2.3 Ускорение материальной точки

При неравномерном движении скорость частицы может меняться как по величине, так и по направлению. Быстрота изменения скорости определяется *ускорением*, которое равно первой производной от скорости по времени

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}} \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

Проекция вектора ускорения на декартовую ось x **равна**

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \ddot{x}$$

Для a_y **и** a_z **надо сделать замены** $x \to y$ **и** $x \to z$.

Выделим из ускорения нормальную и тангенциальную составляющие. Для этого подставим в **(2.3.1)** **формулу для скорости** $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau}$ **получим**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(\upsilon\vec{\tau})}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Обозначим $\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} = \dot{\upsilon}\vec{\tau}$; $\vec{a}_n = \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \upsilon\dot{\vec{\tau}}$ **(2.3.2)**

Тогда $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ **(2.3.2)**

$\vec{a}_\tau$ ***- тангенциальное ускорение***

$\vec{a}_n$ ***- нормальное ускорение***

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено вдоль единичного вектора $\vec{\tau}$, поэтому оно направлено по касательной к траектории и характеризует изменение модуля скорости.

При этом если ϑ > 0, то модуль скорости со временем увеличивается, а вектор тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в ту же сторону, что и вектор скорости $\vec{\upsilon}$.

Если ϑ < 0, то модуль скорости со временем уменьшается, а векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{\upsilon}$ направлены в противоположные стороны.

При равномерном движении ϑ = 0 тангенциального ускорения нет.

Нормальное ускорение не изменяет модуль скорости, оно меняет только направление скорости.

$$\vec{a}_n = \upsilon\dot{\vec{\tau}} = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} \qquad (2.3.4)$$

С учетом полученных выражений для тангенциального и нормального ускорений, вектор полного ускорения принимает окончательный вид

$$\vec{a} = \dot{\upsilon}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} \qquad (2.3.5)$$

Поскольку $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ è $|\vec{n}| = |\vec{\tau}| = 1$, то модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{(\dot{\upsilon})^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2} \qquad (2.3.6)$$

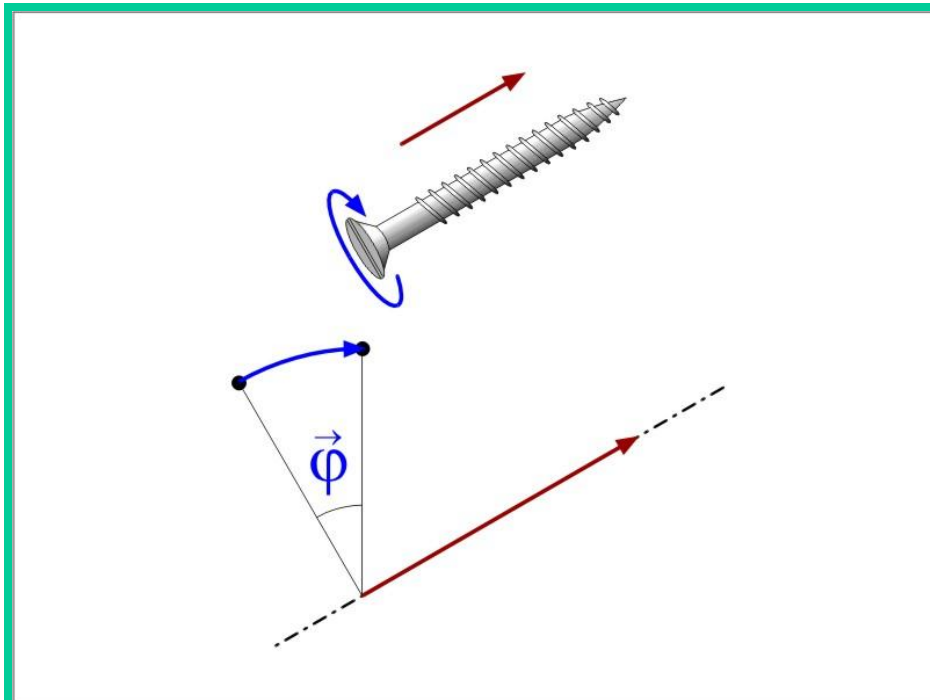
2.4 Кинематика вращательного движения

2.4.1 *Угловая скорость*

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Для указания направления поворота совместим *правый винт* с осью поворота так, чтобы его головка вращалась в направлении движения точек тела по окружности.

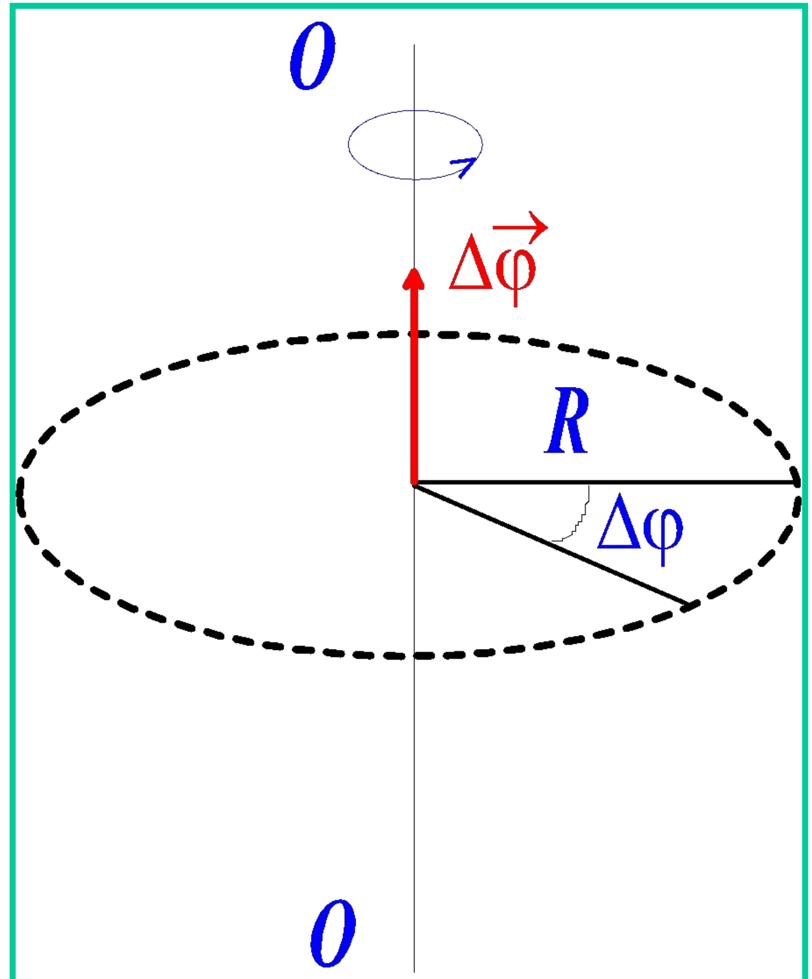
Это правило называется *правилом правого винта:*

вращение головки правого винта по часовой стрелке вызывает его перемещение в сторону острия



Пусть некоторая точка тела движется по окружности радиуса R и за время Δt поворачивается на угол $\Delta\phi$.

Данный поворот можно описать вектором $\Delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, длина которого равна углу поворота, а направление совпадает с направлением оси вращения в сторону острия правого винта.

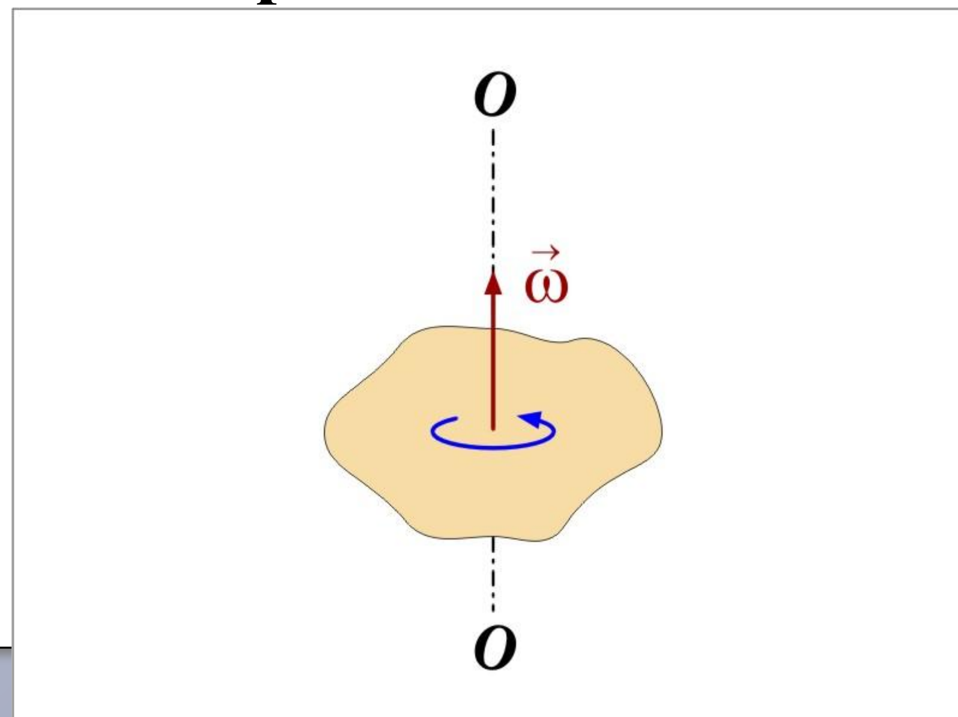


Угловой скоростью **называется величина, равная первой производной угла поворота по времени**

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad \mathbf{(2.4.1)}$$

Угловая скорость направлена вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта. Угловая скорость $\vec{\omega}$ **характеризует быстроту вращения тела.** ***Единицей ее измерения*** **является**

$$\left(\frac{\boldsymbol{рад}}{\boldsymbol{сек}}\right)$$



Вращение с постоянной угловой скоростью называется *равномерным*. Его можно охарактеризовать периодом и частотой вращения.

Период вращения T – это время, за которое точка совершает один полный поворот на угол 2π

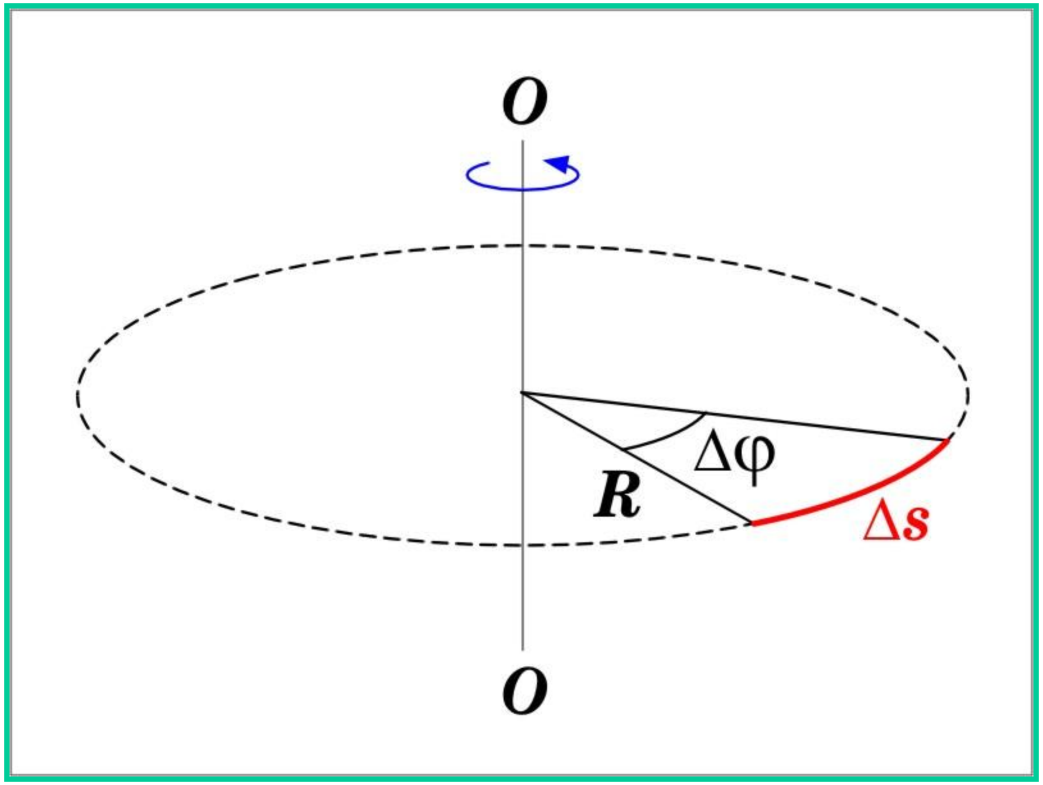
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad (2.4.2)$$

Частота вращения ν равна числу полных поворотов за единицу времени

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \qquad (2.4.3)$$

Единицей измерения частоты является $\left(\frac{1}{сек}\right) = Гц$

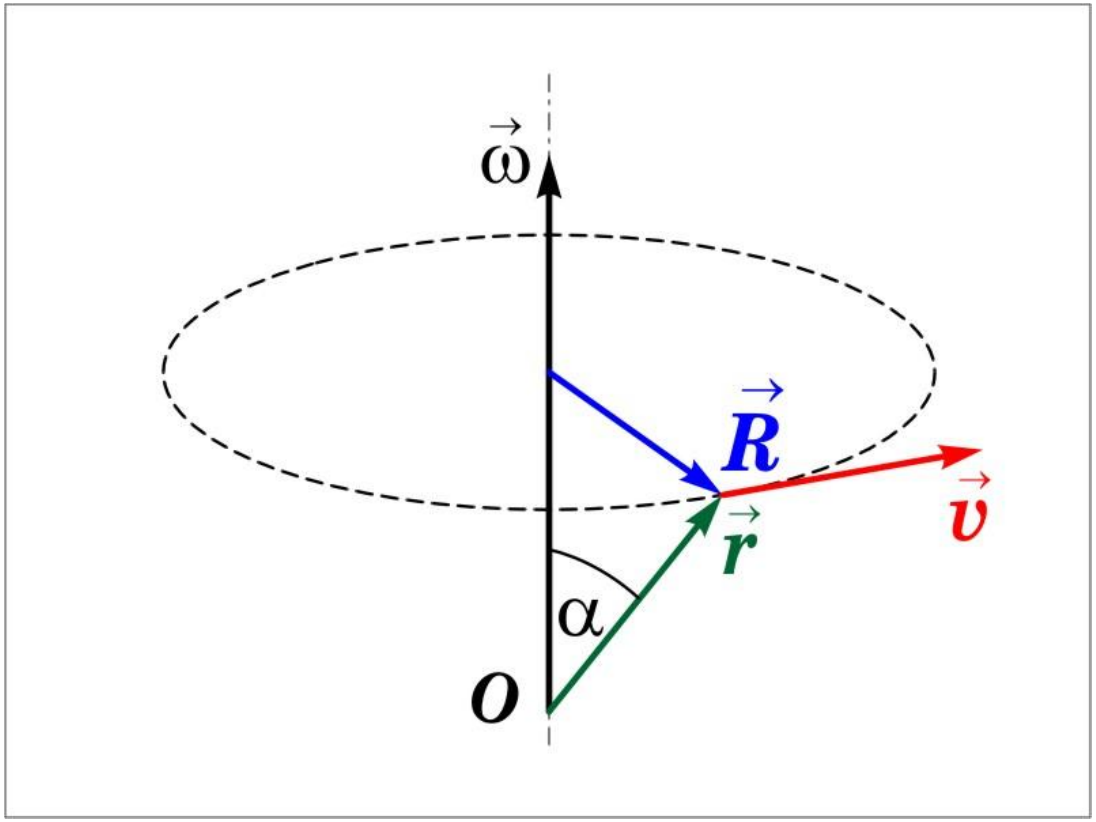
Найдем связь между угловой и линейной скоростями. Пусть за малый промежуток времени тело повернулось на угол $\Delta\varphi$. Точка, находящаяся на расстоянии R от оси, пройдет путь $\Delta s = R\Delta\varphi$. Поэтому модуль ее линейной скорости равен



$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} =$$

$$\omega = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R \tag{2.4.4}$$

Из определения векторного произведения следует, что направление вектора $[\vec{\omega}\vec{r}]$ совпадает с направлением вектора скорости $\vec{\upsilon}$, а модуль равен $\omega r \sin\alpha = \omega R$. Поэтому с учетом (2.4.2) можем записать



$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\vec{r}] \qquad (2.4.5)$$

Три вектора

$$\vec{\upsilon}, \vec{\omega}, \vec{R}$$

взаимно перпендикулярны друг к другу

$$\vec{\upsilon} \perp \vec{\omega} \perp \vec{R}$$

2.4.2 Угловое ускорение

При неравномерном вращении вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ может менять как свою величину, так и свое направление за счет поворота оси вращения.

Пусть за время Δt вектор $\vec{\omega}$ получил приращение $\Delta\vec{\omega}$.

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости вводится *угловое ускорение*

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2.4.6)$$

Угловое ускорение имеет размерность *рад/сек*^{2}.

Если $\varepsilon > 0$, то вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, куда направлен и вектор $\vec{\omega}$. Если $\varepsilon < 0$, то эти вектора направлены навстречу друг другу.

Запишем полное ускорение точки вращающегося тела в виде (2.3.2), как сумму нормального и тангенциального ускорений $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

Найдем выражения для этих составляющих ускорения

$$\vec{a}_\tau = \dot{\upsilon}\vec{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt}\vec{\tau} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau} = R\varepsilon\vec{\tau} \qquad (2.4.7)$$

$$\vec{a}_n = a_n\vec{n} = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} = \omega^2 R\vec{n} = -\omega^2\vec{R}$$

В последнем равенстве стоит знак (-), потому что вектор нормали $\vec{n}$, направлен к центру кривизны, а вектор $\vec{R}$ направлен от этого центра. Модули ускорений равны

$$a_\tau = R\varepsilon \quad ; \quad a_n = \omega^2 R; \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

3. Динамика материальной точки

В основе классической механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в 1687 г. Эти законы являются обобщением опытных фактов о поведении макроскопических тел, движущихся со скоростями много меньшими скорости света.

3.1 Первый закон Ньютона.
Инерциальные системы отсчета

В разных системах отсчета движение одного и того же тела носит разный характер. Но относительно некоторых систем движение тел оказывается особенно простым. Эти системы отличаются от других тем, что в них *тело не подверженное воздействию других тел движется прямолинейно и равномерно*. Такие системы называются *инерциальными системами отсчета*.

Представление о существовании инерциальных систем ввел Галилей.

Казалось бы, опыт противоречит этому представлению и говорит об обратном – все движущиеся тела рано или поздно останавливаются, если их не подталкивать.

Поэтому Аристотель считал, что “естественным” состоянием тел является покой, а состояние движения требует постоянного воздействия силы.

Галилей же предположил, что трение, являющееся причиной остановки движения тел, надо рассматривать как силу, которую в принципе можно исключить. Тогда “естественным” состоянием тел становится не только покой, но и движение с постоянной скоростью, если на тела не действуют внешние силы.

Строго говоря, тел не подверженных влиянию других тел, в природе в принципе не существует, хотя бы потому, что *все тела притягивают друг друга гравитационными силами*. Но в ряде случаев влиянием этих сил можно пренебречь.

Например, *гелиоцентрическая* (*гелиос* по греч. – Солнце) система отсчета, связанная с Солнцем, с высокой степенью точности может считаться инерциальной.

С меньшим основанием можно рассматривать как инерциальную систему отсчета, связанную с Землей (*геоцентрическая система*), поскольку Земля движется с ускорением за счет вращения как вокруг Солнца, так и вокруг своей оси. Но это ускорение сравнительно мало и при решении многих практических задач им можно пренебречь.

Итак, Галилей пришел к выводу, что если на тело не действует никакая сила, то оно движется с постоянной скоростью. Каков при этом вид траектории тела в работах Галилея не уточняется.

Декарт и Ньютон считали, что эта траектория должна быть прямой линией.

Итак, *первый закон Ньютона* (*закон инерции*) утверждает существование инерциальных систем и формулируется следующим образом:

***всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, до тех пор пока воздействие со стороны других тел не изменит это состояние*.**

Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно, тоже является инерциальной. Поэтому *существует бесконечное множество инерциальных систем*.

Первый закон Ньютона говорит, что лишь внешнее воздействие может изменить скорость тела и сообщить ему ускорение. Всякое тело как бы "*противится*" изменению своего состояния движения. Это свойство тел называют "*инертностью*".

Опыт показывает, что одно и тоже воздействие разным телам сообщает разные ускорения, следовательно, *инертность разных тел разная*.

***Мерой инертности, то есть ее количественной характеристикой, является масса тела*.**

Масса тела определяется из сравнения с массой некоторого избранного тела, принятого за эталон. В роли эталона выступает *платино-иридиевое тело*, хранящееся в Севре (местечко около Парижа). Его масса считается равной 1 кг *в международной системе единиц СИ*.

Масса обладает *свойством аддитивности.* Это значит, что масса составного тела равна сумме масс отдельных его частей. Однако, данное свойство справедливо лишь в рамках классической механики.

В релятивистской механике аддитивность массы не имеет места.

Для количественного описания внешних воздействий вводится понятие *силы*.

***Сила – это векторная величина, выступающая мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры*.**

3.2 Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона является *основным законом динамики*. Он говорит о том, как меняется механическое движение тела под действием приложенной к нему силы. Опыт показывает, что:

ускорение тела пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально его массе

второй закон Ньютона $$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (3.2.1)$$

Второй закон Ньютона, также как и первый закон, *справедлив только в инерциальных системах отсчета*.

Из (3.2.1) следует, что когда сила равна нулю, ускорение тоже равно нулю. Это совпадает с утверждением первого закона Ньютона. Поэтому первый закон является частным случаем второго. Но, несмотря на это, первый закон формулируется независимо от второго, так как он *постулирует существование инерциальных систем отсчета*, что не является очевидным.

В классической механике считается, что масса тела не зависит от его движения, поэтому уравнение (3.2.1) можно переписать в виде

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

где $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ **-** ***импульс тела*.**

Таким образом $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (3.2.2)$$

Отсюда следует другая формулировка 2-го закона Ньютона: ***сила*** **равна** ***скорости изменения импульса тела.***

Формула (3.2.2) имеет более широкую область применимости, чем формула (3.2.1), поскольку она, в отличие от (3.2.1), справедлива также для тел с переменной массой и для тел, движущихся с около световыми скоростями.

Опыт показывает, что выполняется ***принцип независимости сил*** **:**

если на тело действуют одновременно несколько сил, то каждая из них сообщает телу такое ускорение, как если бы других сил не было.

Единицей измерения силы в системе **СИ** (метр-секунда-килограмм) является ***ньютон***, равный силе, которая массе **1** кг сообщает ускорение **1** м/с^2 в направлении действия силы

$$\mathbf{Н = 1\ \frac{кг \cdot м}{с^2}}$$

В системе **СГС** (сантиметр-грамм-секунда) ***единицей измерения силы*** является ***дина***, равная силе, которая массе **1** г сообщает ускорение **1** см/с^2

$$1\ дин = 10^{-5}\ Н$$

В системе **МКС** (метр-килограмм-секунда) ***единицей измерения силы*** является ***килограмм-сила (кГ)***, равная силе тяжести, действующей на массу **1** кг в том месте Земли, где **g = 9.8066 м/с^2**, поэтому

$$1\ кГ = 9.8066\ Н$$

3.3 Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если одно тело действует на другое тело с некоторой силой $\vec{F}_1$, то и другое тело в свою очередь тоже действует на первое тело с некоторой силой $\vec{F}_2$.

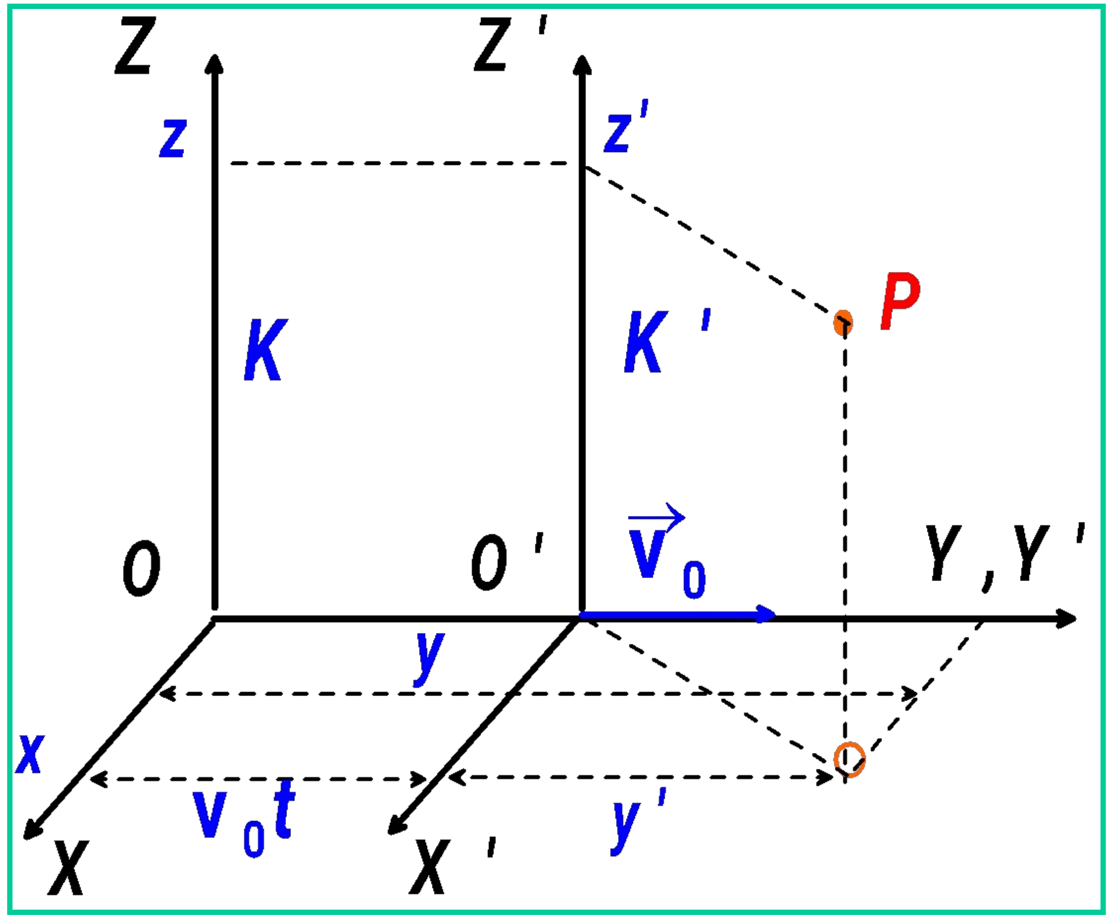
Опыт показывает, что *силы, с которыми действуют тела друг на друга, всегда равны по величине и противоположны по направлению* (третий закон Ньютона)

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad (3.3.1)$$

3.4 Принцип относительности Галилея

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью v_0. Систему K будем считать неподвижной.

Тогда система K' будет двигаться относительно системы K прямолинейно и равномерно. Выберем оси X, Y, Z системы K и оси X', Y', Z' системы K', так, чтобы оси Y и Y' совпадали, а оси X и X', а также Z и Z' были параллельны друг другу.



Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки P в системе K и координатами x', y', z' той же точки в системе K'.

Пусть в начальный момент времени начала координат обеих систем совпадали. Тогда, как следует из рисунка, в следующие моменты времени координаты двух систем будут связаны соотношениями

преобразования Галилея

$$x = x'$$
$$y = y' + \mathbf{v}_0 t$$
$$z = z'$$
$$t = t' \qquad (3.4.1)$$

Равенство времен говорит о том, что *время в классической механике считается абсолютным и течет одинаково во всех инерциальных системах отсчета*.

Продифференцируем по времени обе части (3.4.1). В результате находим связь между скоростями точки P в системах отсчета K и K'

$$v_x = v'_x$$

$$v_y = v'_y + v_0 \qquad (3.4.2a)$$

$$v_z = v'_z$$

Или в векторном виде $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$ (3.4.2b)

Эти соотношения дают ***правило сложения скоростей в классической механике***. Формула (3.4.2b) справедлива при произвольном выборе направлений координатных осей систем K и K', тогда как формулы (3.4.2a) выполняются только при выборе осей, указанном на рисунке.

Покажем, что из преобразований Галилея вытекает прежнее утверждение о том, что любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы с постоянной скоростью, тоже является инерциальной.

Для этого продифференцируем по времени соотношение (3.4.2b). Учитывая, что скорость $\mathbf{v}_0$ постоянна, получаем

$$\dot{a} = \dot{a}' \qquad (3.4.3)$$

Следовательно, ускорение тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, одно и тоже. Поэтому, если одна из этих систем инерциальная (то есть при отсутствии сил, когда $\dot{a} = 0$), то и остальные также будут инерциальными ($\dot{a}' = 0$).

Умножая (3.4.3) на массу тела, получим равенство сил

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

Таким образом, силы, действующие на частицу во всех инерциальных системах отсчета одинаковые.

Поэтому основное уравнение динамики (3.2.1) не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Значит, ***механические явления во всех инерциальных системах протекают одинаково и никакими механическими опытами нельзя установить находится ли инерциальная система в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения***

принцип относительности Галилея

3.5 Границы применимости классической механики

В течение 200 лет после создания механика Ньютона считалась абсолютно строгой теорией. Для объяснения любых физических явлений их сводили к механическим процессам, подчиняющимся законам Ньютона.

Однако, на рубеже 19-20 веков обнаружились факты, которые не укладывались в рамки классической механики. Рассмотрим некоторые из таких фактов.

1) Вопреки предположению Ньютона, массы тел оказываются не постоянными, а зависящими от скорости их движения v. Согласно специальной теории относительности Эйнштейна эта зависимость дается выражением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, m_0 - масса покоящегося тела.

Лишь когда $v/c << 1$ можно считать, что $m = m_0$.

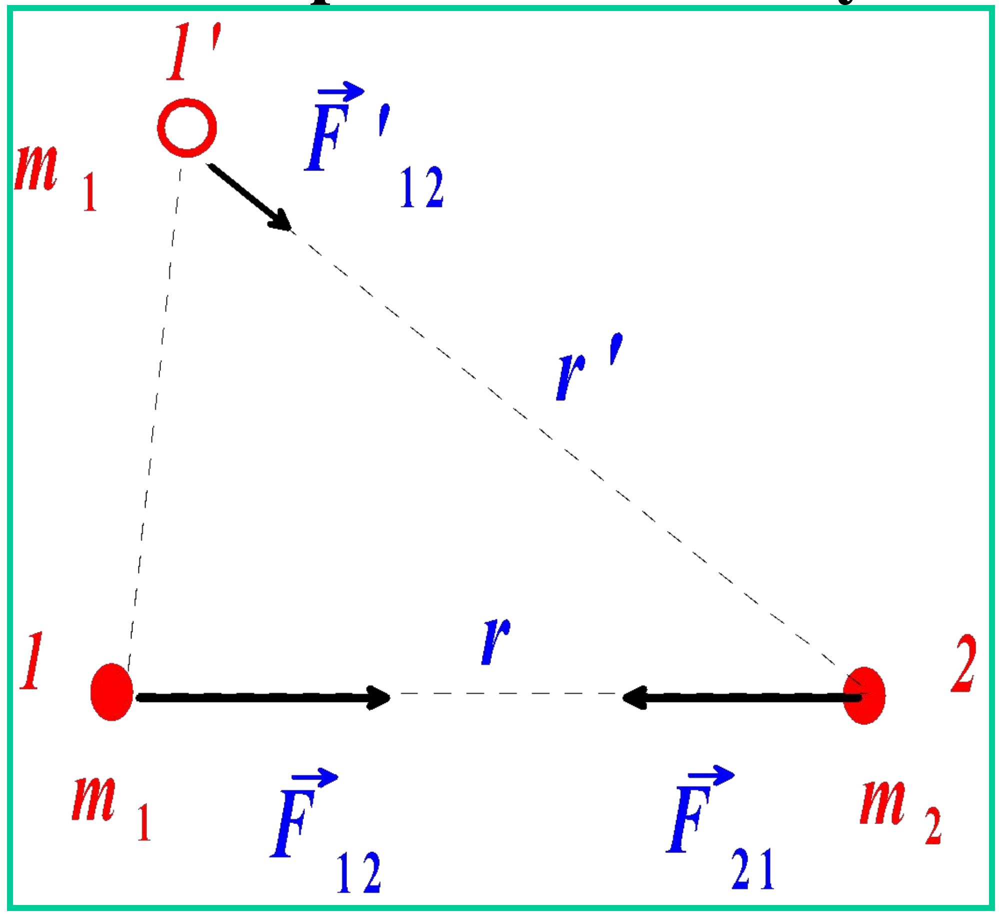
2) **В механике Ньютона считается, что силы, с которыми действуют тела друг на друга передаются мгновенно. Опыт же показывает, что взаимодействия распространяются с конечной скоростью, равной скорости света в пустоте. Это приводит к нарушению 3-го закона Ньютона.**

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим 2 частицы с массами m_1 и m_2, расположенными на расстоянии r. По закону всемирного тяготения они притягиваются друг к другу с силой

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Данное взаимодействие осуществляется посредством гравитационных полей, созданных вокруг каждой частицы.

Пусть первоначально частицы покоились. Тогда силы притяжения F_{12} и F_{21}, действующие на них будут равны по величине и противоположны по направлению. Пусть затем 1 частица со скоростью, близкой к скорости света, сместилась в новое положение 1′. Теперь на 1 частицу со стороны 2 частицы будет действовать новая сила F'_{12}, несколько меньшая по модулю, так как $r' > r$. На 2 же частицу, до тех пор пока возмущение поля, вызванное смещением 1 частицы, не достигнет ее положения, будет действовать прежняя сила F_{21}.



Поэтому, пока 1 частица двигалась и еще в течение некоторого времени, после того как она достигнет точку 1′, 3 закон Ньютона будет нарушен. Это нарушение связано с запаздыванием взаимодействия.

Следовательно, *классическая механика справедлива лишь для случая контактных взаимодействий или при взаимодействии покоящихся тел*.

3) В микромире элементарные частицы (электроны, позитроны, протоны,…) движутся со скоростями, близкими к скорости света, поэтому механика Ньютона к ним не применима. Их поведение может быть описано лишь при учете релятивистских и квантовых эффектов.

Итак, *классическая механика является механикой тел больших масс (по сравнению с массой атомов), движущихся с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света)*.