МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Содержание

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin x = a$$
$$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$$

$$\sin x = 0$$
$$x = \pi n,\ n \in Z$$

$$\sin x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\sin x = -1$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\cos x = a$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 1$

$x = 2\pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Простейшие тригонометрические уравнения

$$tgx = a$$
$$x = \pm\, arctga + \pi n,\ n \in Z$$

$$ctgx = a$$
$$x = \pm\, arcctga + \pi n,\ n \in Z$$

$$arctg(-a) = -arctga$$

$$arcctg(-a) = \pi - arcctga$$

Метод введения новой переменной

- **Схема решения**
- **Шаг 1.** Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций.
- **Шаг 2.** Обозначить полученную функцию переменной t (если необходимо, ввести ограничения на t).
- **Шаг 3.** Записать и решить полученное алгебраическое уравнение.
- **Шаг 4.** Сделать обратную замену.
- **Шаг 5.** Решить простейшее тригонометрическое уравнение.

Метод введения новой переменной

Пример 1: Решим уравнение

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Решение.

Вводим новую переменную

$\sin x = y$. Тогда мы получаем квадратное уравнение:

$2y^2 + y - 1 = 0$, из которого

$y_1=1\backslash 2$ и $y_2 = -1$

Метод введения новой переменной

Таким образом:

$\sin x = 1/2$ и $\sin x = -1$

Находим значения *x*:

1) $x = (-1)n\ \pi/6 + \pi k$
2) $x = -\pi/2 + 2\pi n$

Ответ:

$x = (-1)n\ \pi/6 + \pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$

Метод введения новой переменной

<u>Пример 2</u>: Решим уравнение

$6 \sin2 x + 5 \cos x - 2 = 0$.

<u>Решение</u>:

Мы знаем, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Отсюда выводим значение $\sin^2 x$:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Вводим это значение $\sin^2 x$ в наш пример:

$6 (1 - \cos^2 x) + 5 \cos x - 2 = 0$.

Раскрываем скобки:

Метод введения новой переменной

$6 - 6\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0.$

Сводим подобные члены:

$4 - 6\cos^2 x + 5\cos x = 0.$

Поменяем местами слагаемые от большей степени к меньшей (как того требует правило):

$-6\cos^2 x + 5\cos x + 4 = 0.$

Метод введения новой переменной

Введем опять новую переменную y = cos *x* и в результате получим квадратное уравнение:

$-6y^2 + 5y + 4 = 0.$

Решив его, находим корни:

y = – 1/2 или

y =4/3

Обратная замена:

Рассмотрим вариант cosx= 4\3

Метод введения новой переменной

Мы видим, что в этом случае cos *x* > 1. Т.Е. решений нет.

В другом уравнении cos *x* меньше 1 (cos *x* < 1). Значит, решаем его.

Сначала находим значение арккосинуса:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Осталось найти *x*:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z$$

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

<u>Схема решения</u>

<u>Шаг 1.</u> Привести данное уравнение к виду

а) $a \sin x + b \cos x = 0$ (однородное уравнение первой степени)

или к виду

б) $a \sin2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos2 x = 0$ (однородное уравнение второй степени).

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

<u>Шаг 2. </u>Разделить обе части уравнения на

а) $\cos x \neq 0$;

б) $\cos^2 x \neq 0$;

и получить уравнение относительно tg x:

а) $a \operatorname{tg} x + b = 0$;

б) $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{arctg} x + c = 0$.

<u>Пример 1:</u> Решите уравнение

$$3 \cos x - 2 \sin x = 0.$$

Решение:

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

$3\cos x - 2\sin x = 0 \,/ : \cos x,$

$3 - 2\,\mathrm{tg}\,x = 0,$

$\mathrm{tg}\,x = 1{,}5,$

$x = \mathrm{arctg}\,1{,}5 + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\,1{,}5 + \pi n,\ n \in Z$

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

Пример 2:

$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4 = 0.$

Решение.

1) $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$

$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0;$

$\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0$ $/\cos^2 x \neq 0.$

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

2) $tg^2\, x + 3tg\, x - 4 = 0.$

3) Пусть $tg\, x = t$, тогда $t^2 + 3t - 4 = 0;$

$t = 1$ или $t = -4$, значит

$tg\, x = 1$ или $tg\, x = -4.$

Из первого уравнения

$x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z;$

из второго уравнения

$x = -arctg\ 4 + \pi k,\ k \in Z.$

***Ответ:* $x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z;\ x = -arctg\ 4 + \pi k,\ k \in Z.$**

Функциональный метод

Использование свойств:

1. Выделение полного квадрата из квадратичного трехчлена.
2. Свойство ограниченности функции косинус: $-1 \le \cos x \le 1$
3. Свойство ограниченности квадратичной функции:

$$(x+m)^2 + k \ge k$$

Функциональный метод

Пример 1. Решите уравнение

$\cos 2\pi\, x = x^2 - 8x + 17$

Решение: $\cos 2\pi x = x^2 - 8x + 17$

$\cos 2\pi x = (x-4)^2 + 1$.

Оценим левую и правую части уравнения:

$-1 \le \cos 2\pi x \le 1$ и $(x-4)^2 + 1 \ge 1$. Следовательно, равенство достигается, если $\cos 2\pi x = 1$ и $(x-4)^2 + 1 = 1$.

Функциональный метод

Решая второе уравнение системы, получаем *x* = 4. Подставляем это значение в первое уравнение и убеждаемся в верности равенства. Следовательно, *x* = 4 корень исходного уравнения.

Ответ: *x* = 4

Методы использования различных тригонометрических формул

- Схема решения
- **Шаг 1.** Используя всевозможные тригонометрические формулы, привести данное уравнение к уравнению, решаемому методами I, II, III.
- **Шаг 2.** Решить полученное уравнение известными методами.

Методы использования различных тригонометрических формул

Пример.

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$

Решение:

1) $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0;$

$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0.$

2) $\sin 2x \cdot (2\cos x + 1) = 0;$

$\sin 2x = 0$ или $2\cos x + 1 = 0;$

Методы использования различных тригонометрических формул

Из первого уравнения

$2x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$;

из второго уравнения: $\cos x = -1/2$.

Имеем $x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z$;

получим $x = \pm(\pi - \pi/3) + 2\pi k,\ k \in Z$.

В итоге $x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z$;

$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\boldsymbol{x = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z;\ x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z.}$

Урок одной задачи

Решим уравнение:

$\sin x + \cos x = 1$.

Это уравнение можно решить несколькими способами,

предложим 5 способов.

1 способ:
С помощью формул приведения

. Представим $\sin x = \cos(\pi/2 + x)$.

Воспользуемся формулой суммы косинусов:

$2\cos((\pi/2 + 2x)\backslash 2)\cos \pi/4 = 1$, тогда

$\sqrt{2} \cos (\pi/4 + x) = 1$,

$\pi/4 + x = \pm\arccos(1/\sqrt{2}) + 2\pi n, n \in Z$

$x_1 = 2\pi n, n \in Z$; $x_2 = -\pi/2 + 2\pi n, n \in Z$

2 способ: (с помощью вспомогательного аргумента)

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$, получим: $(1/\sqrt{2})\sin x + (1/\sqrt{2})\cos x = (1/\sqrt{2})$, тогда $\sin x \cos\pi/4 + \sin\pi/4 \cos x = (1/\sqrt{2})$,

$\sin(\pi/4 + x) = (1/\sqrt{2})$,

$\sin(\pi/4 + x) = (1/\sqrt{2})$,

$\pi/4 + x_1 = \pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z$,

$\pi/4 + x_2 = 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z$,

$x_1 = 2\pi n,\ n \in Z$,

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$.

3 способ: приведение уравнения к однородному

$$\sin x + \cos x = 1$$

Разложим левую часть по формулам двойного аргумента, а

правую часть заменим тригонометрической единицей:

$$2\sin x/2 * \cos x/2 + \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2 = \sin^2 x/2 + \cos^2 x/2$$

$$2\sin x/2 * \cos x/2 – 2\sin^2 x/2 = 0$$

$$\sin x/2 * (\cos x/2 - \sin x/2) = 0$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом не теряют смысла, поэтому

$$\sin x/2 * (\cos x/2 - \sin x/2) = 0 \Rightarrow \sin x/2 = 0 \text{ или}$$

$$\cos x/2 - \sin x/2 = 0$$

$$\sin x/2 = 0;\ x/2 = \pi k;\ x = 2\pi k;\ k \in \mathbf{Z};$$

3 способ: приведение уравнения к однородному

$\sin x/2 - \cos x/2 = 0$ – однородное уравнение первой степени. Делим обе его части на $\cos x/2$ ($\cos x/2 \neq 0$, так как, если $\cos x/2 = 0$, $\sin x/2 - 0 = 0 \Rightarrow \sin x/2 = 0$, что противоречит тождеству $\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2 = 1$). Получим

$$\operatorname{tg} x/2 - 1 = 0;\ \operatorname{tg} x/2 = 1;\ x/2 = \pi/4 = \pi n;$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n;\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x = 2\pi k;\ k \in \mathbf{Z} \text{ или } x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

4 способ: Возведение обеих частей уравнения в квадрат

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1;$$

$$1 + \sin 2x = 1;$$

$$\sin 2x = 0;$$

$$2x = \pi k;\ x = \pi k/2,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Полученное решение эквивалентно объединению четырех решений:

$x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$,

$x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$,

$x = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$,

$x = -\pi/2 + 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}$.

Проверка показывает, что второе и третье решения – посторонние.

Ответ: $x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, или $x = -\pi/2 + 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}$.

5 способ: универсальная подстановка

Используемые формулы:

$\sin x = 2\operatorname{tg} x/2 \,/\, (1 + \operatorname{tg}^2 x/2);$

$\cos x = (1 - \operatorname{tg}^2 x/2) \,/\, (1 + \operatorname{tg}^2 x/2);$

$\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x/2 \,/\, (1 - \operatorname{tg}^2 x/2).$

5 способ: универсальная подстановка

С учетом приведенных формул уравнение

$$\sin x + \cos x = 1$$

запишем в виде

$2\mathrm{tg}\, x/2 \,/\, (1 + \mathrm{tg}^2\, x/2) + (1 - \mathrm{tg}^2\, x/2\,)/(\,1 + \mathrm{tg}^2\, x/2) = 1.$

Умножим обе части уравнения на $(1 + \mathrm{tg}^2\, x/2)$:

$2\mathrm{tg}\, x/2 + 1 - \mathrm{tg}^2\, x/2 = 1 + \mathrm{tg}^2\, x/2;$

$$2\mathrm{tg}^2\, x/2 - 2\mathrm{tg}\, x/2 = 0;$$

$$\mathrm{tg}\, x/2 = 0;\ \mathrm{tg}\, x/2 = 1$$

1) $x/2 = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.,\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

2) $x/2 = \pi/4 + \pi n;\ x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !