

# ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

## ЛЕКЦИЯ №2

### Электромагнитное излучение в сплошной среде

Астапенко В.А., д.ф.-м.н.

# Микроскопические уравнения Максвелла

$\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  – напряженности микроскопических электрического и магнитного полей

$$(1) \operatorname{rote} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad \text{закон электромагнитной индукции}$$

$$(2) \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \quad \text{отсутствие магнитных зарядов}$$

$$(3) \operatorname{roth} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{micr} \quad \text{модифицированный закон Ампера}$$

$\mathbf{j}_{micr}$  - микроскопическая плотность тока

$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}$  - плотность тока смещения, введенного Максвеллом

$$(4) \operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi \rho_{micr} \quad \text{закон Кулона в дифференциальной форме}$$

$\rho_{micr}$  - микроскопическая плотность заряда

# Макроскопическое электрическое поле, магнитная индукция и макроскопическое магнитное в среде

усреднение по физически бесконечно малому объему  $\delta V$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \mathbf{e}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

напряженность макроскопического электрического поля

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \mathbf{h}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

магнитная индукция

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}$$

напряженность макроскопического магнитного поля в *немагнитном приближении*

# Усреднение микрокопических уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4}{c} (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_b + \rho_{ext})$$

$\mathbf{j}_b$  - плотность тока связанных зарядов

$\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}$  - плотность тока проводимости

$\rho_b$  - плотность связанных зарядов

$\rho_{ext}$  - плотность внешних зарядов

# Поляризация среды ( $\mathbf{P}$ )

$\mathbf{P}$  – дипольный момент единицы объема среды

$$\mathbf{j}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \left\{ \begin{array}{l} \text{выражение плотности тока связанных зарядов} \\ \text{через поляризацию вещества в случае,} \\ \text{когда намагниченностью среды можно пренебречь} \end{array} \right.$$

$$\rho_b = -\operatorname{div} \mathbf{P} \left\{ \begin{array}{l} \text{выражение плотности связанных зарядов} \\ \text{через поляризацию среды} \end{array} \right.$$

$$j_b^{(4)} = (\rho_b c, \mathbf{j}_b) \quad - \text{четырёхмерный вектор плотности тока}$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_b = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{закон сохранения заряда, из которого следует,} \\ \text{что в четырёхмерном векторе плотности тока} \\ \text{только три компоненты являются независимыми} \end{array} \right.$$

# Электрическая индукция и диэлектрическая проницаемость среды

$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$  - индукция электрического поля

В линейном приближении:

$$\left[ \begin{aligned} D_i(\mathbf{r}, t) &= (\hat{\epsilon} \mathbf{E})(\mathbf{r}, t) = \epsilon \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{r}' \tau_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - \tau) E_j(\mathbf{r}', \tau) \\ &= E_i(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{r}' \tilde{\chi}_{ij}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - \tau) E_j(\mathbf{r}', \tau) \end{aligned} \right.$$

В фурье-представлении:

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = \left( \delta_{ij} + 4\pi \chi_{ij}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) \right) E_j(\mathbf{k}, \omega)$$

$$P_i(\mathbf{k}, \omega) = \chi_{ij}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + 4\pi \chi_{ij}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$$

$\epsilon_{ij}, \chi_{ij}^{(e)}$  - тензоры диэлектрической проницаемости и восприимчивости

# Диэлектрическая проницаемость изотропной среды

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \varepsilon^{(l)}(k, \omega) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \varepsilon^{(t)}(k, \omega)$$

$$\mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon^{(l)}(k, \omega) \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{k}, \omega) \quad \mathbf{D}^{(t)}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon^{(t)}(k, \omega) \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{k}, \omega), \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{k}, \omega) \parallel \mathbf{k} \quad \mathbf{D}^{(t)}(\mathbf{k}, \omega), \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}$$

В пренебрежении пространственной дисперсией:

$$\varepsilon^{(l)}(\mathbf{k} \rightarrow 0, \omega) = \varepsilon^{(t)}(\mathbf{k} \rightarrow 0, \omega) = \varepsilon(\omega)$$

$\varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} \varepsilon(\omega)$  тензор диэлектрической проницаемости  
изотропной среды превращается в скаляр

# Формулы Крамерса-Кронига

$$\chi'_e(\omega) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''_e(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' ,$$

$$\chi''_e(\omega) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' ,$$

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - a} dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\Delta} \frac{f(x)}{x - a} dx + \int_{a+\Delta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - a} dx \right\} \quad \text{- интеграл в смысле главного значения}$$

Пользуясь приведенными равенствами, можно по мнимой части диэлектрической восприимчивости восстановить действительную часть и наоборот.



# Общие соотношения для функций отклика вещества $\varepsilon$ и $\chi$

$$\chi(\omega)^* = \chi(-\omega) \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi'(\omega) = \chi'(-\omega) \\ \chi''(\omega) = -\chi''(-\omega) \end{array} \right.$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum_j N_j \beta^{(j)} \quad \text{формула Клаузиуса-Мосотти}$$

$\beta^{(j)}(\omega)$ ,  $N_j$  динамическая поляризуемость и концентрация атомов среды

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{«плазменная» формула для диэлектрической проницаемости}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4e^2 N_e}{m_e}} \quad \text{- плазменная частота}$$

# Поляризуемость атомов вещества

$$\varepsilon(\omega) \cong 1 + 4\pi \sum_j N_j \beta^{(j)}(\omega) \quad - \text{ для разреженных сред, когда } \varepsilon \cong 1$$

$$E \ll E_a = \frac{m_e^2 e^5}{\hbar^4} \cong 5.14 \cdot 10^9 \text{ В/см} \quad I \ll I_a = c \frac{E_a^2}{8\pi} = \frac{m_e^4 e^{10} c}{8\pi \hbar^8} \cong 3.52 \cdot 10^{16} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$$

$$\mathbf{d}(t) = 2 \operatorname{Re} \{ \beta(\omega) \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) \} \quad \mathbf{d}_\omega = \beta(\omega) \mathbf{E}_\omega$$

$$\beta(\omega) = \frac{e^2}{m_e} \sum_n \frac{f_{0n}}{\omega_{0n}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_{0n}} \quad \left. \vphantom{\beta(\omega)} \right\} \text{общее выражение для поляризуемости}$$

$$f_{jn} = \frac{2m_e \omega_{jn} |\langle n | \mathbf{d} | j \rangle|^2}{3e^2 \hbar g_j} \quad - \text{сила осциллятора атомного перехода} \\ \text{(безразмерная величина)}$$

# Формула Клаузиуса-Мосотти

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{P} = N \beta \mathbf{E}_{loc}$$

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{Lor}$$

$$\mathbf{E}_{Lor} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$$

$\mathbf{E}_{Lor}$  – поле Лоренца

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \beta$$

Здесь при вычислении локального поля производится усреднение поля по атомам «минус» выделенный атом

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3} N \beta \quad \text{Формула Лоренц-Лорентца}$$

$n$  – показатель преломления вещества

# Макроскопические уравнения Максвелла в немагнитном приближении ( $\mathbf{B}=\mathbf{H}$ )

С учетом выражения для плотности тока связанных зарядов  
и определения электрической индукции получаем:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4}{c} \sigma \mathbf{E} \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4 \quad \text{ext}$$

Материальное соотношение

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}$$

# Учет намагниченности вещества

$$\mathbf{j}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad \text{учет намагниченности среды } \mathbf{M} \text{ в выражении}$$

для плотности тока связанных зарядов

Добавление ротора в выражении для плотности тока не меняет уравнения сохранения заряда, в котором фигурирует дивергенция плотности тока

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_b = 0$$

Определение напряженности макроскопического магнитного поля в среде:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mathbf{H}$$

«Следует помнить, что в действительности истинное среднее значение напряженности <магнитного поля> есть  $\mathbf{B}$ , а не  $\mathbf{H}$ » Л.Л. т.8

# Магнитная проницаемость и восприимчивость вещества

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  – для изотропной среды;  $B_i = \mu_{ij} H_j$  – общий случай

$\mu = \text{начало} \frac{\partial B}{\partial H}$  (Магнитная проницаемость)

$\mu_d = \partial B / \partial H$  – дифференциальная магнитная проницаемость

$$\mu = 1 + 4\pi \chi^{(m)}$$

$\chi^{(m)}$  – магнитная восприимчивость вещества

$\chi^{(m)} > 0$  – парамагнитная среда ( $\chi^{(m)} \ll 1$ )

$\chi^{(m)} < 0$  – диамагнитная среда ( $|\chi^{(m)}| \ll 1$ )

$\mu \gg 1$  – ферромагнетики,  $\mu < 0$  – метаматериал

# Численные значения магнитной проницаемости

Диамагнетики	
Вода	<i>0.999991</i>
Медь	<i>0.999990</i>
Стекло	<i>0.999987</i>
Парамагнетики	
Воздух	<i>1.00000038</i>
Алюминий	<i>1.000023</i>
Кислород	<i>1.0000019</i>
Ферромагнетики	
Железо	<i>8000</i>
Никель	<i>1100</i>

Диамагнетики ослабляют поле, парамагнетики и ферромагнетики - усиливают

# Макроскопические уравнения Максвелла в общем случае

Используя выражения для плотности тока связанных зарядов через поляризуемость и намагниченность среды и определение напряженности магнитного поля в веществе, приходим к следующим макроскопическим уравнениям Максвелла в общем случае:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4}{c} \sigma \mathbf{E} \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4 \pi \rho_{ext}$$

Материальные соотношения

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) = \hat{\mu} \mathbf{H}$$



# Разложение электромагнитного поля по плоским волнам

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)]$$

переход к плоским волнам в уравнениях в частных производных превращает дифференциальные операторы в алгебраические:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i \omega \quad \text{div} \rightarrow i \mathbf{k} \cdot \quad \text{rot} \rightarrow i \mathbf{k} \times$$

# Уравнения Максвелла в среде в фурье-представлении

Подставляя формулы из предыдущего слайда в уравнения Максвелла, получаем систему *алгебраических* уравнений:

$$[\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}\omega)] = \frac{\omega}{c} \mu \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}\omega)$$

$$\mu(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}\omega)) = 0$$

$$[\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}\omega)] = -\frac{\omega}{c} \left( \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}\omega)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) = 0$$

# Диэлектрики и проводники

Предел диэлектрической среды (ток проводимости пренебрежимо мал):

$$\omega \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \gg 4\pi\sigma \longrightarrow [\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$$

Случай проводника (ток смещения пренебрежимо мал):

$$\omega \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \ll 4\pi\sigma \longrightarrow [\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)] = -i \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$$

Таким образом, одно и то же вещество на разных частотах может вести себя и как проводник и как диэлектрик

$$\varepsilon'(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

обобщенная диэлектрическая проницаемость:  
первое слагаемое в правой части содержит отклик связанных зарядов на электрическое поле, второе слагаемое описывает отклик свободных зарядов

# Поперечная электромагнитная волна в диэлектрике

Исключая из 1-го и 3-го уравнений Максвелла магнитное поле, находим:

$$\mathbf{k}^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$\mathbf{E}^{(t)}$  (поперечная ЭМ волна):  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0$

Волновое уравнение в фурье-представлении для поперечной ЭМ волны

$$\left( \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \right) \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \rightarrow \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega)$$



закон дисперсии для поперечной волны

# Комплексный показатель преломления (в немагнитном приближении $\mu=1$ )

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)); \quad \mathbf{k} = \tilde{n}(\omega) \frac{\omega}{c} \mathbf{s} \equiv (n(\omega) + i\kappa(\omega)) \frac{\omega}{c} \mathbf{s}; \quad |\mathbf{s}| = 1$$

$$n^2 - \kappa^2 = \varepsilon'; \quad 2n\kappa = \varepsilon''$$

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ  
ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2})}; \quad \kappa = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon')}$$

$$1) \quad \varepsilon'' \ll \varepsilon'; \quad \varepsilon' > 0 \quad \rightarrow \quad n \approx \sqrt{\varepsilon'} \left( 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \right) \approx \sqrt{\varepsilon'} \left( 1 + \frac{\varepsilon''^2}{8\varepsilon'^3} \right); \quad \kappa \approx \frac{\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'}}$$

$$2) \quad \varepsilon'' \ll \varepsilon'; \quad \varepsilon' < 0 \quad \rightarrow \quad n \approx \kappa \approx \sqrt{|\varepsilon'|} \quad \varepsilon(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

# Дисперсия поперечных электромагнитных волн в общем случае

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)) (\mu'(\omega) + i\mu''(\omega))$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'' \quad \mathbf{k}' // \mathbf{k}''$$

$$\mathbf{k} = \tilde{n}(\omega) \frac{\omega}{c} \mathbf{s} \equiv (n(\omega) + i\kappa(\omega)) \frac{\omega}{c} \mathbf{s}$$

$|\mathbf{s}| = 1$  — единичный вектор в направлении распространения волны

Комплексный показатель преломления вещества:

$$\tilde{n}(\omega) \equiv n(\omega) + i\kappa(\omega)$$

# Комплексный показатель преломления (в общем случае)

$$n^2 - \kappa^2 = \varepsilon' \mu' - \varepsilon'' \mu''$$

$$\Re n \varepsilon = \mu' \varepsilon' \mu''$$

система уравнений для определения действительной и мнимой части КПП

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \varepsilon' \mu' - \varepsilon'' \mu'' + \sqrt{(\varepsilon' \mu' - \varepsilon'' \mu'')^2 + (\varepsilon'' \mu' + \varepsilon' \mu'')^2} \right]}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{(\varepsilon' \mu' - \varepsilon'' \mu'')^2 + (\varepsilon'' \mu' + \varepsilon' \mu'')^2} - \varepsilon' \mu' + \varepsilon'' \mu'' \right]}$$

решение системы в общем случае (с учетом магнитных свойств среды)

# Распространение электромагнитной волны в веществе

Из 1-го уравнения Максвелла следует соотношение между амплитудами и фазами напряженности электрического поля и магнитной индукцией в среде:

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \sqrt{n^2 + \kappa^2} \exp \left[ i \arctg \left( \frac{\kappa}{n} \right) \right] [\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \propto \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp \left[ i \frac{\omega n}{c} \left( \kappa z - \frac{c}{n} t \right) - \frac{\omega}{c} z \right] \longrightarrow v_{ph} = \frac{c}{n}$$

Фазовая скорость

$$I(z) = I_0 \exp \left( -2 \frac{\omega}{c} z \right)$$

коэффициент экстинкции (ослабления) и

злучения



# Немагнитная среда ( $\mu=1$ )

$$I(z) = I_0 \exp\left(-2 \frac{\omega}{c} z\right) \epsilon' \left( \epsilon'' \ll \epsilon' \right) \approx I_0 \exp\left(-\frac{\epsilon''}{\sqrt{\epsilon'}} \frac{\omega}{c} z\right)$$



Изменение интенсивности излучения с расстоянием определяется знаком мнимой части диэлектрической проницаемости:

$\epsilon'' > 0$  – ослабление излучения;  $\epsilon'' < 0$  – усиление излучения

$$I(z) = I_0 \exp\left(-2 \frac{\omega}{c} z\right) \epsilon' \left( \epsilon'' \ll \epsilon' \right) \approx I_0 \exp\left(-\sqrt{|\epsilon''|} \frac{\omega}{c} z\right)$$

Этот случай реализуется, например, в металлах на частотах меньших плазменной

# Диэлектрическая проницаемость металла

$$\varepsilon^{(DS)}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

Формула Друде-Зоммерфельда

	Au	Ag	Cu
$n/\text{m}^{-3}$	$5.90 \cdot 10^{28}$	$5.76 \cdot 10^{28}$	$8.45 \cdot 10^{28}$
$\sigma/(\Omega\text{m})^{-1}$	$4.9 \cdot 10^7$	$6.6 \cdot 10^7$	$6.5 \cdot 10^7$
$m^*/m_e$	0.99	0.96	1.49
$\hbar\omega_p/\text{eV}$	9.1	9.1	8.8
$\tau/\text{fs}$	29	40	40

$$\varepsilon_{\text{inter}}(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}$$

вклад межзонных переходов

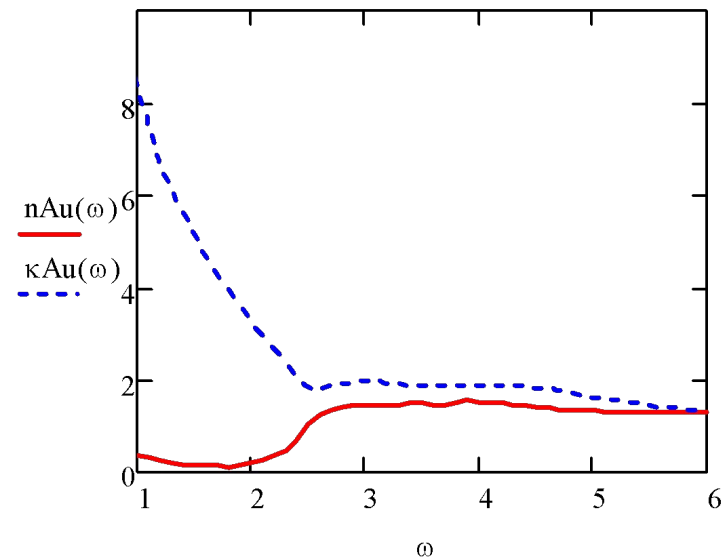
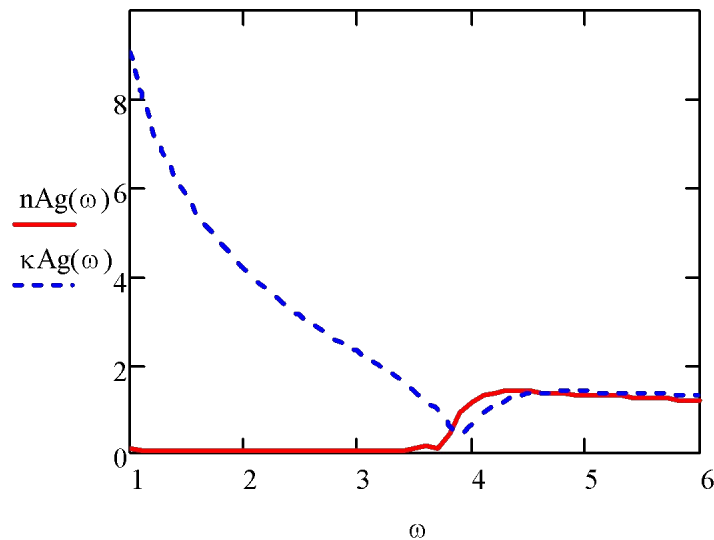
для золота:

$$\hbar\omega_c = 2.96$$

$$\hbar\omega_0 = 2.76$$

$$\hbar\Gamma = 0.59$$

# Комплексный коэффициент преломления в металле [Johnson P.V., Chirsty R.W. 1972]



Экспериментальные зависимости действительной (сплошная кривая) и мнимой (пунктир) частей показателя преломления серебряной пленки (левый график) и золотой пленки (правый график) в зависимости от энергии фотона; по оси ординат отложена энергия фотона в электрон-вольтах

# Усиление излучения в среде

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{\hbar} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$$

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\mathbf{F}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{F}_0^* e^{i\omega t}}{2} \quad q(\omega) = \frac{\omega}{\hbar} \left[ \varepsilon''(\omega) |\mathbf{E}_0|^2 + \mu''(\omega) |\mathbf{H}_0|^2 \right]$$

$$|\omega - \omega_{nm}| \ll \delta_{nm}$$

$$\chi_{res}^{(e)}(\omega) = g_m \beta_m^{(res)}(\omega) \left[ \frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right] \quad \left( \chi_{res}^{(e)}(\omega) \right)'' = \frac{\pi e^2}{2 m_e} g_m f_{nm} G_{mn}(\omega) \left[ \frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right]$$

$$\frac{N_n}{g_n} > \frac{N_m}{g_m} \text{ при } E_n > E_m - \text{условие усиления излучения}$$

$$N_n/g_n - N_m/g_m - \text{инверсия населенности}$$

# Волновой пакет и групповая скорость

$$F(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp[i(kz - \omega(k)t)] dk \right\}$$

квазимонохроматическое излучение:  $\omega_c - \Delta < \omega < \omega_c + \Delta$ ,  $\Delta \ll \omega_c$

$$\omega(k) \cong \omega_c + \frac{\partial \omega(k_c)}{\partial k} (k - k_c), \quad \omega_c = \omega(k_c)$$

$$F(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_0 \frac{\xi \sin \left[ \frac{(\Delta k z - \Delta \omega t)}{\xi(\Delta k, z, t)} \right]}{\xi(\Delta k, z, t)} \cos(k_c z - \omega_c t) \quad (\Delta k z - \Delta \omega t) = (\Delta k / \xi)(z - ut)$$

$$F_{\Delta k}(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_0 \frac{\xi \sin \left[ \frac{(\Delta k z - \Delta \omega t)}{\xi(\Delta k, z, t)} \right]}{\xi(\Delta k, z, t)}$$

обгибающая волнового пакета

$$u = \frac{\partial \omega(k_c)}{\partial k} - \text{групповая скорость}$$

# Корпускулярно-волновой дуализм

Для фотона:  $u = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Rightarrow u = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \quad \varepsilon = \hbar \omega \quad p = \hbar k$

Для нерелятивистской частицы

$$\varepsilon(p) = p^2 / 2m \Rightarrow u = p/m = v$$

Для релятивистской частицы

$$\varepsilon(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \Rightarrow u = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = pc^2 / \varepsilon = v$$

# Фазовая и групповая скорость в плазме

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$u = \frac{1}{dk(\omega)/d\omega}$$

$$k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega}{c} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

$$u = \frac{c}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} = c \sqrt{\varepsilon(\omega)}$$

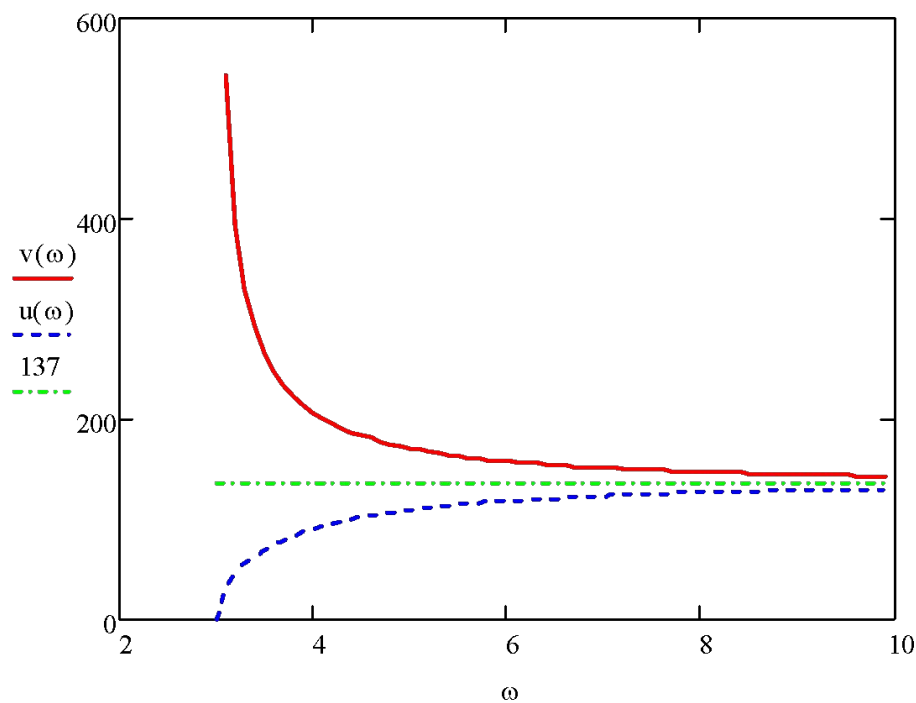
$$v_{ph} = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$$

$$v_{ph} u = c^2$$

$$v_{ph} > c$$

$$u < c$$

# Дисперсия фазовой скорости (сплошная кривая) и групповой скорости (штриховая кривая) электромагнитной волны в плазме



Абсцисса отложена в электрон-вольтах, ордината – в атомных единицах, прямой линией показана скорость света в вакууме в атомных единицах ат. ед.,  $\omega_p = 3$  эВ