Функциональные и степенные ряды

- Функциональные ряды
- Степенные ряды
- Сходимость степенных рядов
- Свойства степенных рядов

Функциональные ряды

Пусть задана бесконечная последовательность функций, определенных в области *D*:

$$U_1(x); U_2(x); U_3(x) \dots U_n(x) \dots$$

Выражение вида:

$$U_1(x)+U_2(x)+U_3(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x) \qquad (1)$$

называется ***функциональным рядом***.

Если в выражении *(1)* положим $x = x_0$, то получим некоторый числовой ряд:

$$U_1(x_0)+U_2(x_0)+U_3(x_0)+\ldots+U_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x_0) \qquad (2)$$

Функциональные ряды

Функциональный ряд *(1)* называется **сходящимся** в точке x_0, если числовой ряд *(2)*, получившийся из ряда *(1)* подстановкой $x = x_0$, является сходящимся рядом. При этом x_0 называется **точкой сходимости** ряда.

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется **областью сходимости** данного ряда.

Обозначим область сходимости ряда - D_s.

Как правило, область D_s не совпадает с областью D, а является ее частью:

$$D_s \subset D$$

Функциональные ряды

Пример Найти область сходимости функционального ряда:

$$\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

Данный ряд является суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \ln x$

Такой ряд сходится, если $|q| < 1 \Rightarrow |\ln x| < 1 \Rightarrow$

$$-1 < \ln x < 1 \Rightarrow 1/e < x < e$$

Область сходимости ряда - D_s

Область определения функций $\ln^n x$: $D: \quad x > 0$

Поэтому: $D_s \subset D$

Функциональные ряды

Сумма функционального ряда *(1)* зависит от взятой точки области сходимости, следовательно сама является некоторой функцией от *x:*

$$f(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

Ряд *(1)* сходится к функции *f(x)*

Для функции *f(x)* имеет место разложение

Область определения этой функции совпадает с областью сходимости ряда D_s.

Пример Дан ряд: $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x$ и первым членом $b_1 = 1$. Имеет место разложение:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad |x| < 1$$

По формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

Функциональные ряды

Как и в случае числовых рядов для функционального ряда (1) можно составить последовательность частичных сумм:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{U_1(x)}_{S_1(x)}+U_2(x)}_{S_2(x)}+U_3(x)+\ldots+U_n(x)}_{S_n(x)}+\underbrace{U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)\ldots}_{r_n(x)}$$

Тогда: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ для любых x из области сходимости.

$r_n(x)=U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+\ldots$ - n -й остаток ряда.

Таким образом: $f(x)=S_n(x)+r_n(x)$

При $n\to\infty$ $r_n(x)\to 0$ $\Longrightarrow$ $f(x)\approx S_n(x)$

Степенные ряды

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента *x*, то есть так называемый ***степенной ряд***.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, - постоянные числа – коэффициенты степенного ряда.

Ряд *(1)* расположен по степеням *x*.

Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, то есть ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \qquad (2)$$

Ряд *(2)* легко приводится к ряду *(1)* подстановкой $x - x_0 = z$, поэтому при изучении степенных рядов мы ограничимся степенными рядами вида *(1)*.

Сходимость степенных рядов

Любой степенной ряд вида *(1)* сходится в точке *x = 0*:

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \ldots + a_n \cdot 0^n + \ldots = a_0$$

Об области сходимости степенного ряда *(1)* можно судить, исходя из следующей теоремы:

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд *(1)* сходится при некотором значении

$$x = x_0 \neq 0$$

то он абсолютно сходится при всех значениях *x*, для которых выполняется условие:

$$|x| < |x_0|$$

2. Если степенной ряд *(1)* расходится при некотором значении

$$x = x_0 \neq 0$$

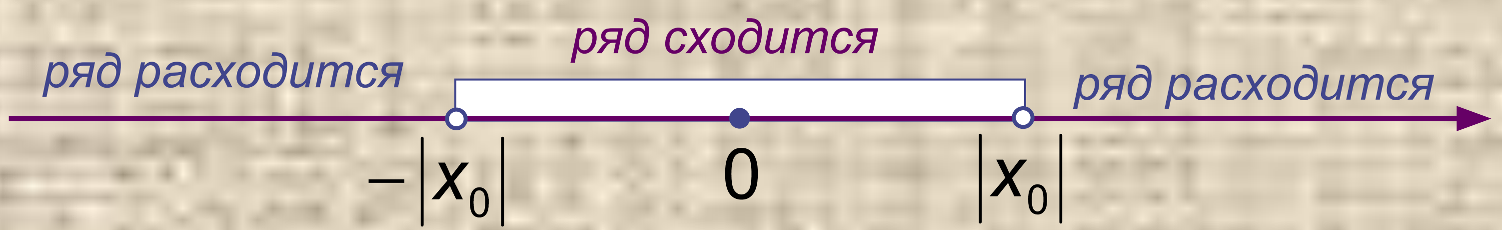
то он расходится при любом значении *x* при котором: $|x| > |x_0|$

Сходимость степенных рядов

Из теоремы Абеля следует, что существует такая точка x_0 ,что интервал:

$$\left(-|x_0|;|x_0|\right)$$

весь состоит из точек сходимости ряда, а при всех x вне этого интервала ряд расходится.



Интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

Положив $|x_0| = R$ интервал сходимости можно записать в виде : *(-R; R).*

Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда.

Сходимость степенных рядов

В частности, если ряд сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем $R = 0$.

Если ряд сходится при всех действительных значениях x, то считаем $R = \infty$

На концах интервала сходимости, то есть при $x = -R$ и при $x = R$ сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера.

Допустим существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$$

Сходимость степенных рядов

По признаку Даламбера ряд сходится, если:

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Rightarrow |x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Таким образом, для степенного ряда *(1)* радиус сходимости равен:

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

Аналогично, пользуясь признаком Коши, можно установить, что

$$\boxed{R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Сходимость степенных рядов

Замечания

1 Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можно убедиться, что ряд сходится на всей числовой оси, то есть $R = \infty$.

2 Интервал сходимости степенного ряда (2): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ находят из неравенства $|x - x_0| < R$

3 Если степенной ряд содержит не все степени x, то есть задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяя признаки Даламбера или Коши для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Сходимость степенного ряда

Пример 1 Найти область сходимости степенного ряда : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Найдем радиус сходимости по формуле: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Следовательно, ряд сходится при всех действительных значениях x.

Сходимость степенного ряда

Пример 2 Найти область сходимости степенного ряда :

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$U_n=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$U_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}=(-1)^{n+2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2(2n-1)}{2n+1}\right|=$$

Сходимость степенного ряда

$$= x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = x^2$$

Ряд абсолютно сходиться, если $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

Исследуем поведение ряда на концах интервала:

При $x = -1$ имеем ряд: $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} 1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Ряд сходится по признаку Лейбница

Сходимость степенного ряда

При $x = 1$ имеем ряд: $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Ряд также сходится по признаку Лейбница.

Следовательно областью сходимости исходного ряда является отрезок [-1; 1]

Пример 3 Найти область сходимости степенного ряда : $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$$

Найдем радиус сходимости по формуле: $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} \qquad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$$

Сходимость степенного ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n}}{n\cdot 2^{n-1}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=2$$

Ряд абсолютно сходиться при $-2<x+2<2 \quad\Rightarrow\quad -4<x<0$

Исследуем поведение ряда на концах интервала:

При $x = -4$ имеем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+2)^{n}}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 2^{n}}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}$

$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad\Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница

При $x = 0$ имеем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(0+2)^{n}}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходится

Следовательно областью сходимости исходного ряда является интервал [-4; 0)

Свойства степенных рядов

1 Сумма *S(x)* степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости *(-R; R)*.

2 Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать, при этом для ряда:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (1)$$

При $-R < x < R$ выполняется равенство:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \qquad (2)$$

3 Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости, при этом для ряда *(1)* выполняется равенство:

$$\int S(x)dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \qquad (3)$$

Ряды *(2)* и *(3)* имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд *(1)*.