

Московский государственный университет

им. М.В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра математики



Виктор Юрьевич Попов

**Лекции по теории функции
комплексной переменной**

Лекция № 1

§1. Комплексные числа и последовательности комплексных чисел.

**п. 1. Понятие комплексного числа.
Геометрическая интерпретация.**

Немного истории

Комплексные числа вошли в математику в XVI в. как корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$D < 0 \quad x_{1,2} = ?$ **Как понимать?**
Что делать?

**Вначале такие корни отбрасывались,
как «невозможные», «мнимые», и
появление их считалось признаком
отсутствия решения у задачи,
приведшей к квадратному
уравнению.**

**Обоснование: мнимые корни не
выражают *величины*, так как их
нельзя сравнивать друг с другом,
нельзя сказать, какое мнимое больше,
какое меньше.**

Однако позже было обнаружено, что над ними можно производить четыре алгебраических действия, причем сохраняются свойства, присущие действиям над действительными числами.

**Это и послужило основанием
называть мнимые корни числами
(«Алгебра» итальянского инженера Р.
Бомбелли, 1572 г.).**

**Геометрическое изображение
комплексных чисел в виде точек или
векторов "на плоскости" было
введено в 1799 г. датским землемером**

К. Весселем (1745—1818)

**и несколько позже, в 1806 г.,
французским математиком**

Д. Арганом (1768—1822).

Символ i для мнимой единицы ввел в 1777 г. Л. Эйлер (1707— 1783).

Термин «комплексное число» ввел в 1881 г. К. Вейерштрасс (1815— 1897).

**Большое значение в раскрытии
важной роли комплексных чисел в
математике имели работы Л. Эйлера и
К. Гаусса (1777—1855), а также
теорема Даламбера (1717—1783) о том,
что любое алгебраическое уравнение
 n -й степени с комплексными
коэффициентами имеет n
комплексных корней.**

До появления этой теоремы можно было бы ожидать, что, подобно тому как квадратное уравнение привело к комплексным числам, попытки решения уравнений степеней $n = 3, 4, \dots$, приведут к появлению все новых и новых типов чисел.

**Геометрическое изображение
комплексного числа как точки или
вектора на плоскости, естественно,
приводит к мысли построить
дальнейшие обобщения понятия о
числе.**

Однако поиски числовой системы, зависящей от трех единиц: $1, i, j$, геометрически изображаемой с помощью точек или векторов 3-мерного пространства, не увенчались успехом: не удавалось так придумать правила действий над новыми «числами», чтобы сохранились обычные их свойства.

**В 1843 т. английский математик
У. Гамильтон (1805—1865) показал,
что можно построить числовые
системы, зависящие от четырех
единиц: $1, i, j, k$, если поступиться
одним свойством —
переместительным законом
умножения.**

**Вообще, гиперкомплексными числами
ранга n называются «числа» вида**

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \boxed{} + a_n e_n$$

$e_1, e_2, \boxed{}, e_n$ — единицы,

$a_1, a_2, \boxed{}, a_n$ — действительные
числа,

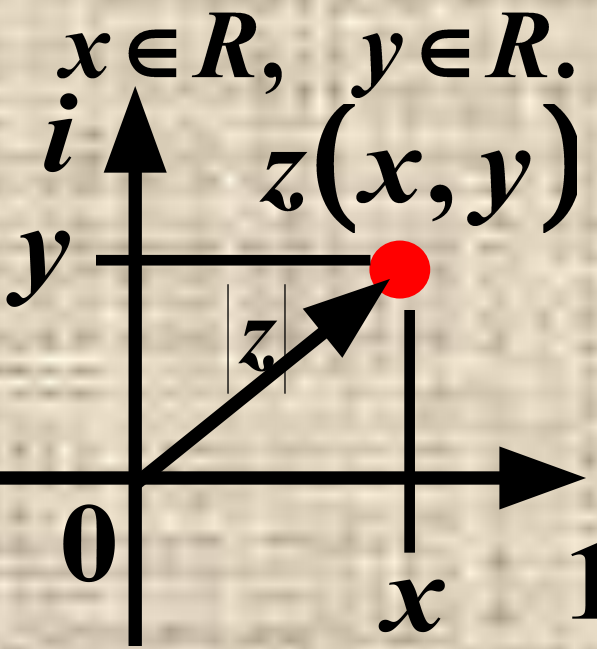
**когда указаны правила
алгебраических действий с такими
«числами».**

Однако К. Вейерштрасс показал, что при $n > 2$ нельзя сохранить все свойства, присущие алгебраическим действиям над действительными и комплексными числами.

Немецкий математик Ф. Фробениус (1849—1917) доказал, что, даже отказавшись от переместительного закона умножения, можно сохранить остальные свойства алгебраических действий дополнительно лишь для $n = 4$, а при $n \neq 1, 2, 4$, как бы не вводилось правило умножения, всегда будут пары отличных от нуля гиперкомплексных чисел, произведение которых равно нулю.

Рассмотрим плоскость R^2 . $\forall z(x, y) \in R^2$ -вектор

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1)$$

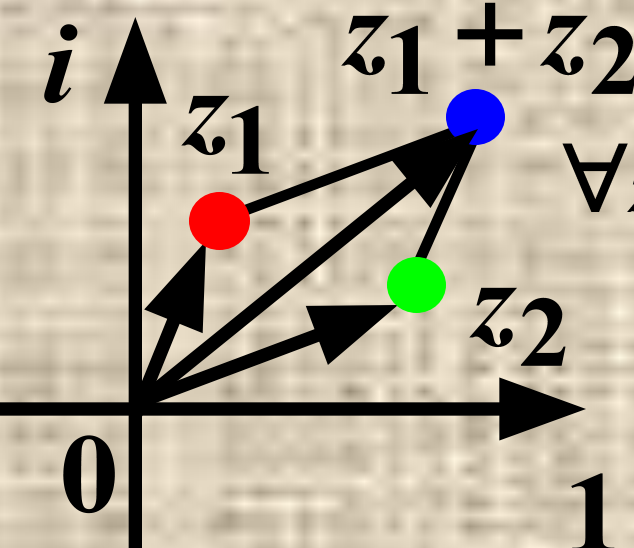


Определим операцию сложения:

$$\forall z_1(x_1, y_1), z_2(x_2, y_2) \boxtimes z(x, y):$$

$$z = z_1 + z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2; \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}; \quad (2)$$

операцию умножения на число:



$$\forall z(x, y), \alpha \in R: \alpha z = (\alpha x, \alpha y)$$

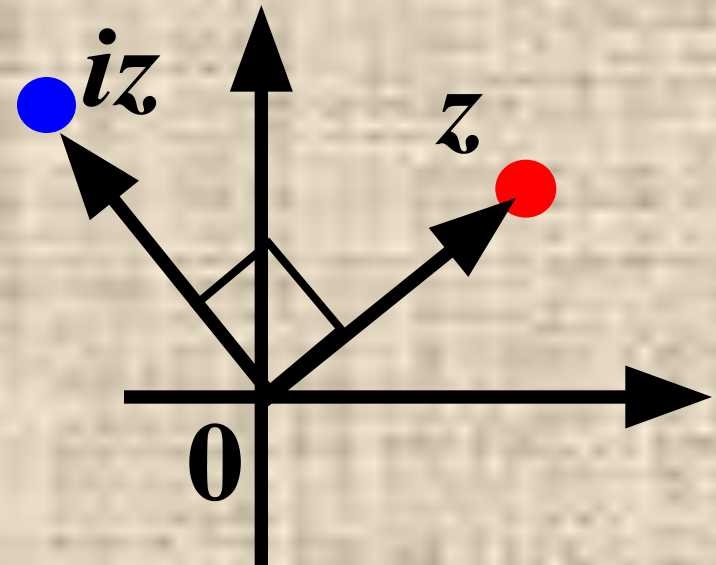
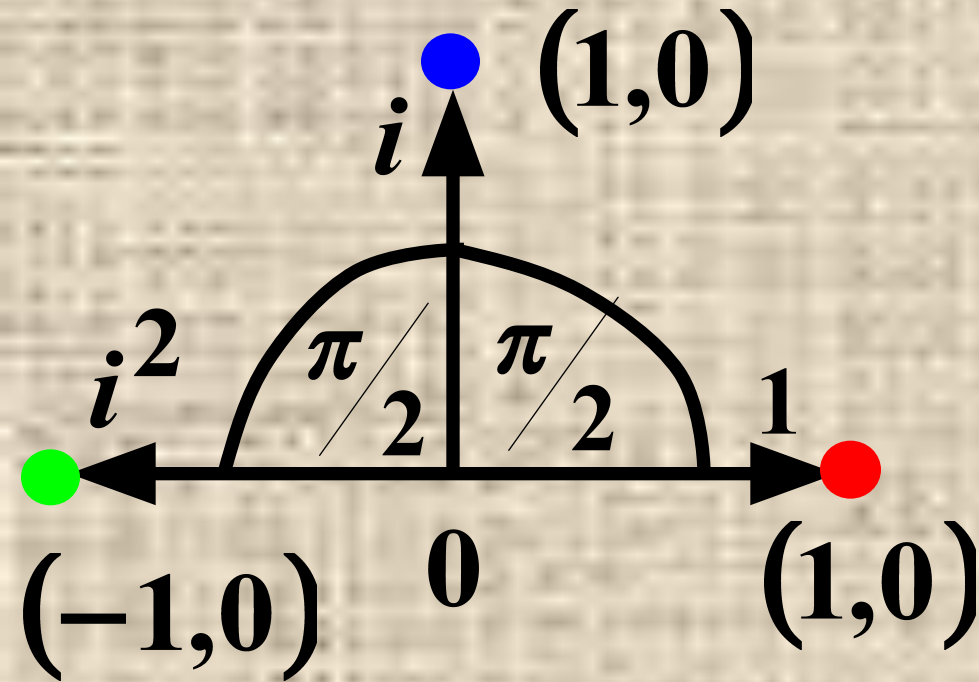
$$1 = (1, 0) \quad i = (0, 1) \quad \text{базис} \quad (3)$$

$$\forall z(x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

Как ввести $z = z_1 \cdot z_2$, сохранив (1) и (2) ?

Вектор 1 – единица операции умножения.

Определим $i \cdot i = i^2$. Т.к. $1 \cdot i = i$, то полагают
 $i^2 = -1$. (4)



$$z(x, y): z \cdot i = (x \cdot 1 + y \cdot i) \cdot i = -y \cdot 1 + x \cdot i = (-y, x) \quad (5)$$

Правило умножения $z_1(x_1, y_1), z_2(x_2, y_2) \in R^2$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \\ &= (x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot i) = \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \cdot 1 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i = \\ &= ((x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2); (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)) \quad (6) \end{aligned}$$

Def. Числовая плоскость R^2 называется комплексной плоскостью C , если для ее точек определены модули (1), операции сложения (2) и умножения (6).

Точки комплексной плоскости C называются комплексными числами.

Действительные числа включаются в множество комплексных чисел.

$a=(a,0)$ -вещественное число, $0=(0, 0)$, $1=(1, 0)$,
 $-1=(-1, 0)$, $ib= (0, b)$ -чисто мнимое число,
 $i=(0, 1)$ - мнимая единица, $-i=(0, -1)$.

Равенство. $z_1(x_1, y_1)$, $z_2(x_2, y_2)$:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Алгебраическая форма записи.

$$z = x + i y = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

$z(x, y)$ – упорядоченная пара вещественных чисел.

Комплексное сопряжение.

$$\bar{z} \equiv z^* = x - iy = (x, -y). \quad \operatorname{Re} z^* = x, \quad \operatorname{Im} z^* = -y.$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}, \quad (z^*)^* = z,$$

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*, \quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*,$$

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Деление.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

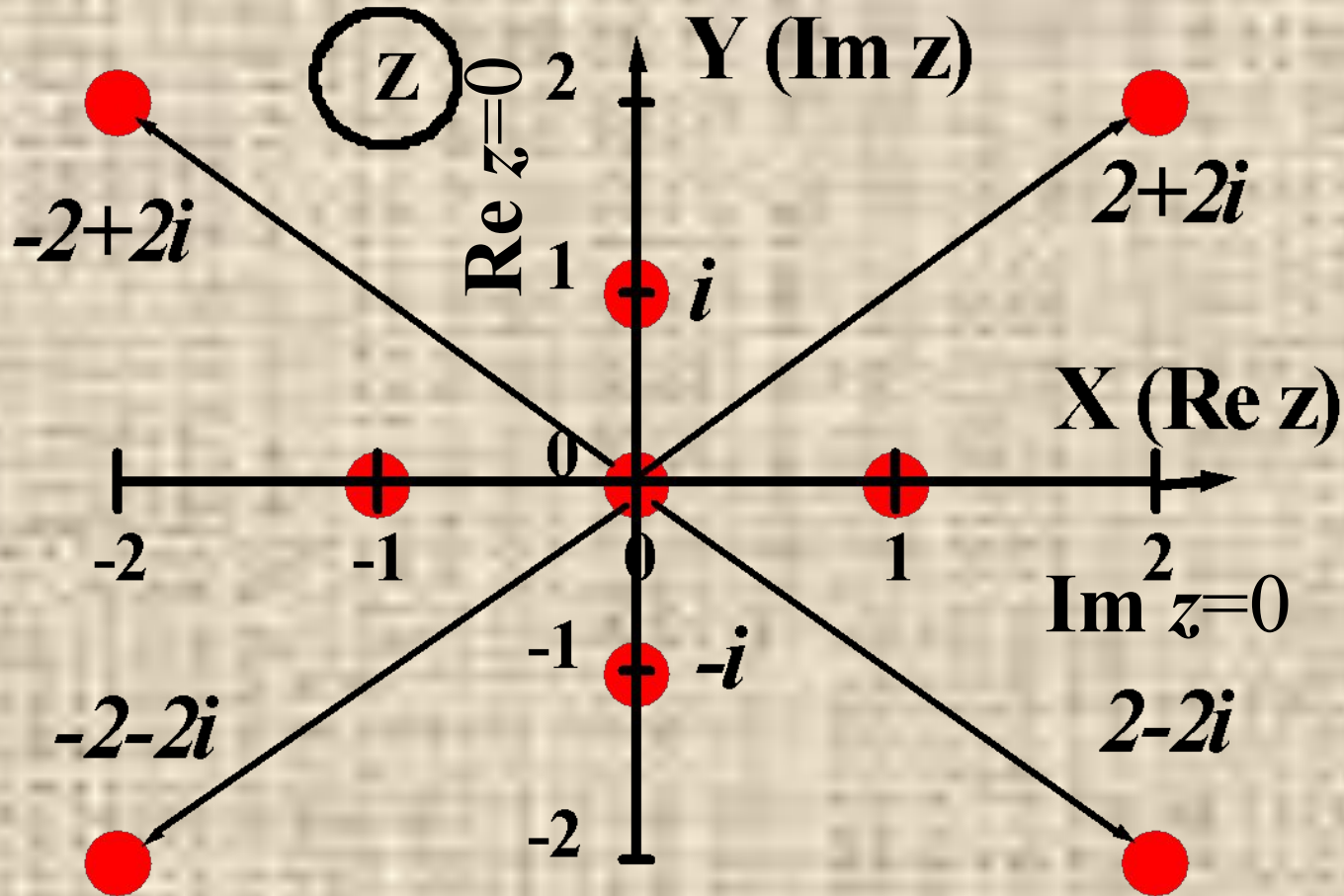
Примеры.

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot (2xy);$$

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i & n = 4k + 1 \\ -1 & n = 4k + 2 \\ -i & n = 4k + 3 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad i^* = -i;$$

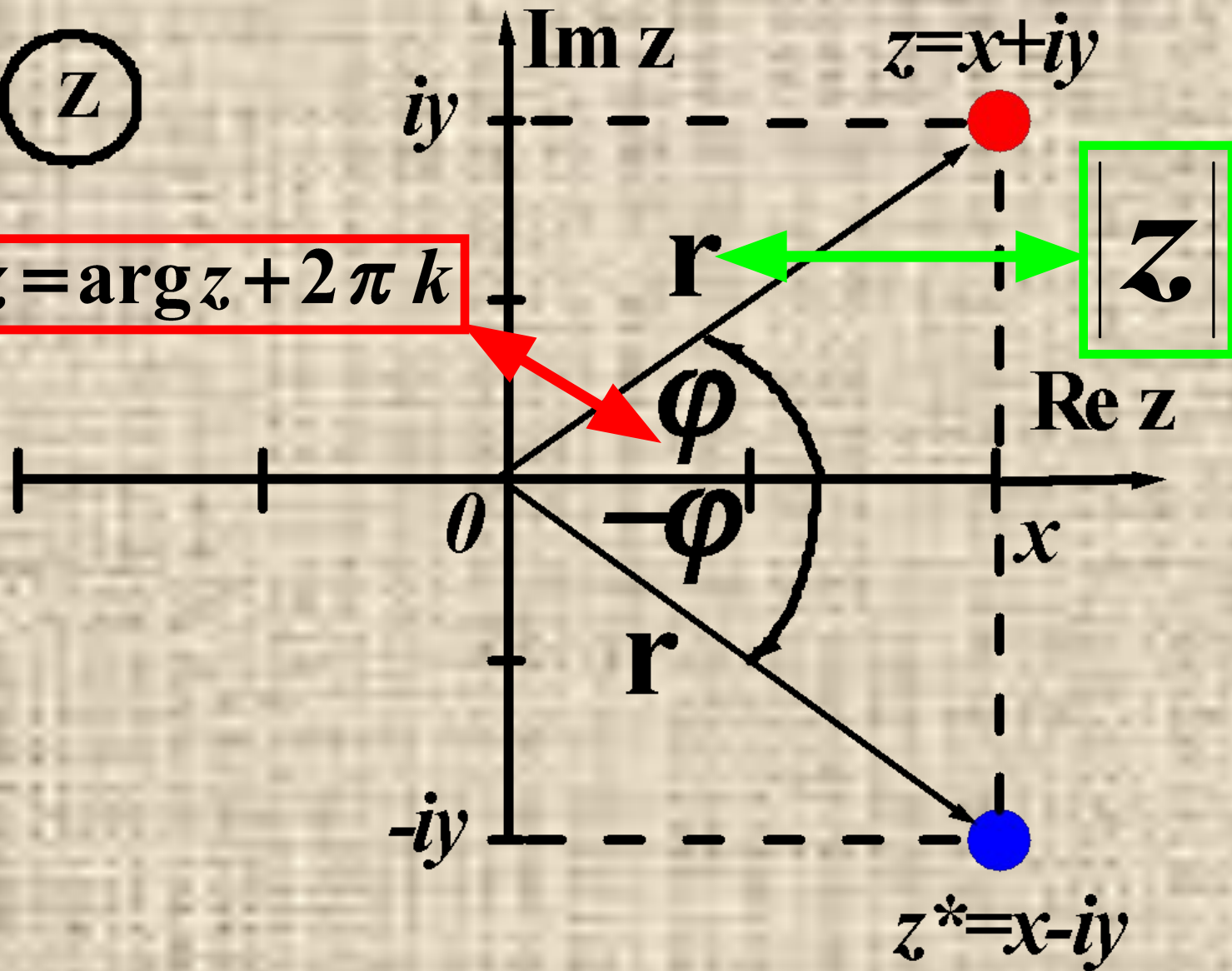
$$\begin{aligned} \frac{3+4i}{2-3i} &= \frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6-12}{2^2+3^2} + i \frac{8+9}{2^2+3^2} = \\ &= -\frac{6}{13} + i \frac{17}{13}; \quad \frac{1}{i} = -i \end{aligned}$$

Комплексные числа можно изображать точками на комплексной плоскости.



\mathbb{Z}

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$$



Модуль и аргумент комплексного числа

Полярные координаты $(x, y) \leftrightarrow (r, \phi)$.

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Модуль комплексного числа:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

Аргумент комплексного числа:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}; \quad \varphi = \varphi_0 + 2\pi k; \quad \alpha_0 \leq \varphi_0 \leq \alpha_0 + 2\pi$$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2\pi k;$$

$$\alpha_0 \leq \operatorname{arg} z \leq \alpha_0 + 2\pi \quad \underline{\text{Главное значение}} \text{ аргумента.}$$

$-\pi < \arg z \leq \pi$ -разрез по $\operatorname{Re} z < 0$ - РС Soft

$0 \leq \arg z < 2\pi$ -разрез по $\operatorname{Re} z > 0$ -литература

Примеры. $|0|=0$, $\arg 0$ — **не определен!**

$$|1|=1, \arg 1=0; \quad |i|=1, \arg i=\frac{\pi}{2};$$

$$|-1|=1, \arg(-1)=\pi; \quad |-i|=1, \arg(-i)=-\frac{\pi}{2};$$

$$z=2-2i, \quad |z|=2\sqrt{2}, \quad \arg(z)=-\frac{\pi}{4};$$

Тригонометрическая форма

$$z = x + iy, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |z|, \quad \varphi \in \text{Arg } z.$$

формула Эйлера: $\varphi \in \mathbb{R} \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$

Показательная форма

$$z = r e^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in \text{Arg } z.$$

Теорема. Пусть $\varphi, \psi \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, тогда

$$1) \quad e^{i0} = 1; \quad 2) \quad e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi + \psi)};$$

$$3) \quad e^{i(\varphi + 2\pi k)} = e^{i\varphi}; \quad 4) \quad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}; \quad 5) \quad |e^{i\varphi}| = 1.$$

Примеры.

$$\begin{aligned}1 &= 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = e^{i0}; & \sqrt{3} - i &= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}; \\i &= 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = e^{i\frac{\pi}{2}}; & -2 - 2i &= 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}; \\-1 &= 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = e^{i\pi}; & i\sqrt{3} - 1 &= 2e^{i\frac{2\pi}{3}}; \\-i &= 1 \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}; \\-e^{i\frac{\pi}{4}} &= e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}.\end{aligned}$$

Вопрос. $e^{i\varphi} = e^{\frac{(i2\pi)\varphi}{2\pi}} = 1^{\frac{\varphi}{2\pi}} = 1 \quad \forall \varphi ?$

Умножение и деление в показательной форме.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Формула Муавра. $z = r e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \\ = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

$$\boxed{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$$

Извлечение корня. $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$
 $= r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) = re^{i(\varphi + 2\pi k)};$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Корень n -той степени из комплексного числа принимает n различных значений.

Примеры.

$$\begin{aligned}(-1-i)^3 &= (\sqrt{2})^3 e^{-i\frac{3\pi}{4} \cdot 3} = (\sqrt{2})^3 e^{-i\frac{9\pi}{4}} = \\ &= (\sqrt{2})^3 e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})^3 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \\ &= (\sqrt{2})^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 - 2i.\end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{2-2i} = (\sqrt{8})^{1/3} e^{i \frac{1}{3} \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right)} =$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \begin{array}{l} e^{-i \frac{\pi}{12}}, \quad k=0; \\ e^{i \frac{7\pi}{12}}, \quad k=1; \\ e^{i \frac{5\pi}{4}} = e^{-i \frac{3\pi}{4}} = -1-i, \quad k=2; \end{array} \right.$$

$$\sqrt[4]{1} = e^{i \frac{2\pi k}{4}} = \begin{cases} e^{i0} = 1, & k=0; \\ e^{i \frac{\pi}{2}} = i, & k=1; \\ e^{i\pi} = -1, & k=2; \\ e^{i \frac{3\pi}{2}} = e^{-i \frac{\pi}{2}} = -i, & k=3. \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), & k=0; \\ e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), & k=1; \\ e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), & k=2; \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), & k=3. \end{cases}$$

Множество комплексных чисел \mathbb{C} образует поле.

Поле \mathbb{C} не является упорядоченным.

В упорядоченном поле $P \quad \forall a, b \in P$

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}. \quad \text{В поле } \mathbb{C} \quad 1^2 + i^2 = 0, \text{ но} \\ 1 \neq 0, \quad i \neq 0.$$

Операция сравнения в \mathbb{C} не определена.

Утверждение $1+i > i \Rightarrow 1 > 0$ – неверно.

Модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ удовлетворяет

аксиомам норм.

Неравенства треугольника.

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Упорядоченная четверка $E = (C, +, \cdot, | \cdot |)$

является нормированным векторным пространством над полем R . Оно превратится в метрическое пространство, если $\forall z_1, z_2 \in C$ ввести метрику по формуле $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Из теоремы Фробениуса следует, что поле C является «максимальным» числовым полем и дальнейшее расширение понятия числа невозможно.

Некоторые простейшие множества точек на комплексной плоскости.

