Спин электрона. Матрицы Паули

Из эффекта Зеемана следует, что если есть спин, то он создаёт магнитный момент. Поэтому постулируем, что коммутационные соотношения для оператора спина такие же, как и у орбитального момента импульса. Для краткости оператор спина будем считать безразмерным $\hbar = 1$

$$\left[\hat{s}_i, \hat{s}_k\right] = ie_{ikl}\hat{s}_l \qquad \left[\hat{\vec{s}}^{\,2}, \hat{s}_k\right] = 0, \qquad \hat{\vec{s}}^{\,2} = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$$

e_{ikl} – абсолютный антисимметричный тензор третьего ранга

Представление ss_z

Собственные значения

$$\hat{\vec{s}}^{\,2} \to s(s+1) = \frac{3}{4}, \qquad \hat{s}_z \to s_z = \pm\frac{1}{2}$$

Кет-векторы и волновые функции

$$\left|\sigma\right\rangle, \qquad \left\langle s_z \middle| \sigma \right\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$a, b, |a|^2, |b|^2$ - амплитуды вероятности и вероятности обнаружить электрон в состоянии с проекцией спина на ось *Oz* равной $\pm 1/2$

«Лирическое отступление.
Расшифровка фразы «двузначность, не описывающаяся КЛАССИЧЕСКИ»

Состояние частицы с орбитальным моментом *l=1*

$$\left| l = 1, m \right\rangle$$

ll_z - представление

$$\left\langle ll_z \middle| l = 1, m = 1 \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \left\langle ll_z \middle| l = 1, m = 0 \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left\langle ll_z \middle| l = 1, m = -1 \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Координатное представление

$$\left\langle \theta\varphi \middle| l = 1, m = 1 \right\rangle = Y_{11}(\theta,\varphi), \left\langle \theta\varphi \middle| l = 1, m = 0 \right\rangle = Y_{10}(\theta,\varphi), \left\langle \theta\varphi \middle| l = 1, m = -1 \right\rangle = Y_{1-1}(\theta,\varphi)$$

Классический момент импульса

$$\hat{\vec{M}} = \left[\hbar \hat{\vec{l}} \right]\Big|_{\hbar \to 0, l \to \infty} \to \vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{p} \right]$$

Спиновый кет-вектор частицы

$$\left| s = \frac{\hbar}{2}, \sigma \right\rangle$$

Существует только ss_z- представление

$$\left\langle ss_z \middle| s = \frac{\hbar}{2}, s_z = \frac{\hbar}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left\langle ss_z \middle| s = \frac{\hbar}{2}, s_z = -\frac{\hbar}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Классический предел

$$\left[\square\,\hat{\vec{s}}\right]\Big|_{\hbar \to 0} \to 0$$

Операторы спина

Из теории момента

$$\left\langle jj_z \left| \hat{j}_z \right| jj'_z \right\rangle = j_z \cdot \delta_{j_z j'_z}, \quad \left\langle jj_z \left| \hat{j}^2 \right| jj'_z \right\rangle = j(j+1) \cdot \delta_{j_z j'_z}$$

$$\left\langle jj_z \left| \hat{j}_+ \right| jj_z - 1 \right\rangle = \left\langle jj_z - 1 \left| \hat{j}_- \right| jj_z \right\rangle = \sqrt{(j + j_z)(j - j_z + 1)}$$

В рассматриваемых условиях

$$j = s = \frac{1}{2}, \quad j_z = s_z = \pm\frac{1}{2}$$

Найти операторы спина?

Правило нумерации строк и столбцов

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} s_z = 1/2 & s_z = -1/2 \end{array} \\
\begin{array}{c} s_z = 1/2 \\ s_z = -1/2 \end{array} & \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Найти операторы спина?

Результат

$$\left\langle s_z \middle| \hat{s}_z \middle| s'_z \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left\langle s_z \middle| \hat{s}^2 \middle| s'_z \right\rangle = \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle s_z \middle| \hat{s}_- \middle| s'_z \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\langle s_z \middle| \hat{s}_+ \middle| s'_z \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы *x,y* - проекции спина?

Матрицы Паули

$$\hat{\vec{s}} = \frac{1}{2} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$$

$$\hat{\sigma}_{x(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{y(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{z(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрицы вместе с единичной матрицей

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

образуют полный базис в пространстве двухрядных матриц!

Алгебра матриц Паули

Составить таблицу умножения

$$\left(\hat{\sigma}_i\right)_{\alpha\beta}\left(\hat{\sigma}_k\right)_{\beta\gamma} = ?$$

	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$
$\hat{\sigma}_0$	?	?	?	?
$\hat{\sigma}_1$	?	?	?	?
$\hat{\sigma}_2$	?	?	?	?
$\hat{\sigma}_3$	?	?	?	?

Таблица умножения

	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$
$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$
$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_0$	$i\hat{\sigma}_3$	$-i\hat{\sigma}_2$
$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_2$	$-i\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_0$	$i\hat{\sigma}_1$
$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_3$	$i\hat{\sigma}_2$	$-i\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_0$

Используя абсолютный антисимметричный тензор и символ Кронекера, записать в «ковариантном» виде

$$\left(\hat{\sigma}_i\right)_{\alpha\beta}\left(\hat{\sigma}_k\right)_{\beta\gamma} = \ldots \left(\hat{\sigma}_{\ldots}\right)_{\alpha\gamma} \,?$$

Результат

Внимание:

«немое» суммирование проводится только по дважды повторяющимся **греческим** индексам

$$\left(\hat{\sigma}_i\right)_{\alpha\beta}\left(\hat{\sigma}_k\right)_{\beta\gamma} = \delta_{ik}\cdot\left(\hat{\sigma}_0\right)_{\alpha\gamma} + i\sum_{l=1}^{3} e_{ikl}\left(\hat{\sigma}_l\right)_{\alpha\gamma}, \quad i,k = 1,2,3$$

Греческие индексы обычно принято не указывать, т.е.

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_k = \delta_{ik}\cdot\hat{\sigma}_0 + i\sum_{l=1}^{3} e_{ikl}\hat{\sigma}_l, \quad i,k = 1,2,3$$

ЗАДАЧИ

($i,k=1,2,3$)

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_k+\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_i=?$$

$$Sp\left(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_k\right)=?$$

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{a}\right)^2=?$$

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{a}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{b}\right)=?$$

$$Sp\left(\hat{\vec{\sigma}}\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{a}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{b}\right)\right)=?$$

Пример решения

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{a}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{b}\right)=a_i b_k\left(\hat{\sigma}_i\right)_{\alpha\beta}\left(\hat{\sigma}_k\right)_{\beta\gamma}=a_i b_k\left[\delta_{ik}\cdot\left(\hat{\sigma}_0\right)_{\alpha\gamma}+i\sum_{l=1}^{3}e_{ikl}\left(\hat{\sigma}_l\right)_{\alpha\gamma}\right]$$

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{a}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\vec{b}\right)\left(\hat{\sigma}_0\right)_{\alpha\gamma}+i\sum_{l=1}^{3}e_{ikl}a_i b_k\left(\hat{\sigma}_l\right)_{\alpha\gamma}=\left(\vec{a}\vec{b}\right)\hat{\sigma}_0+i\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\hat{\vec{\sigma}}$$

$$\vec{a}=\vec{b}=\vec{e}_y\Rightarrow\vec{e}_y^{\,2}=1$$

10.5. Доказать соотношения:

а) $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2\widehat{I}$,

б) $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{a})(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{b}) = (\mathbf{ab})\widehat{I} + i([\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$,

в) $\mathrm{Sp}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{a})(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{b})) = 2i[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$,

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — произвольные трехмерные векторы; $\widehat{I}$ — единичный оператор; $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\widehat{\sigma}_x, \widehat{\sigma}_y, \widehat{\sigma}_z\}$ — векторный оператор Паули, компонентами которого являются матрицы Паули (40.4); $\mathrm{Sp}\,\widehat{A}$ — след матрицы $\widehat{A}$.

ЗАДАЧИ

Найти явный вид операторов

$$\exp\left(i\alpha\hat{\sigma}_y\right)=?,\quad \exp\left(i\alpha\left(\vec{n}\hat{\vec{\sigma}}\right)\right)=?,\quad \exp\left(\alpha\left(\vec{n}\hat{\vec{\sigma}}\right)\right)=?$$

Указание: воспользоваться формулой Эйлера и представить косинус и синус в виде ряда Тейлора.

ОТВЕТЫ

$$e^{i\alpha\widehat{\sigma}_y} = \widehat{I}\cos\alpha + i\widehat{\sigma}_y\sin\alpha$$

$$e^{i\alpha(\mathbf{n}\widehat{\boldsymbol{\sigma}})} = \widehat{I}\cos\alpha + i(\mathbf{n}\widehat{\boldsymbol{\sigma}})\sin\alpha,$$

$$e^{\alpha(\mathbf{n}\widehat{\boldsymbol{\sigma}})} = \widehat{I}\,\mathrm{ch}\,a + (\mathbf{n}\widehat{\boldsymbol{\sigma}})\,\mathrm{sh}\,a,$$

$$\hat{I} \equiv \hat{\sigma}_0$$