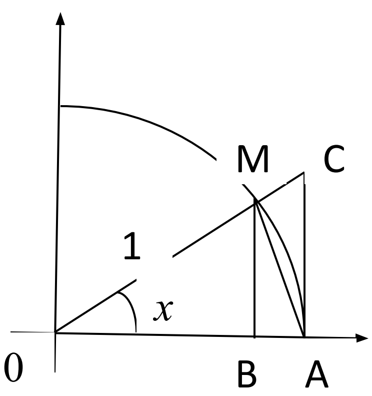
Предел и непрерывность функции.

Замечательные пределы.

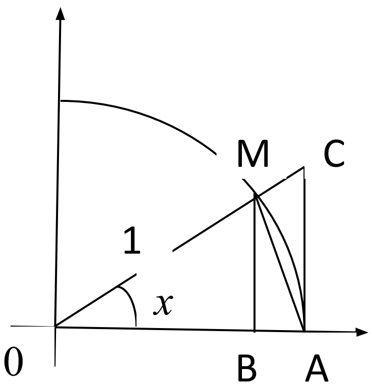
I. Первый замечательный предел $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

Доказательство:



Обозначим $\angle MOB = x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$S_{\Delta\, MOA} < S_{\textit{сектора}\ \mathrm{MOA}} < S_{\Delta\, COA}$$

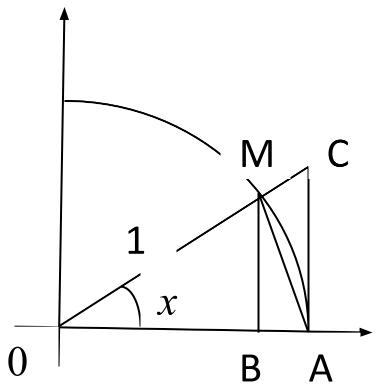


$$\boxed{S_{\Delta\, MOA} < S_{\textit{сектора}\,\mathrm{MOA}} < S_{\Delta\, COA}}$$

$$S_{\Delta\, MOA} = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot MB = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x$$

$$S_{\textit{сектора}\,\mathrm{MOA}} = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot \overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x = \frac{1}{2}x$$

$$S_{\Delta\, COA} = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x = \frac{1}{2}\tan x$$



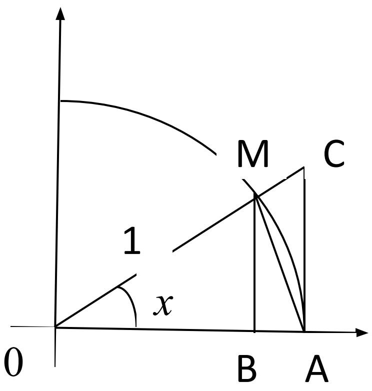
$$\boxed{S_{\Delta\, MOA} < S_{\textit{сектора}\ \mathrm{MOA}} < S_{\Delta\, COA}}$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \quad \Big|\cdot 2$$

$$\sin x < x < \tan x \quad \Big| : \sin x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

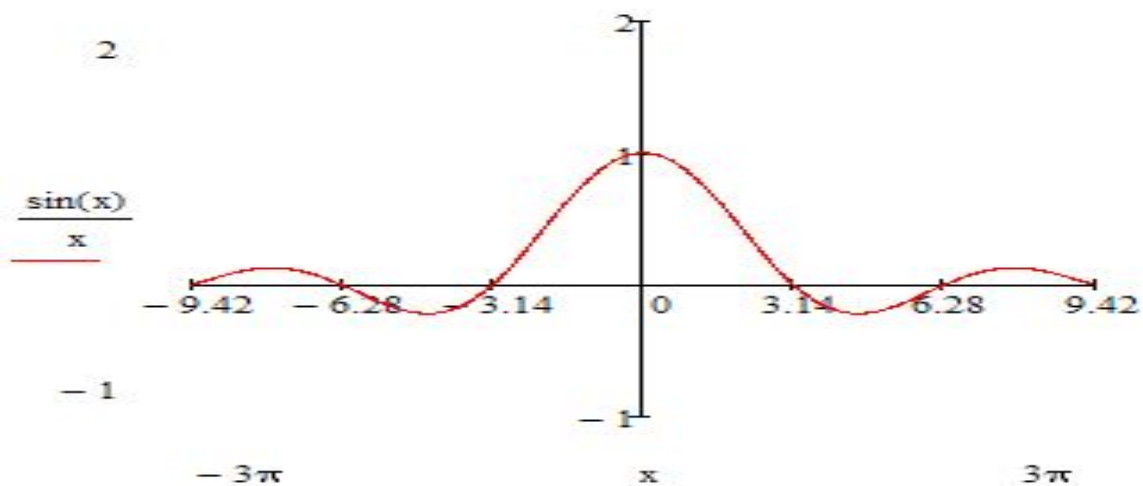
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$



$$\boxed{1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1, \qquad \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

На основании теоремы о пределах (7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$



Вычисление пределов функций

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\tan x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

Вычисление пределов функций

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

2) Вычислить $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 4x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot x}{4\cdot\sin 4x}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{4}$$

II. Второй замечательный предел $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

- Теорема 1.

Переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$

имеет предел, заключенный между 2 и 3.

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

- Определение.

Предел переменной величины $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ при

$n\to\infty$ называется числом e:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Из теоремы 1 и определения следует, что $2\le e<3$

Число e- иррациональное : e=2,7182818284…

- Теорема 2.

Функция $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ при $x\to\infty$ имеет предел, равный числу e.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Доказательство:

- 1) пусть $x \to +\infty$

$$n \le x < n+1$$

$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Если $x\to\infty$, то и $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e$$

На основании теоремы о пределах (7): $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) пусть $x\to-\infty$.

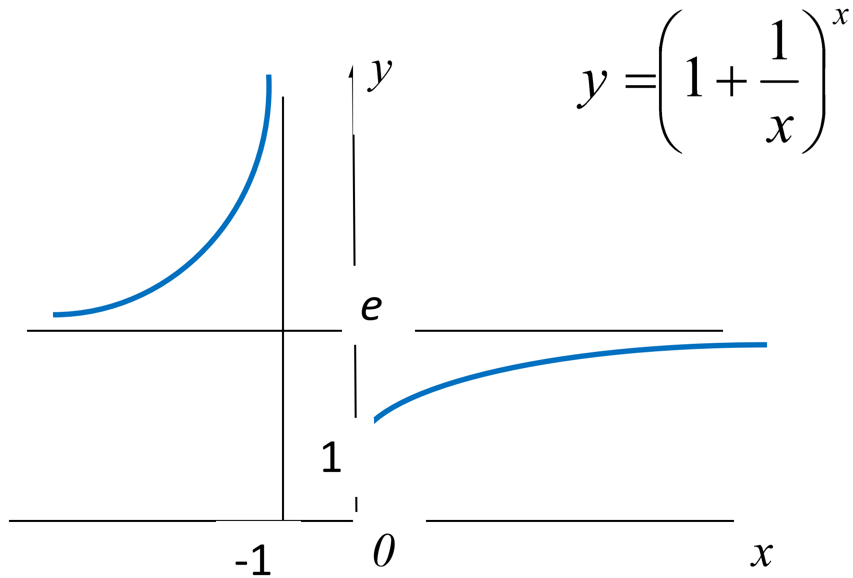
Введем $t=-(x+1) \;\Rightarrow\; x=-(t+1)$

При $t\to+\infty$,будет $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e$$

Теорема доказана.



$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

- Если $\frac{1}{x}=\alpha$, то при $x\to\infty$ имеем $\alpha\to0$.

Тогда

$$\boxed{\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e}$$

Вычисление пределов функций

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=e^{3}$$

Вычисление пределов функций

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

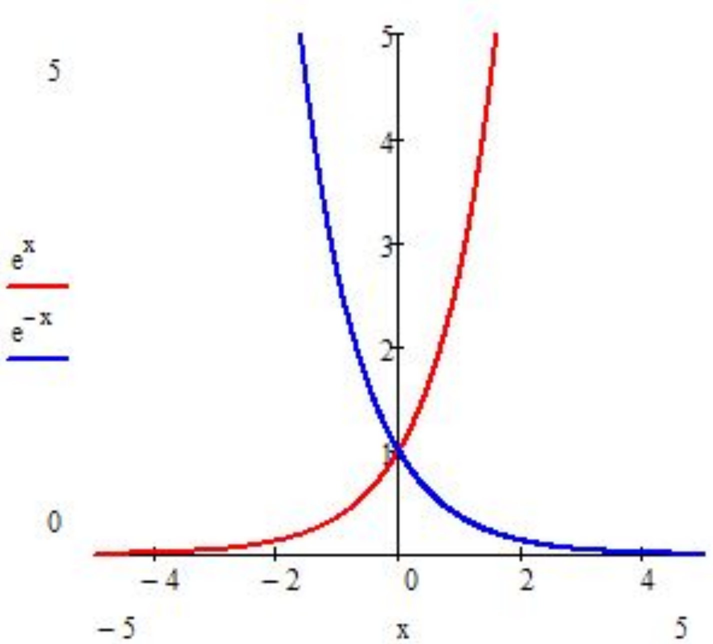
2) Вычислить $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

пусть $x=2t$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2}=e^{2}$$

Экспонента (exponential function) $y = e^x$

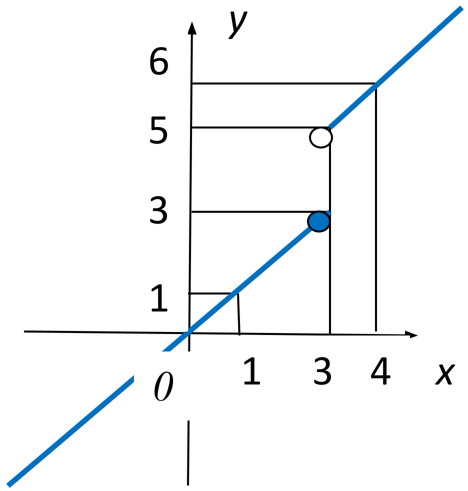
- механика (теория колебаний)
- электротехника
- радиотехника
- радиохимия и т.д.



Непрерывность функции.

Пример 1.

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \le 3 \\ x + 2, & x > 3 \end{cases}$$



если $x \to 1$, то $f(x) \to f(1) = 1$

если $x \to 4$, то $f(x) \to f(4) = 6$

если $x \to 3$?

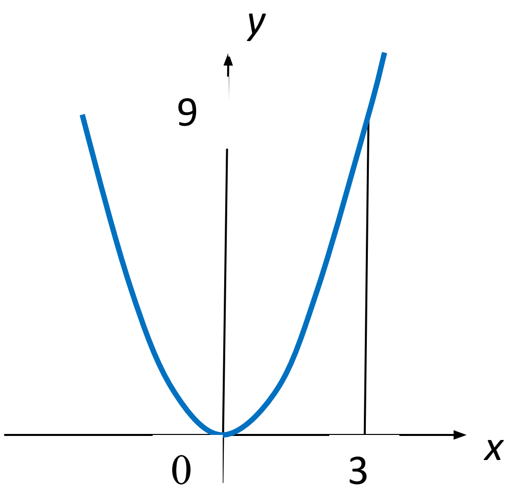
если $x \to 3-$, то $f(x) \to 3$

если $x \to 3+$, то $f(x) \to 5$

Функция в точке $x = 3$ претерпевает разрыв.

Пример 2.

$$y = f(x) = x^2$$



если $x \to 3$-, то $f(x) \to f(3) = 9$

если $x \to 3+$, то $f(x) \to f(3) = 9$

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = 9 = f(3)$$

Функция $f(x)$ в точке $x=3$ непрерывна.

Определение 1.

- Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

(*функция непрерывна в точке* x_0, *если предел функции при* $x\to x_0$ *равен значению функции от предела аргумента*).

Если равенство не выполняется, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет разрыв.

Исследовать данную функцию на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ 0, & 0<x\le 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$$

Для $x_1=0$:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\sqrt{1-x}=1\\ &\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} 0=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0-} f(x)\ne \lim_{x\to 0+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \quad \textit{не} \quad \textit{существует}$$

Функция $f(x)$ в точке $x_1=0$ имеет разрыв.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ 0, & 0<x\le 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$$

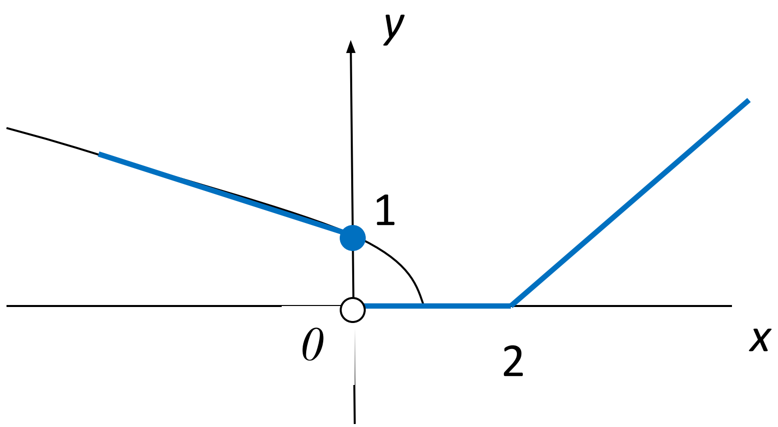
Для $x_2=2$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} 0 = 0\\ \lim_{x\to 2+} f(x) &= \lim_{x\to 2+}\left(x-2\right)=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2} f(x)=0$$

$$f(x_0)=f(2)=0 \qquad \text{т.е.} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Функция $f(x)$ в точке $x_2=2$ непрерывна.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ 0, & 0<x\le 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

так как $\quad , \; x_0 = \lim_{x \to x_0} x$

то $\quad \boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)}$

Если функция непрерывна, то при отыскании её предела можно вместо аргумента подставить его предельное значение.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)}$$

Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

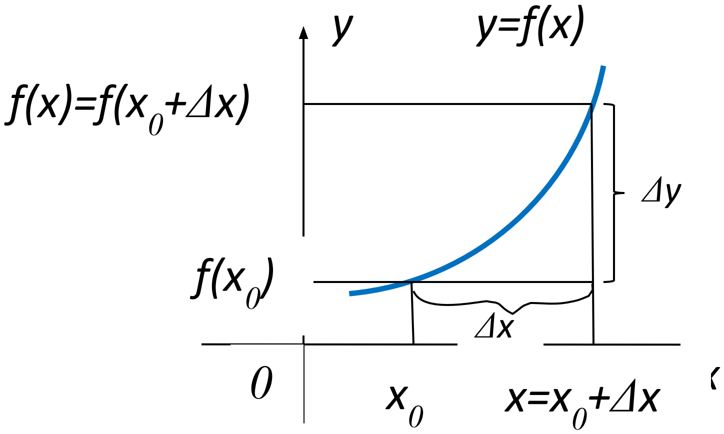
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

Определение 2.

- Функция $f(x)$ называется непрерывной, если бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$



$$\Delta x = x - x_0$$

приращение аргумента

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

приращение функции

Сравнение бесконечно малых.

Пусть при $x \to x_0$ функции $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$.
Тогда:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой **более высокого порядка**, чем $\beta(x)$.

(*$\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$*)

пример.

Пусть $\alpha(x) = x^n, \quad \beta(x) = x, \quad n > 1, \quad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} = 0$$

$\alpha(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

2) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = a \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$

называются бесконечно малыми одного порядка .

Пример.

Функции *sin3x* и *sinx* являются при $x \to 0$ бесконечно малыми одного порядка, т.к.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x \cdot \sin 3x}{3x \cdot \sin x} = 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 3$$

3) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются

эквивалентными бесконечно малыми. ($\alpha(x) \sim \beta(x)$)

Пример.

Функции *sinx* и x являются при $x \to 0$ эквивалентными бесконечно малыми (*sinx*$\sim$*x*), т.к.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Пример.

Функции $ln(1+x)$ и x являются при $x\to 0$ эквивалентными бесконечно малыми ($ln(1+x) \backsim x$) , т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$$

4) если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = a \neq 0$, то $\alpha(x)$ называется

бесконечно малой n-го порядка относительно $\beta(x)$

Пример.

Функция $1\text{-}\cos x$ является при $x \to 0$ бесконечно малой второго порядка малости по отношению к бесконечно малой x , т.к.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Пример.

Функция $\alpha(x) = x^2 + 4$ является при $x \to \infty$ бесконечно большой более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^3 - 2$, т.к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^3-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}}{x-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Примеры эквивалентных бесконечно малых функций:.

$\sin x \sim x$

$\tan x \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$\arctan x \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$e^x - 1 \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a$

$1 - \cos x \sim x^2/2$

Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left[\ln(1+x)\sim x\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arctan 3x}=\left[\begin{array}{c} e^{x}-1\sim\ x \\ \arctan x\sim x\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$