Перемещения при изгибе

Под расчетом на жесткость понимают оценку упругой податливости балки под действием приложенных нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать установленных нормами пределов.

$$\boxed{f_{макс} \le [f] = \frac{l}{400 \ldots 800}}$$

Условие жесткости при изгибе

Перемещение центра тяжести сечения по направлению перпендикулярному к оси балки, называется ***прогибом***. Прогиб обозначается буквой w

Наибольший прогиб в пролете или на консоли балки, называется ***стрелой прогиба*** и обозначается буквой f.

Угол, ***θ***, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению и есть ***угол поворота***.

Угол поворота считается положительным, при повороте сечения против хода часовой стрелки

Угол поворота сечения равен значению производной от прогиба по координате *Z* в этом же сечении, то есть:

$$\frac{d\varpi}{dz} = \theta$$

Уравнение упругой линии балки

$$\frac{d\varpi^2}{d^2z} = \frac{M(z)}{EI_x}$$

Существуют три метода решения дифференциального уравнения упругой линии балки. Это метод непосредственного интегрирования, метод Клебша и метод начальных параметров.

Метод непосредственного интегрирования

Проинтегрировав уравнение упругой линии балки первый раз, получают выражение для определения углов поворота:

$$EI_x \frac{d\varpi}{dz} = EI_x\theta(z) = \frac{dM(z)}{dz} + C$$

Интегрируя второй раз, находят выражения для определения прогибов:

$$EI_x\varpi(z) = \frac{dM(z)^2}{d^2z} + Cz + D$$

Значения постоянных интегрирования *C* и *D* определяют из начальных условий на опорах балки

Уравнение упругой линии балки

Метод Клебша

Для составления уравнений необходимо выполнить следующие основные условия:

- начало координат, для всех участков, необходимо расположить в крайнем левом конце балки;
- интегрирование дифференциального уравнения упругой линии балки проводить, не раскрывая скобок;
- при включении в уравнение внешнего сосредоточенного момента *M* его необходимо помножить на $(Z\text{-}a)^0$ где *a* - координата сечения, в котором приложен момент;
- в случае обрыва распределенной нагрузки ее продлевают до конца балки, а для восстановления действительных условий нагружения вводят «компенсирующую» нагрузку обратного направления

Уравнение упругой линии балки

Метод начальных параметров

Для углов поворота:

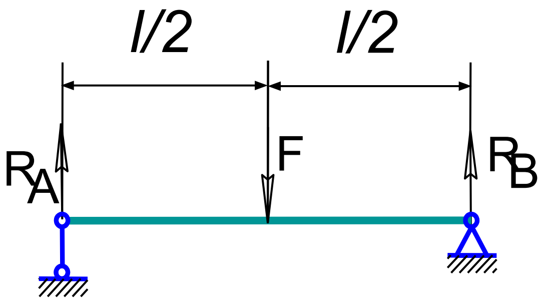
$$\theta = \theta_0 + \sum \frac{R_i\left(z-d_i\right)^2}{2EI_x} + \sum \frac{M_{pi}\left(z-d_i\right)}{EI_x} + \frac{1}{EI_x}\left[\sum \frac{M_i\left(z-a_i\right)}{1} + \sum \frac{F_i\left(z-b_i\right)^2}{2} + \sum \frac{q_i\left(z-c_i\right)^3}{6}\right]$$

Для прогибов:

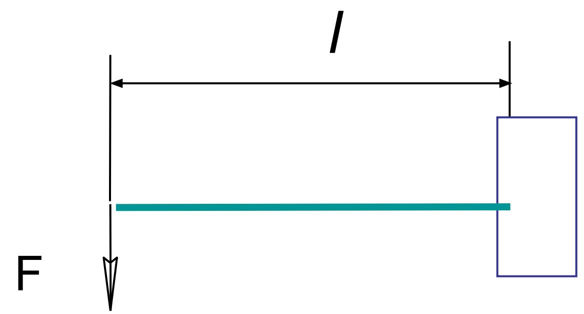
$$w = w_0 + \theta_0 z + \sum \frac{R_i\left(z-d_i\right)^3}{6EI_x} + \sum \frac{M_{pi}\left(z-d_i\right)^2}{2EI_x} + \frac{1}{EI_x}\left[\sum \frac{M_i\left(z-a_i\right)^2}{2} + \sum \frac{F_i\left(z-b_i\right)^3}{6} + \sum \frac{q_i\left(z-c_i\right)^4}{24}\right]$$

Где θ—угол поворота сечения, w—прогиб, θ_0 - угол поворота в начале координат, w_0—прогиб в начале координат, d_i—расстояние от начало координат до *i*-той опоры балки, a_i—расстояние от начало координат до точки приложения сосредоточенного момента M_i , b_i—расстояние от начало координат до точки приложения сосредоточенной силы Fi , ci—расстояние от начало координат до начала участка распределенной нагрузки q_i , R_i и M_{pi}—реакция и реактивный момент в опорах балки.

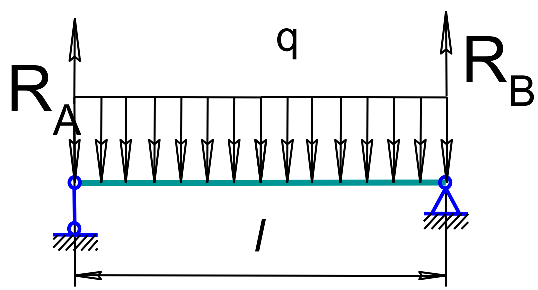
Определение прогибов для простых случаев



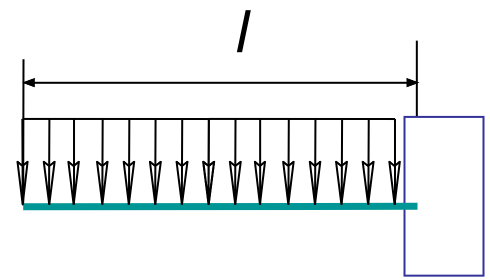
$$f_{l/2} = -\frac{Fl^3}{48EI}$$



$$f_l = -\frac{Fl^3}{3EI}$$



$$f_{l/2} = -\frac{5ql^4}{384EI}$$



$$f_l = -\frac{ql^4}{8EI}$$