Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность фкп***

§3. Функция комплексного переменного

1. Основные определения

Пусть D,E – множества комплексных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если* $\forall z \in D$ *поставлен в соответствие элемент* $w \in E$ (***один или несколько***), *то говорят, что на множестве* D *задана* ***функция*** (***отображение***) *с множеством значений* E.

Записывают: $f: D \to E$, $w = f(z)$

(где f – закон, осуществляющий соответствие)

Называют: D – множество определения функции

z ($z \in D$) – аргумент (независимая переменная)

E – множество значений

w ($w \in E$) – зависимая переменная (функция)

Если $z \to w$, то функцию называют ***однозначной***.

Если $z \to w_1, w_2, \ldots w_n, \ldots$, то функцию называют ***многозначной***.

Пусть задана функция $w = f(z)$.

Если $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, то

$$u = u(x,y) \ , \ \ v = v(x,y) \ .$$

Таким образом, $f(z) \leftrightarrow u(x,y) \ , \ v(x,y)$.

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются соответственно ***действительной*** и ***мнимой частью функции*** $f(z)$

Обозначают: $\mathrm{Re}f(z)$ и $\mathrm{Im}f(z)$.

Т.к. $f(z)$ характеризуют 4 переменные (x, y, u, v), то геометрическая интерпретация $f(z)$ невозможна.

Для геометрической иллюстрации $f(z)$ используют 2 экземпляра комплексных плоскостей: O_1xy и O_2uv ($D \subset O_1xy$, $E \subset O_2uv$).

Задание функции $f(z)$ устанавливает соответствие между двумя множествами D и E:

$$z \to w, \quad \text{где } z \in D,\, w \in E\ .$$

При этом устанавливается и обратное соответствие: $w \to z$.

Функция $z = \phi(w)$ называется ***обратной*** к $f(z)$.

Если $f(z)$ и ее обратная $\phi(w)$ – обе однозначны, то функция $f(z)$ называется ***однолистной***.

2.Элементарные функции комплексного переменного

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Элементарной функцией*** *называется функция, которая может быть задана одной формулой* $w = f(z)$, *где* $f(z)$ *– выражение, составленное из основных элементарных функций и комплексных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.*

ОСНОВНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ Ф.К.П.

1) Степенная: $w = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Свойства функции

а) $\mathrm{D} = \mathbb{C}$, $\mathrm{E} = \mathbb{C}$ $(\infty^n = \infty)$;

б) однозначная, неоднолистная.

2) Корень *n*-степени $(n \in \mathbb{N})$: $w = \sqrt[n]{z}$

Свойства функции

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$

б) многозначна $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0; \infty\}$.

3) Показательная функция: $w = \mathrm{e}^z \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^x \cdot (\cos y + \mathrm{i}\sin y)$.

Свойства функции

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

б) $\mathrm{e}^z\,|_{z=x} = \mathrm{e}^x$;

в) e^z – периодическая, $T = 2\pi\mathrm{i}$.

4) Тригонометрические функции:

$$w = \cos z\ ,\ \ w = \sin z\ ,\ \ w = \mathrm{tg}\, z\ ,\ \ w = \mathrm{ctg}\, z\ .$$

Свойства $w = \cos z$, $w = \sin z$

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$;

б) $\cos z\,|_{z=x} = \cos x$, $\sin z\,|_{z=x} = \sin x$;

в) периодические, $T = 2\pi$;

г) неограниченные;

д) $\cos z$ – четная, $\sin z$ – нечетная;

е) имеют только действительные нули

$$\cos z = 0 \ \text{ при } \ z = \pi/2 + \pi\mathrm{k}\ ,$$

$$\sin z = 0 \ \text{ при } \ z = \pi\mathrm{k}\ .$$

Свойства $w = \mathrm{tg} z$, $w = \mathrm{ctg} z$

а) $D(\mathrm{tg} z) = \mathbb{C} \backslash \{\pi/2 + \pi\mathrm{k}\}$, $E(\mathrm{tg} z) = \mathbb{C}$,

$D(\mathrm{ctg} z) = \mathbb{C} \backslash \{\pi\mathrm{k}\}$, $E(\mathrm{ctg} z) = \mathbb{C}$;

б) $\mathrm{tg} z\,|_{\,z = x} = \mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} z\,|_{\,z = x} = \mathrm{ctg} x$;

в) периодические, $T = \pi$;

г) нечетные;

д) имеют только действительные нули

$$\mathrm{ctg} z = 0 \text{ при } z = \pi/2 + \pi\mathrm{k} ,$$

$$\mathrm{tg} z = 0 \text{ при } z = \pi\mathrm{k} .$$

6) Гиперболические функции: $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$.

Свойства $w = \operatorname{ch} z$, $w = \operatorname{sh} z$

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$;

б) $\operatorname{ch} z\,|_{z=x} = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} z\,|_{z=x} = \operatorname{sh} x$;

в) периодические, $T = 2\pi \mathrm{i}$;

г) $\operatorname{ch} z$ – четная, $\operatorname{sh} z$ – нечетная;

д) справедливы равенства (доказать самостоятельно):

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z;$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{ch}(x + \mathrm{i}y) = \operatorname{ch} x \cdot \cos y + \mathrm{i} \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y;$$

$$\operatorname{sh}(x + \mathrm{i}y) = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + \mathrm{i} \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y.$$

Свойства $w = \mathrm{th} z$, $w = \mathrm{cth} z$

а) $D(\mathrm{th} z) = \mathbb{C} \backslash \{(\pi/2 + \pi \mathrm{k})\mathrm{i}\}$, $E(\mathrm{th} z) = \mathbb{C}$,

$D(\mathrm{cth} z) = \mathbb{C} \backslash \{\pi \mathrm{ki}\}$, $E(\mathrm{cth} z) = \mathbb{C}$;

б) $\mathrm{th} z \,|_{z = x} = \mathrm{th} x$, $\mathrm{cth} z \,|_{z = x} = \mathrm{cth} x$;

в) периодические, $T = \pi \mathrm{i}$;

г) нечетные.

7) Натуральный логарифм: $w = \mathrm{Ln} z$:

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Arg} z = \ln|z| + \mathrm{i} \cdot \arg z + \mathrm{i} \cdot 2\pi k \,.$$

Многозначная функция, определенная на $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.

Функция $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i} \cdot \arg z$ называется ***главным значением логарифма***.

8) Обратные тригонометрические:

$$\mathrm{Arcsin}z\,,\ \mathrm{Arccos}z\,,\ \mathrm{Arctg}z\,,\ \mathrm{Arcctg}z\,.$$

$$\mathrm{Arcsin}\,z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \quad \mathrm{Arccos}\,z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\mathrm{Arctg}\,z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \quad \mathrm{Arcctg}\,z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{iz-1}{iz+1}\right). \quad (z \neq \pm i)$$

9) Общая степенная: $w = z^{\mu}$, где $\mu \in \mathbb{C}$.

Многозначная функция, определенная на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ формулой

$$w = z^{\mu} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{\mu \cdot \mathrm{Ln} z}\,.$$

Функция $w = \mathrm{e}^{\mu \cdot \ln z}$ называется ***главным значением общей степенной функции***.

10) Общая показательная: $w = a^{z}$, где $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Многозначная функция, определенная на $\mathbb{C}$ формулой

$$w = a^{z} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{z \cdot \mathrm{Ln} a}\,.$$

Функция $w = \mathrm{e}^{z \cdot \ln a}$ называется ***главным значением общей показательной функции***.

§4. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

1. Предел функции комплексного переменного

Пусть $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, кроме, может быть, самой точки z_0.

$U^*(z_0, \delta) = U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ – ***проколотая окрестность точки*** z_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Коши, на языке ε-δ).

Число $w_0 \in \mathbb{C}$ *называется* ***пределом функции*** $f(z)$ ***при*** z ***стремящемся к*** z_0 (пределом функции $f(z)$ в точке z_0), *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$\text{если } z \in U^*(z_0, \delta), \text{ то } f(z) \in U(w_0, \varepsilon).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (по Гейне, на языке последовательностей).

Число $w_0 \in \mathbb{C}$ *называется* ***пределом функции*** $f(z)$ ***при*** z ***стремящемся к*** z_0, *если для любой последовательности* $\{z_n\}$ *значений аргумента, стремящейся к* z_0, *соответствующая последовательность значений функции* $\{f(z_n)\}$ *сходится к* w_0.

ТЕОРЕМА 1. *Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны*.

Обозначают: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0, \qquad f(z) \to w_0, \text{ ïðè } \; z \to z_0$

Пусть $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

Из определения 2 и теоремы 1 §2 получаем, что справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 2. *Число* $w_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0$ *является пределом функции* $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ *при* $z \to z_0$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{è} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$$

Из теоремы 2 следует, что на пределы ф.к.п. переносятся все свойства пределов функций нескольких переменных.

2. Непрерывность функции комплексного переменного

Пусть $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функция* $f(z)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{z_0}$ *если справедливо равенство*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \qquad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке ε-δ).

Функция $f(z)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{z_0}$ *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое*, *что*

если $z \in U(z_0, \delta)$ (т.е. $|z - z_0| < \delta$),

то $f(z) \in U(f(z_0), \varepsilon)$ (т.е. $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$).

Функция, непрерывная в каждой точке множества $G \subseteq \mathbb{C}$, называется ***непрерывной на множестве*** G.

Пусть $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

Из теоремы 2 получаем, что справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 3. *Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 $\Leftrightarrow$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$* .

Из теоремы 3 следует, что на непрерывные ф.к.п. переносятся все свойства непрерывных функций нескольких переменных.

В частности, для ф.к.п. будет справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 (аналог теоремы Вейерштрасса для ф.к.п.)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, D – замкнутое и ограниченное, $f(z)$ – непрерывна на D.

Тогда 1) *$f(z)$ ограничена на D*, т.е. $\exists M > 0$ *такое, что*

$$|f(z)| < M, \ \forall z \in D;$$

2) *модуль функции $f(z)$ достигает в D наибольшего и наименьшего значения*