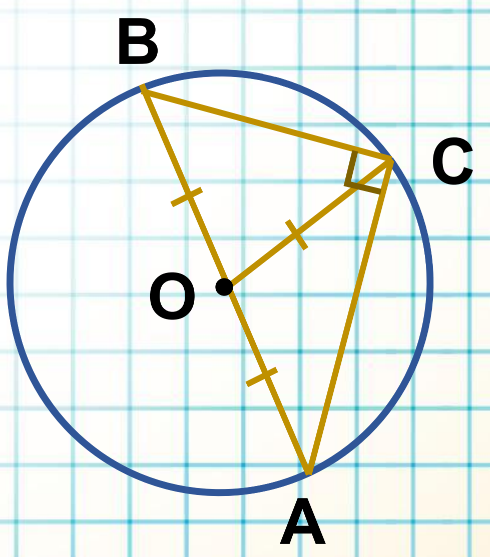
Назад

Повторим теорию



Произведения отрезков двух пересекающихся хорд окружности равны.

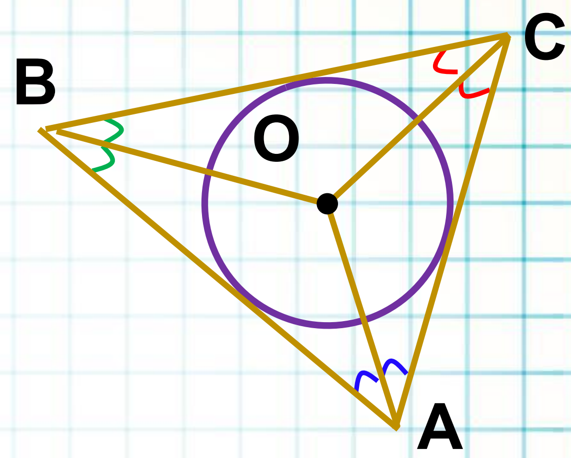
BK · KD= AK · KC

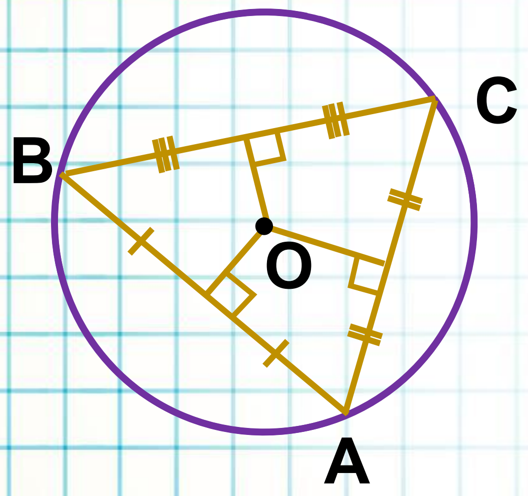


Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника является серединой его гипотенузы. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Повторим теорию

Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.



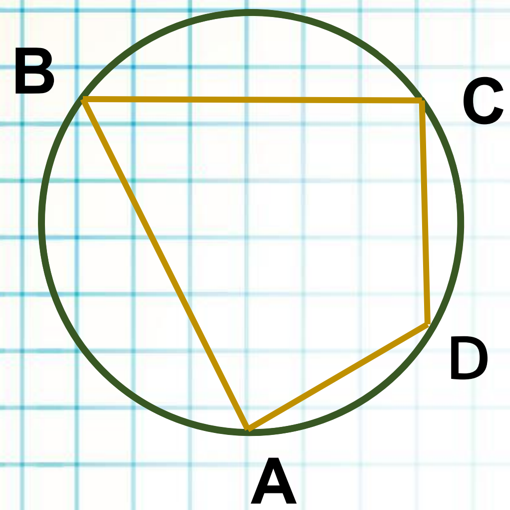


Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении его серединных перпендикуляров.

Около любого треугольника можно описать окружность.

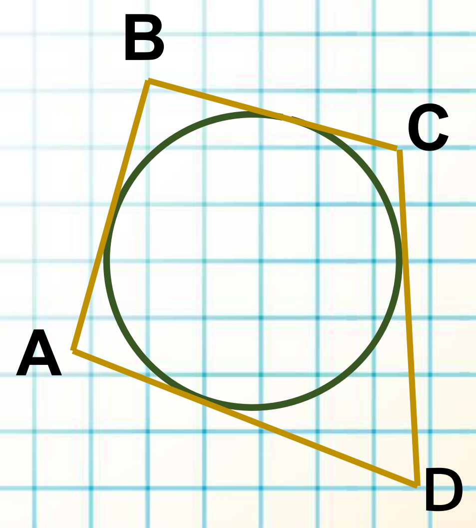
В любой треугольник можно вписать окружность.

Повторим теорию



Если около четырехугольника можно описать окружность, то его противоположные углы в сумме составляют 180^0.

$$\boxed{\angle B + \angle D = \angle A + \angle C = 180^\circ}$$



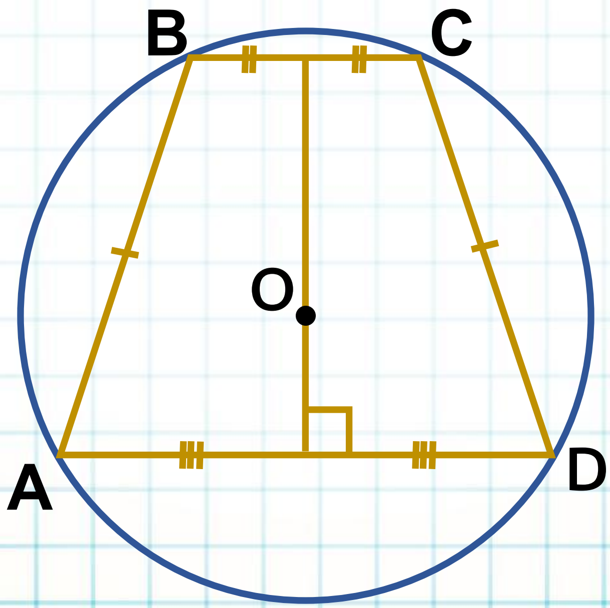
Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

$$\boxed{AB + CD = AD + BC}$$

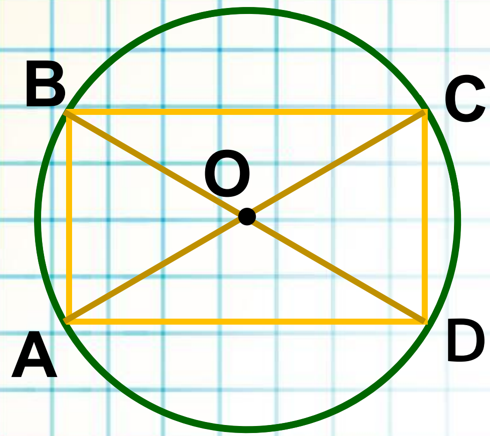
Назад

Повторим теорию

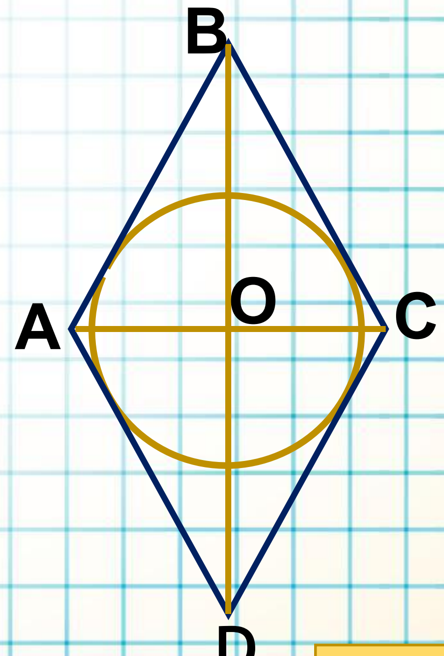
Если в окружность вписана трапеция, то она всегда равнобедренная. Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к основаниям трапеции.



Повторим теорию



Центр описанной около прямоугольника окружности лежит на пересечении его диагоналей.

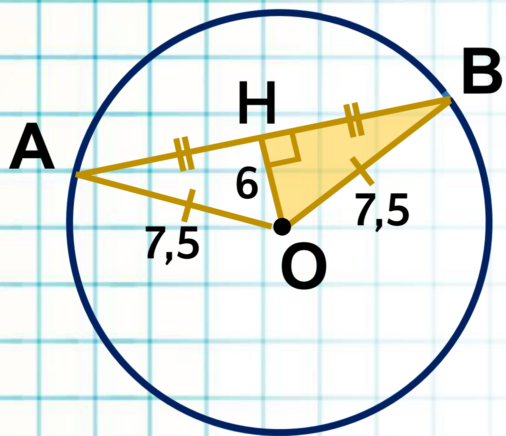


Центр окружности вписанной в ромб лежит на пересечении его диагоналей.

Назад

Задание 1

На рисунке R=OB=7,5, расстояние от точки О до хорды АВ равно 6. Найдите длину хорды АВ.



Решение:

Расстояние – перпендикуляр, опущенный из точки О на АВ.

Треугольник АОВ – равнобедренный, ОН – его медиана.

AB=2HB

Из треугольника ОВН по теореме Пифагора:

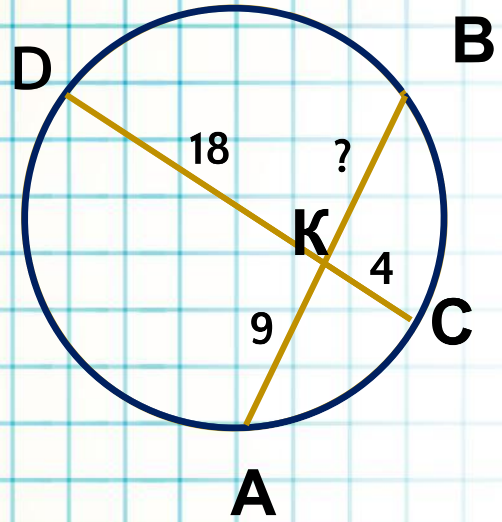
$$HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{7{,}5^2 - 6^2} = \sqrt{56{,}25 - 36} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$$

$$AB = 2HB = 2 \cdot 4{,}5 = 9$$

Ответ: $\boxed{9}$

Задание 2

На рисунке хорды AB и DC пересекаются в точке K. CK=4, DK=18, AK=9. Найдите BK.



Решение:

$$\boxed{AK \cdot KB = DK \cdot KC}$$

$$9 \cdot KB = 18 \cdot 4$$

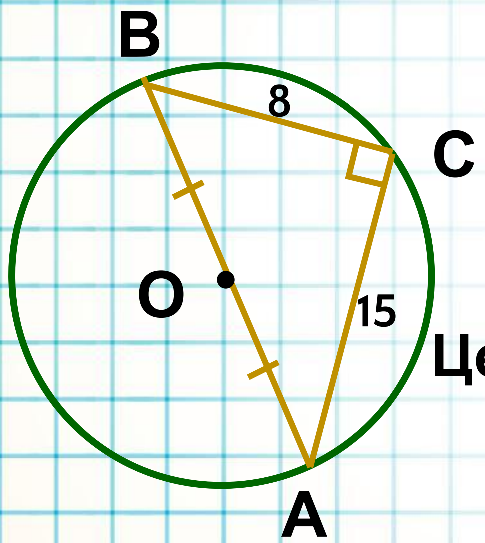
$$KB = \frac{18 \cdot 4}{9} = 2 \cdot 4 = 8$$

Ответ: $\boxed{8}$

?

Задание 3

В треугольнике ABC сторона AB является диаметром описанной около него окружности. Найдите радиус этой окружности, если BC=8 см, AC =15 см. Ответ дайте в сантиметрах.



Решение:

Если сторона треугольника является диаметром окружности описанной около этого треугольника, то треугольник прямоугольный и эта сторона – его гипотенуза.

Центр окружности – середина гипотенузы.

$$R = \frac{1}{2} AB$$

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17 см$$

$$R = \frac{1}{2} AB = \frac{17}{2} = 8{,}5 см$$

Ответ:

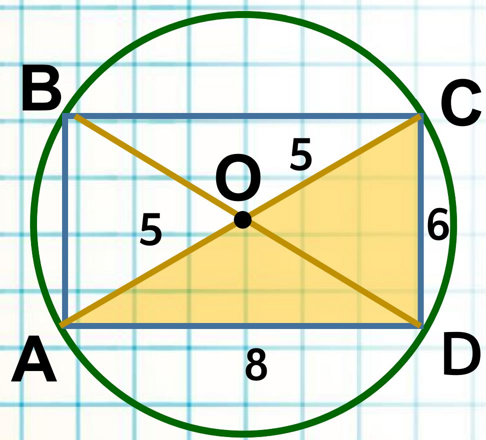
8	,	5

?

Задание 4

Около прямоугольника ABCD описана окружность радиусом 5 см. Найдите периметр прямоугольника, если одна из его сторон равна 8 см. Ответ дайте в сантиметрах.

Решение:



Центр описанной около прямоугольника окружности лежит на пересечении его диагоналей.

Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.

$$AC = 2R = 10$$

Из прямоугольного треугольника ACD:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 см$$

$$P_{ABCD} = 2(AD + CD) = 2(6 + 8) = 28 см$$

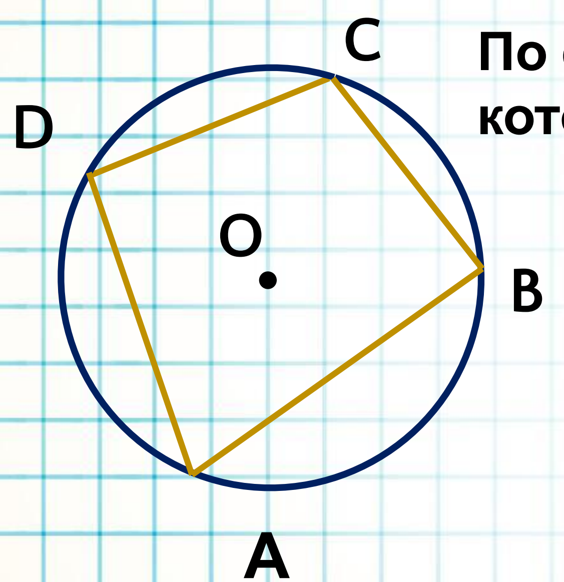
Ответ: | 2 | 8 |

?

Задание 5

Два угла вписанного четырехугольника равны 27° и 56°. Найти больший угол этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение:



По свойству четырехугольника, около которого описана окружность:

$$\boxed{\angle B + \angle D = \angle A + \angle C = 180°}$$

$$27° + 56° = 83° \neq 180°$$

Значит, это градусные меры соседних углов. Например, ∠A=27° и ∠B=56°.

Тогда, ∠C=180°−27°=153° и ∠D=180°−56°=124°

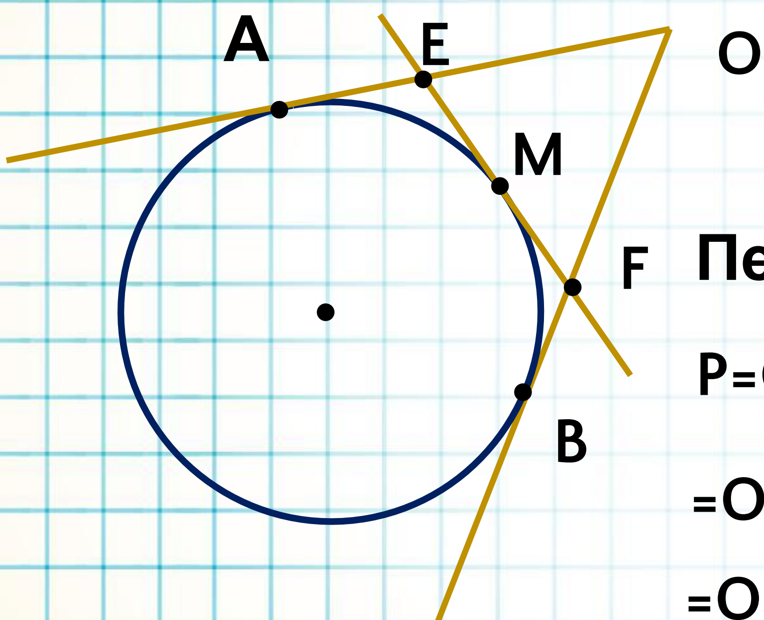
Ответ:

1	5	3

?

Задание 6

Окружность касается сторон угла с вершиной О в точках А и В. Прямая, касающаяся окружности в точке М, пересекает отрезки АО и ВО в точках Е и F. Найти периметр треугольника EOF, если ОА=12.



Решение:

По свойству касательных отрезков
OA=OB, EA=EM, FB=FM

Периметр треугольника EOF

P=OE+EF+FO=

=OE+EM+MF+FO=

=OE+EA+BF+FO=

=OA+OB=12+12=24

Ответ:

2	4

?

Задание 7

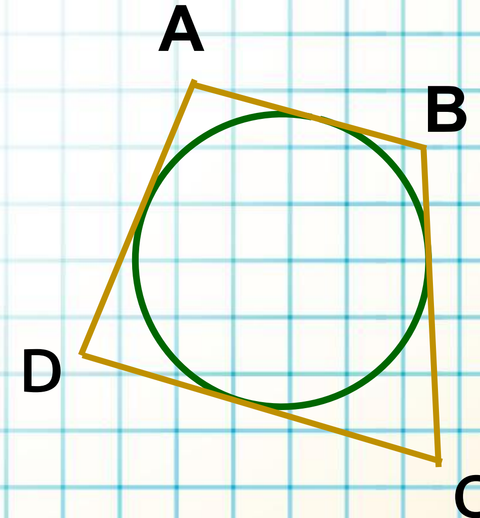
Найти периметр трапеции, в которую вписана окружность, если средняя линия трапеции равна 10.

Решение:

Пусть средняя линия равна m, **по свойству средней линии трапеции** $m = \frac{AB + DC}{2}$

Тогда, AB+DC= 2m = 2·10 = 20

По свойству четырехугольника, в который вписана окружность AB + DC = AD + BC = 20



Значит, P = (AB + DC) + (AD + BC) = = 20 + 20 = 40

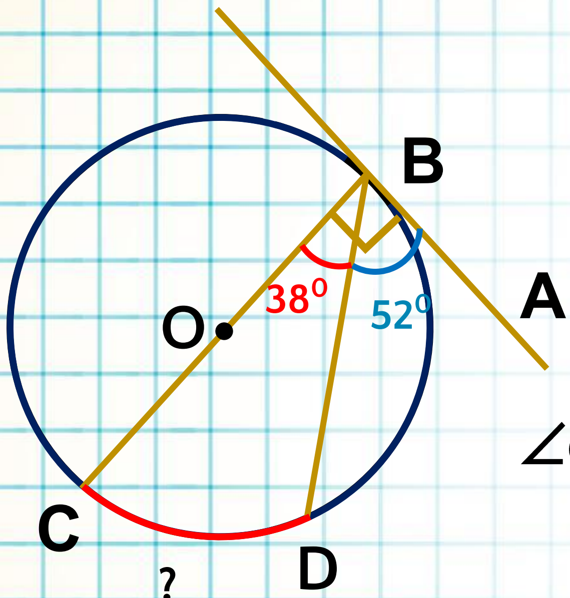
Ответ:

4	0

?

Задание 8

На рисунке угол ABD равен 52°. AB – касательная. Найдите градусную меру дуги CD. Ответ дайте в градусах.



Решение:

Градусная мера дуги окружности в два раза больше величины вписанного угла, который на нее опирается.

$$\cup CD = 2\angle CBD$$

$\angle CBA = 90^0$ **(OB – радиус, проведенный в точку касания)**

$$\angle CBD = \angle CBA - \angle DBA = 90^0 - 52^0 = 38^0$$

$$\cup CD = 2\angle CBD = 2 \cdot 38^0 = 76^0$$

Ответ:

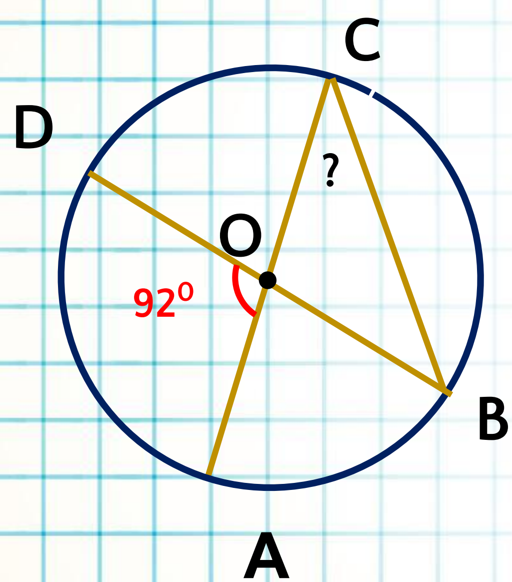
7	6

*

?

Задание 9

В окружности с центром O отрезки AC и BD– диаметры. Угол AOD равен 92°. Найти угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Решение:

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB$$

(по свойству вписанного угла)

$$\cup AB = \cup DAB - \cup AB$$

$\cup DAB$ - полуокружн ость, $\cup DAB = 180°$

$$\cup AD = \angle AOD = 92°$$

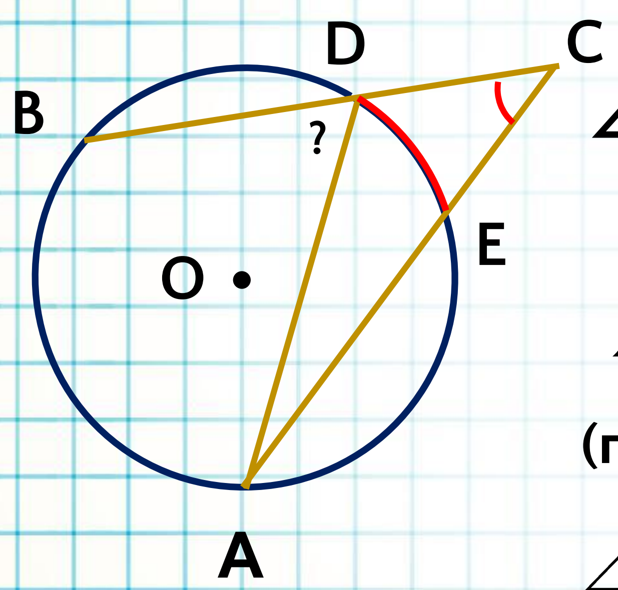
$$\cup AB = 180° - 92° = 88°$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 88 = 44°$$

Ответ: | 4 | 4 |

Задание 10

Окружность пересекает стороны угла с вершиной C, равного 54°, в точках A, E, D и B, как показано на рисунке. Найти угол ADB, если дуга ED равна 64°. Ответ дайте в градусах.



Решение:

$\angle ADB$ – внешний угол ΔADC, поэтому

$$\angle ADB = \angle DCA + \angle CAD$$

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \cup DE$$

(по свойству вписанного угла)

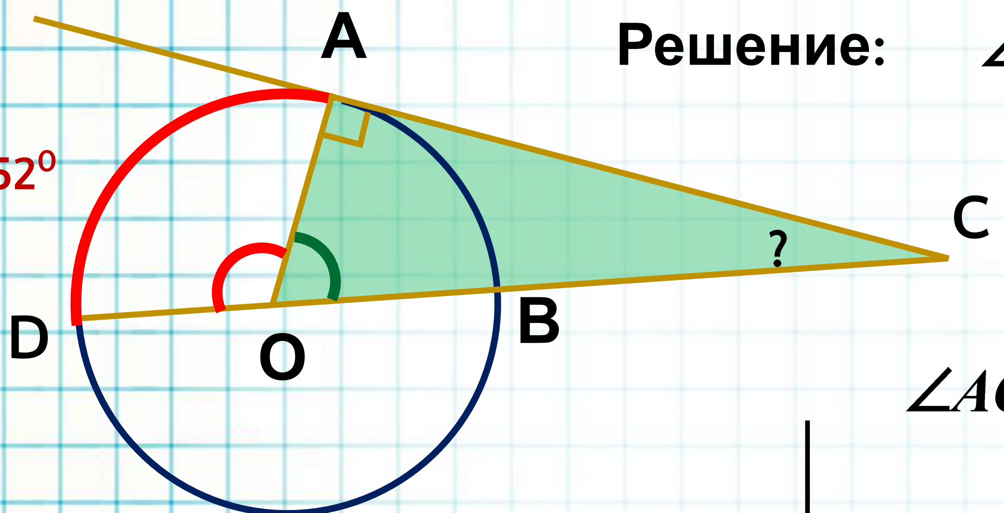
$$\angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 64^\circ = 32^\circ$$

$$\angle ADB = 32^\circ + 54^\circ = 86^\circ$$

Ответ: | 8 | 6 |

Задание 11

Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а большая дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна 152°. Ответ дайте в градусах.



Решение: $\angle AOD = \cup AD = 152^0$

Так как угол AOD – центральный и опирается на дугу AD.

$\angle AOC = 180^0 - \angle AOD = 28^0$

Так как смежные.

$\angle OAC = 90^0$

OA – радиус, проведенный в точку касания.

Из треугольника AOC:

$\angle ACO = 180^0 - \angle AOC - \angle OAC =$

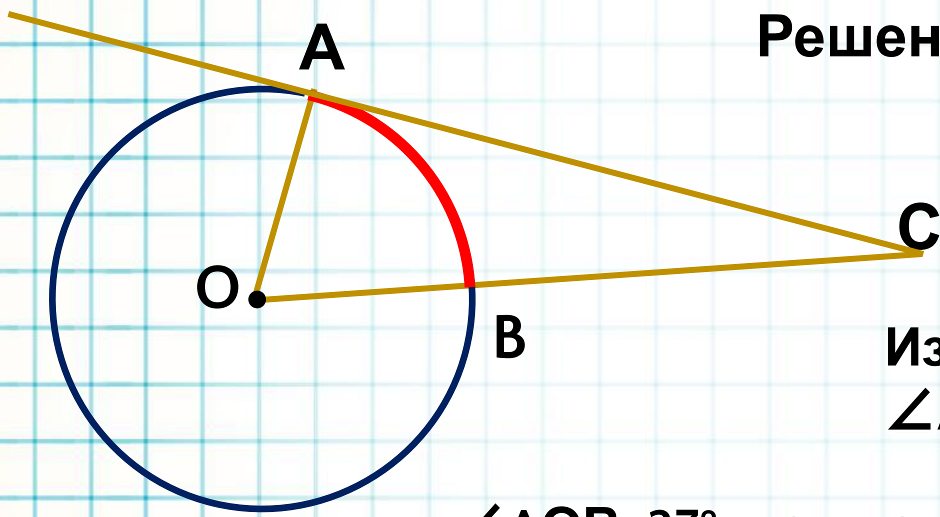
$= 180^0 - 28^0 - 90^0 = 62^0$

Ответ: | 6 | 2 |

?

Задание 12

Угол АСО равен 53°, где О – центр окружности. Его сторона СА касается окружности. Сторона СО пересекает окружность в точке В. Найти величину меньшей дуги АВ окружности. Ответ дайте в градусах.



Решение:

Т.к. АС – касательная и ОА – радиус, то ∠ОАС=90°.

Из прямоугольного ∆ОАС ∠АОС=90°–53°=37°.

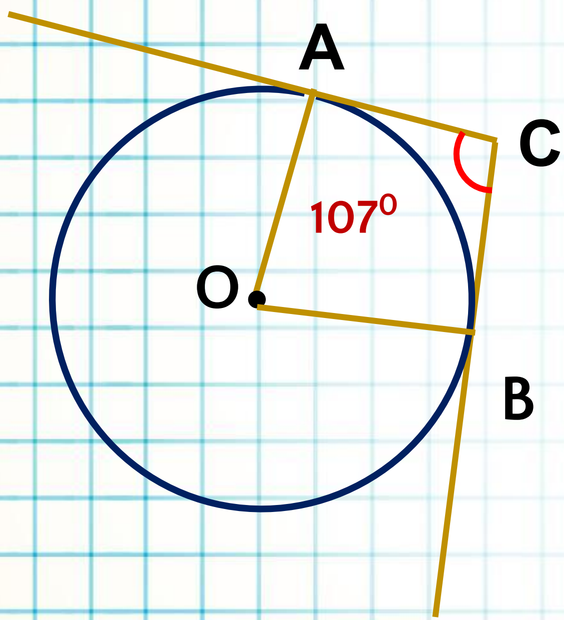
∠АОВ=37° и он центральный, опирается на дугу АВ, значит дуга АВ=37°.

Ответ:

3	7

Задание 13

В угол С величиной 107° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках А и В, О – центр окружности. Найти угол АОВ. Ответ дайте в градусах.



Решение:

Т.к. СА и СВ – касательные, то $\angle OAC=90°$, $\angle OBC=90°$.

Сумма углов четырёхугольника равна 360°.

Тогда, $\angle AOB=360°-90°-90°-107°=73°$.

Ответ: | 7 | 3 |

Задание 14

В ромб с диагоналями 12 и 16 вписана окружность. Найти ее радиус.

Решение:

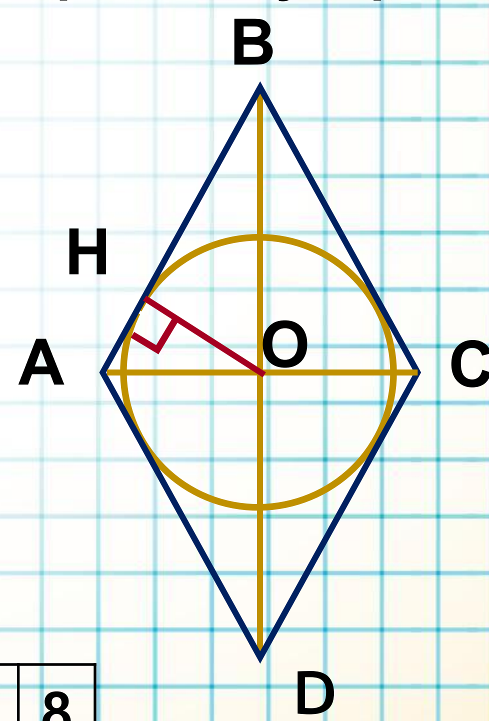
Центр окружности вписанной в ромб лежит на пересечении его диагоналей.

Т.к. AB–касательная, то OH–радиус, перпендикулярный AB.

ΔAOB–прямоугольный, т.к. диагонали ромба перпендикулярны.

OH– высота, проведённая из вершины прямого угла, поэтому

$$OH = \frac{AO \cdot OB}{AB}$$



$$AO = \frac{1}{2}AC = 6 \qquad BO = \frac{1}{2}BD = 8$$

$$AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$OH = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{48}{10} = 4{,}8$$

Ответ:

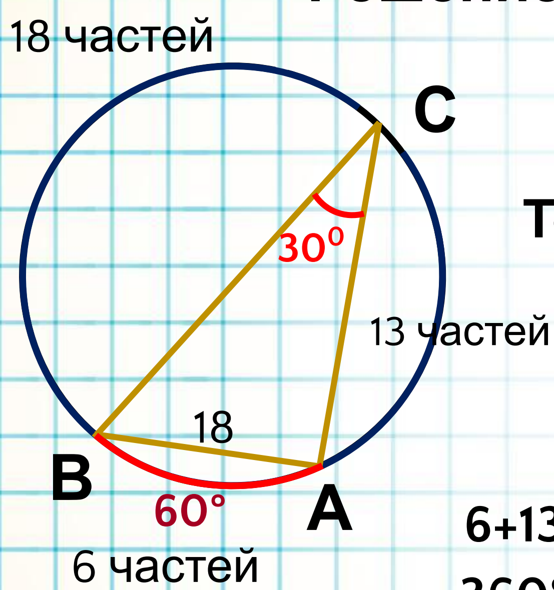
4	,	8

?

Задание 15 (№ 23)

Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 6 : 13 : 17. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 18.

Решение: **Из теоремы синусов следует** $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$



Пусть UAB : UAC : UBC= 6 : 13 : 17.

Тогда сторона АВ – меньшая, т.е. АВ =18.

Угол АСВ лежит напротив АВ.

Тогда, $R = \dfrac{AB}{2\sin ACB}$

6+13+17 = 36 частей

360° : 36 = 10° – составляет 1 часть

10° · 6 = 60° – дуга АВ

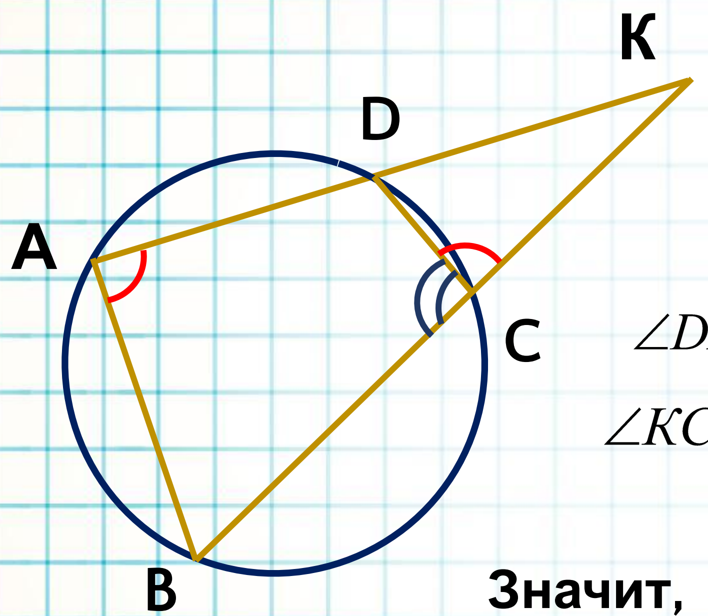
По свойству вписанного угла $\angle ACB = \dfrac{1}{2} \cup AB = \dfrac{1}{2} \cdot 60° = 30°$

Тогда, $R = \dfrac{18}{2\sin 30} = \dfrac{18}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 18$

Ответ: 18

Задание 16 (№ 24)

Около четырехугольника ABCD описана окружность, продолжения сторон AD и BC пересекаются в точке К. Докажите, что треугольники КАВ и КСD подобны.



Решение:

По свойству четырехугольника, около которого описана окружность

$$\angle DAB + \angle BCD = 180^0$$

$\angle DAB = 180^0 - \angle BCD$ **или** $\angle KAB = 180^0 - \angle BCD$

$\angle KCD + \angle BCD = 180^0$ **, т.к. они смежные.**

$$\angle KCD = 180^0 - \angle BCD$$

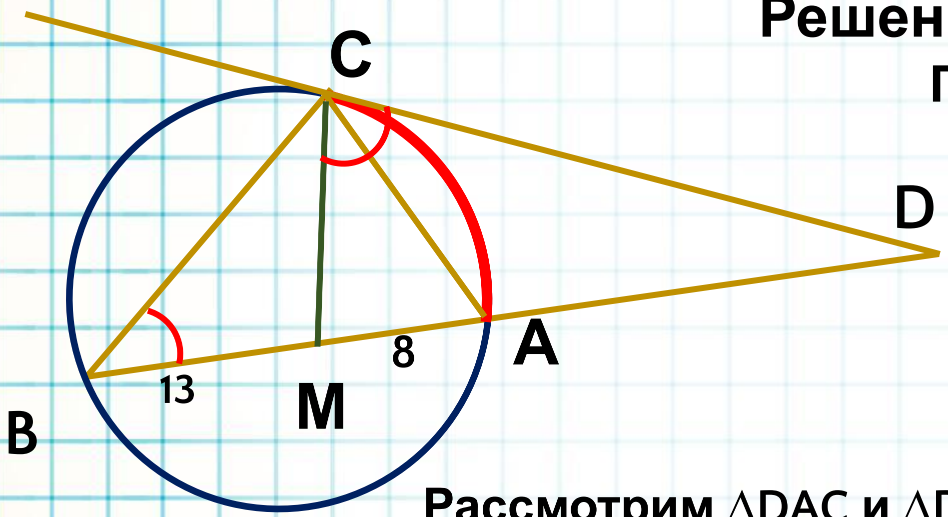
Значит, $\angle KAB = \angle KCD.$

В треугольниках КАВ и КСD угол К общий, а также углы КАВ и КСD равны. Следовательно, эти треугольники подобны по двум углам.

?

Задание 17 (№ 25)

Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AM=8 MB=13. Касательная к окружности, описанной около треугольника ABC, проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.



Решение:

По свойству касательной

$$DB \cdot DA = CD^2$$

По свойству биссектрисы

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{13}$$

Рассмотрим ΔDAC и ΔDCB, в них угол D – общий.

По свойству вписанного угла $\angle CBA = \frac{1}{2} \cup AC.$

По свойству угла между касательной и хордой $\angle DCA = \frac{1}{2} \cup AC.$

Значит, $\angle DCA = \angle CBA.$

Следовательно, ΔDAC и ΔDCB подобны по двум углам.

?

Задание 17 (№ 25)

продолжение

Из подобия треугольников следует, что $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{DB}$.

А т.к. $\frac{AC}{BC} = \frac{8}{13}$**, то** $\frac{CD}{DB} = \frac{8}{13}$. **Отсюда** $DB = \frac{13}{8}CD$.

Найдем AD. $AD = DB - AB = \frac{13}{8}CD - (8+13) = \frac{13}{8}CD - 21$

Подставим DA и DB в первую формулу: $DB \cdot DA = CD^2$

$$\frac{13}{8}CD \cdot (\frac{13}{8}CD - 21) = CD^2$$

Разделим на CD обе части равенства: $\frac{13}{8} \cdot (\frac{13}{8}CD - 21) = CD$

$$\frac{169}{64} \cdot CD - \frac{13}{8} \cdot 21 = CD$$

$$\frac{169}{64} \cdot CD - CD = \frac{13}{8} \cdot 21$$

$$\frac{105}{64} \cdot CD = \frac{13 \cdot 21}{8}$$

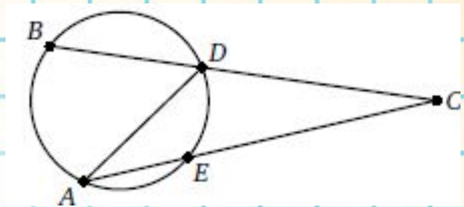
$$CD = \frac{13 \cdot 21}{8} : \frac{105}{64}$$

$$CD = \frac{13 \cdot 21 \cdot 64}{8 \cdot 105}$$

$$CD = \frac{13 \cdot 8}{5} = \frac{104}{5} = 20{,}8$$

Ответ: 20,8

Домашнее задание:



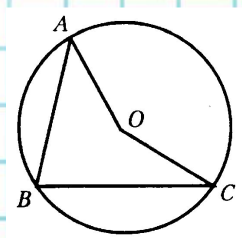
1. **Найти угол АСВ, если вписанные углы АDВ и DАЕ опираются на дуги соответственно 110° и 40°.**

2. **Угол А четырехугольника АВСD, вписанного в окружность, равен 118°. Найти угол С этого четырехугольника.**

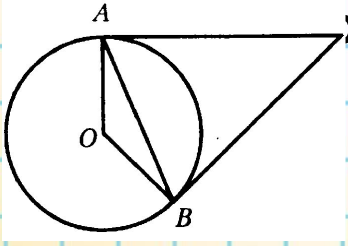
3. **Углы А, В и С четырехугольника АВСD относятся как 5:5:13. Найти угол D , если около данного четырехугольника можно описать окружность.**

4. **Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся как 1:8:14. Найти большую сторону этого четырехугольника, если его периметр равен 120.**

5. **Точка О – центр окружности, на которой лежат точки А, В и С. Угол АВС=50° и угол ОАВ=35°. Найти угол ВСО.**



6. **Касательные в точках А и В к окружности с центром О ...секаются под углом 72°. Найти угол АВО.**



s.marova@mail.ru

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!

Д. Пойа

Список источников основного содержания:

- Математика. ОГЭ 2021. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] / А.В.Семенов, А.С.Трепалин, И.В.Ященко и др. – Москва: Издательство «Интеллект-Центр», 2021. – 296 с.;

- ОГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В.Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2021. – 224 с.;

- https://oge.sdamgia.ru – Сайт Дмитрия Гущина.

Список источников иллюстраций:

https://ru.depositphotos.com/ – фотосток фотографий, иллюстраций, векторных изображений.