Лекция 8. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

8.1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

8.2. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

8.1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим систему материальных точек массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, движущихся со скоростями $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \ldots, \vec{\upsilon}_n$.
Пусть $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ - равнодействующие консервативных внутренних сил, действующих на каждую из точек,
а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ - равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую материальную точку, обозначим $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$.

При V<<C массы материальных точек постоянные и уравнение второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$
\begin{aligned}
&m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{f}_1 \\
&m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{\mathrm{F}}_2 + \vec{f}_2 \qquad \text{(I)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n + \vec{\mathrm{F}}_n + \vec{f}_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_1\vec{v}_1 d\vec{v}_1 - (\vec{F}_1 + \vec{\mathrm{F}}_1)d\vec{r}_1 = \vec{f}_1 d\vec{r}_1 \\
&m_2\vec{v}_2 d\vec{v}_2 - (\vec{F}_2 + \vec{\mathrm{F}}_2)d\vec{r}_2 = \vec{f}_2 d\vec{r}_2 \qquad \text{(II)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&m_n\vec{v}_n d\vec{v}_n - (\vec{F}_n + \vec{\mathrm{F}}_n)d\vec{r}_n = \vec{f}_n \vec{r}_n
\end{aligned}
$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени dt совершают перемещения, соответственно равные, $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$, умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{V}_i dt$, получим. Сложив эти уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{V}_i d\vec{V}_i) - \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{i}}) d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i d\vec{r}_i \tag{8.15}$$

Первый член равенства (8.15) $\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{V}_i d\vec{V}_i) = \sum_{i=1}^{n} d(m_i V_i^2/2) = dT$, где dT – приращение кинетической энергии. Второй член равен элементарной работе внутренних и внешних $\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i$ консервативных сил, взятой со знаком минус, т.е. равен элементарному приращению потенциальной энергии $d\Pi$ системы (уравнение 8.8).

Правая часть равенства (8.15) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему, таким образом, имеем

$$d(T + \Pi) = dA \tag{8.16}$$

При переходе системы из состояния *1* в состояние *2* $\int_1^2 d(T+\Pi)=A_{12}$, т.е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое, равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (8.16) следует, что $d(T+\Pi)=0$, откуда

$$E=T+\Pi=const, \tag{8.18}$$

т.е. полная механическая энергия системы сохраняется. Выражение (8.18) представляет собой закон сохранения механической энергии: в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем.

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут лишь происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной. Этот закон не есть просто закон количественного сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и качественную сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Закон сохранения и превращения энергии – фундаментальный закон природы, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.

В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии – сущность неуничтожимости материи и ее движения.

Содержание

8.2. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

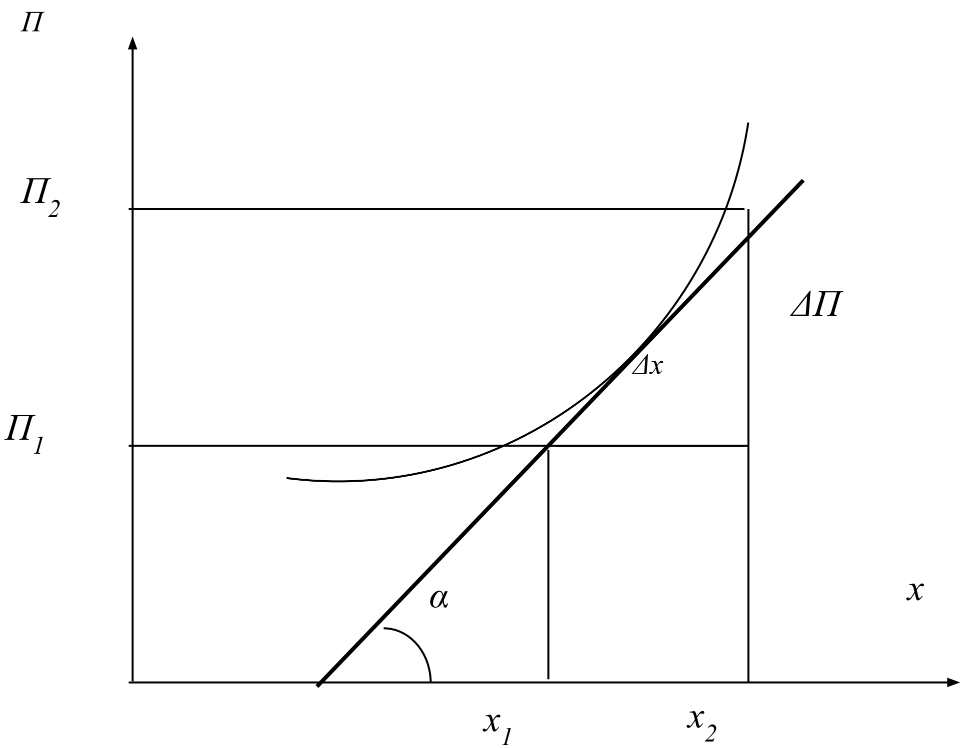

Рис.8.6

Часто материальная точка может двигаться только по некоторой заданной кривой, например вдоль оси абсцисс. В этом случае ее потенциальная энергия зависит только от одной переменной, т.е.

$$U = f(x).$$

График, изображающий зависимость потенциальной энергии от расстояния, называется потенциальной кривой. Оказывается, что анализ формы этого графика дает очень много сведений о характере движения точки.

В качестве примера рассмотрим движение частицы под действием упругой силы (рис. 8.5). При $x=x_0$ пружина не деформирована и силы, действующие на частицу, равны нулю. При отклонении частицы от положения равновесия на нее действует сила $F = -k(x - x_0)$

Заметим, что при $x>x_0$ сила отрицательна (притяжение), а при $x<x_0$ – положительна (отталкивание).

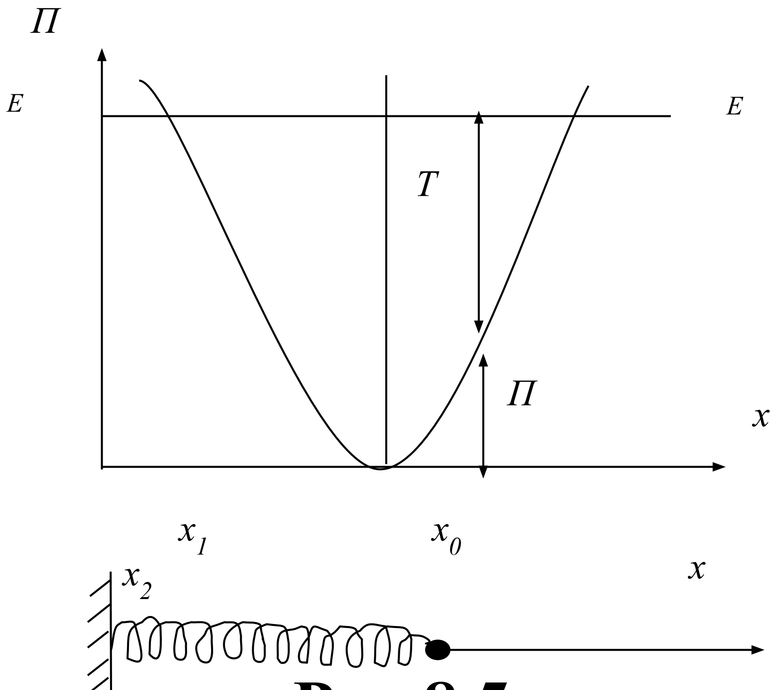

Рис.8.5

Она изображена на рис. 8.5 в виде параболы с вершиной в точке $x=x_0$. Механическая же энергия частицы $F=T+П$ является постоянной величиной и она изображается на графике прямой, параллельной оси абсцисс.

Из графика, прежде всего, видно, что кинетическую энергию в любой точке можно найти сразу как длину отрезка от прямой EE до параболы, ибо $T=E-П$. Максимальное значение кинетической энергии частица имеет при $x=x_0$; здесь $П=0$, и $T_{макс}=E$. В точках же $x=x_1$ и $x=x_2$, кинетическая энергия частицы равна нулю, ибо здесь $П_{макс}=E$.

Далее из графика видно, что частица не может сместиться правее точки x_2 и левее точки x_1. Действительно, кинетическая энергия не может быть отрицательной величиной, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной. В этом случае говорят, что частица находится в потенциальной яме с координатами x_1 и x_2.

Анализ наклона потенциальной кривой позволяет сразу же определить знак силы и тем самым – характер её действия (притяжения или отталкивания). В самом деле, элементарная работа $\Delta A = F\Delta x$; с другой стороны,

$F\Delta x = -\Delta \Pi$.

Следовательно, если сила – функция только одной координаты, например абсциссы x, то $F = -\Delta П / \Delta x$,

или $\Delta A = П_1 - П_2 = -\Delta П$.

Но на графике 8.6 $\Delta U / \Delta x = tg\alpha$, где α - угол наклона потенциальной кривой к оси абсцисс. Соответственно, точное значение силы получается лишь в пределе, когда перемещение Δx стремится к нулю:

$$F_x = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta П}{\Delta x} = -\frac{dП}{dx} = -П'(x) \qquad (8.19)$$

Итак, в консервативных системах сила равна производной от потенциальной энергии по координате, взятой с противоположным знаком.

В случае, когда потенциальная энергия возрастает, потенциальная кривая образует с осью абсцисс острый угол. Тангенс острого угла – положительное число, а сила имеет противоположный знак, т.е. отрицательный; следовательно, она является силой притяжения.

Если же потенциальная энергия убывает, то потенциальная кривая образует с осью абсцисс тупой угол, тангенс которого является отрицательным числом.

В этом случае сила положительна, т.е. является силой отталкивания. Наконец, в точках минимума или максимума энергии, сила, очевидно, равна нулю, ибо в окрестностях этих точек она меняет знак. На границах касательная к потенциальной кривой в этих точках параллельна оси абсцисс. В соответствии с (8.19) в точках M и N сила равна нулю, следовательно $\frac{dП}{dx} = 0$ - условие равновесия. Зная вид функции, которой выражается потенциальная энергия, можно сделать ряд заключений о характере движения частицы. Поясним это, воспользовавшись графиком на рис.8.8.

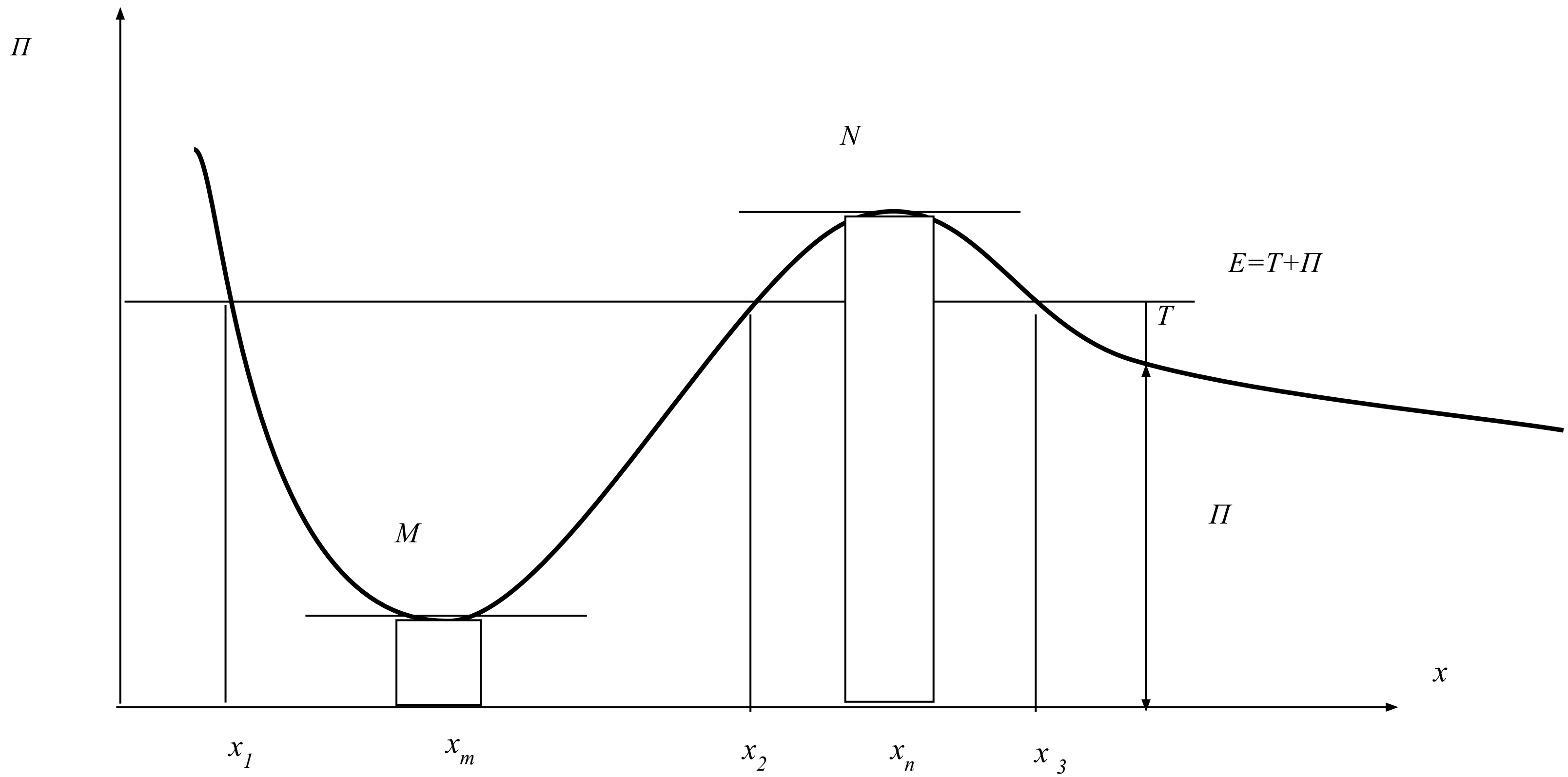

Рис.8.8

Если полная энергия имеет значение, указанное на рис.8.8, то частица может совершать движение либо в пределе от x_1 до x_2, либо в пределах от x_3 до бесконечности.

В области $x<x_1$ и $x_2<x<x_3$ частица проникнуть не может, так как потенциальная энергия не может стать больше полной энергии (если бы это случилось, то кинетическая энергия стала бы отрицательной). Таким образом, область $x_2<x<x_3$ представляет собой потенциальный барьер, через который классическая частица не может проникнуть, имея должный запас полной энергии. Область $x_2<x<x_3$ называется потенциальной ямой.

Если частица при своем движении не может удаляться на бесконечность, движение называется финитным. Если же частица может уходить сколь угодно далеко, движение называется инфинитным. Частица в потенциальной яме совершает финитное движение. Финитным будет также движение частицы с отрицательной полной энергией в центральном поле сил притяжения (предполагается, что потенциальная энергия обращается в нуль на бесконечности).

Точка M – точка устойчивого равновесия. Условием устойчивого равновесия является минимальное значение потенциальной энергии $\frac{d^2\Pi}{dx^2} > 0$.
Точка N – точка неустойчивого равновесия. Условием неустойчивого равновесия является минимальное значение потенциальной энергии $\frac{d^2\Pi}{dx^2} < 0$.

Лекция окончена!