

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Момент импульса. Момент силы. Уравнение вращательного движения системы

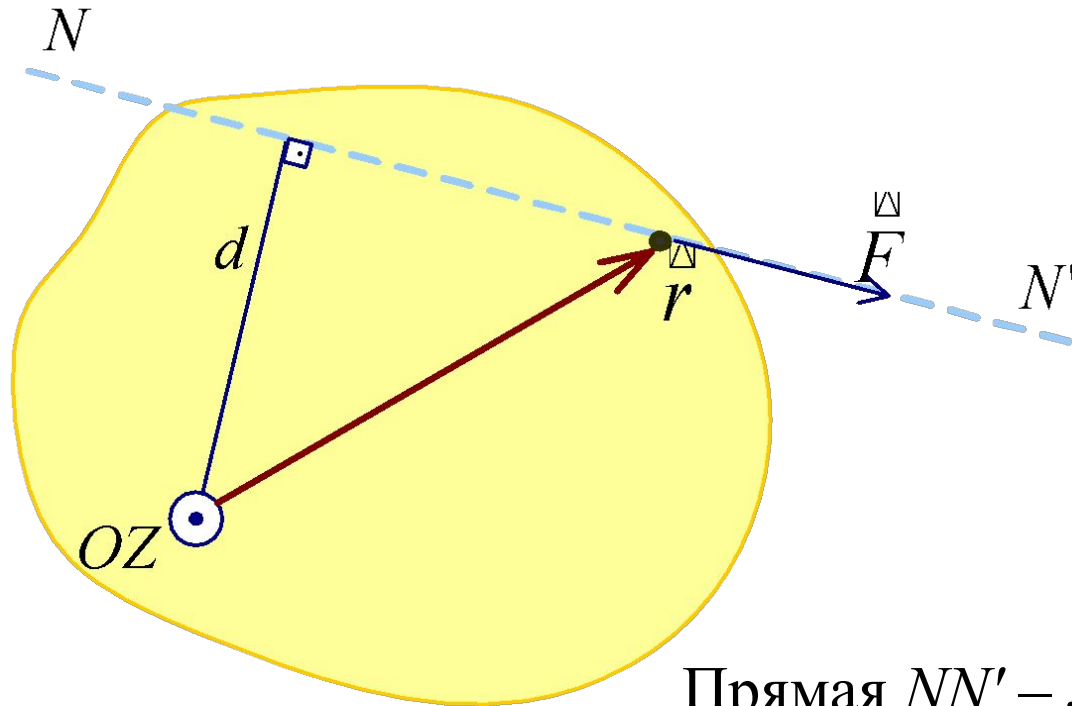
Момент импульса **материальной точки** относительно точки

$$\vec{L} \equiv [\vec{r}, \vec{p}] \qquad \left| \vec{L} \right| = r \cdot p \cdot \sin \alpha$$

Моментом силы **материальной точки** относительно точки

$$\vec{M} \equiv [\vec{r}, \vec{F}] \qquad \left| \vec{M} \right| = r \cdot F \cdot \sin \alpha$$

Момент силы относительно оси M_z – алгебраическая величина



$$M_z = F \cdot d$$

Прямая NN' – линия действия силы

Расстояние от линии действия силы до оси OZ –
плечо силы d

Если ось OZ совпадает с направлением $\vec{M}$, то $|\vec{M}| = M_z$

$$\overset{\Delta}{L} \equiv [\overset{\Delta}{r}, \overset{\Delta}{p}] \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\overset{\Delta}{L}}{dt} = \left[\frac{d\overset{\Delta}{r}}{dt}, \overset{\Delta}{p} \right] + \left[\overset{\Delta}{r}, \frac{d\overset{\Delta}{p}}{dt} \right].$$


 0


 $\frac{d\overset{\Delta}{p}}{dt} = \overset{\Delta}{F}$

$$\frac{d\overset{\Delta}{L}}{dt} = \overset{\Delta}{M}$$

- уравнение вращательного
движения
материальной точки

Моментом импульса **механической системы** относительно точки

$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{L}_i$$

$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{L}_i \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i$$

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}^{(вн)} + \vec{M}^{(внеш)}$$

0

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(внеш)}$$

- уравнение вращательного движения механической системы

2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью

$$I_z \equiv \sum_i m_i \cdot R_i^2 = \sum_i I_{zi}$$

- момент инерции тела относительно оси

Момент инерции твердого тела аддитивная величина (равна сумме моментов инерции материальных точек, составляющих это тело) и не зависит от времени.

С учетом вновь введенной величины I выражение для момента импульса имеет вид

$$L = I\omega$$

Тогда в проекциях на OZ следует

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

$$I_z \varepsilon = M_z$$

- уравнение вращательного движения

твердого тела с закрепленной

3. Теорема Штейнера

Пусть для тела массы m известен момент инерции I_0 относительно оси OO_1 , проходящей через центр масс тела. Тогда момент инерции этого тела I относительно оси $O'O_1'$, параллельной OO_1 , определяется по правилу

$$I = I_0 + md^2$$

$$d \equiv \left| \overset{\Delta}{d} \right| \text{ -расстояние между осями}$$

Пример: найдем момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов

$$I_0 = \frac{mL^2}{12}$$

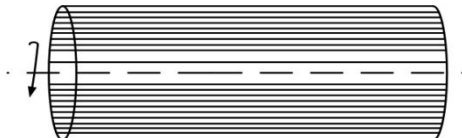
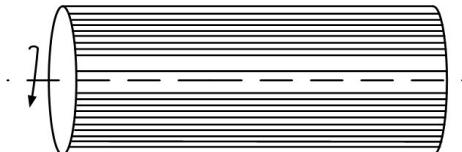
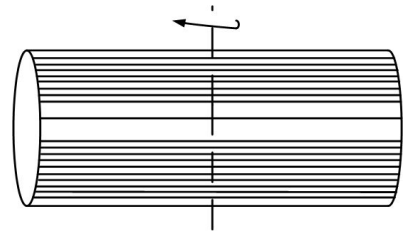
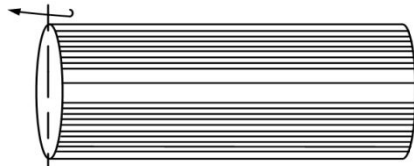
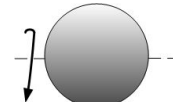
$$d = \frac{L}{2}$$

$$I = m \frac{L^2}{12} + m \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{mL^2}{3}$$

Момент инерции

Значения моментов инерции для тел простых симметрий

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось проходит через центр масс	 $I = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось проходит через центр масс	 $I = \frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	 $I = \frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	 $I = \frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	 $I = \frac{2}{5}mR^2$

4. Закон сохранения момента

импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(внеш)} \longrightarrow \vec{M}^{(внеш)} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const :$$

-если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы сохраняется

Закон сохранения момента импульса относительно

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \longrightarrow M_z^{(внеш)} = 0 \Rightarrow L_z = const :$$

- если сумма моментов действующих на систему внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется.

5. Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_{\kappa} \equiv \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{R}_i] \quad v_i^2 = [\vec{\omega}, \vec{R}_i]^2 = \omega^2 R_i^2$$



$$E_{\kappa} = \frac{I \omega^2}{2}$$

$$E_{\kappa} = E_{\kappa(\text{пост})} + E_{\kappa(\text{вращ})}$$



$$E_{\kappa(\text{пост})} = \frac{m v_c^2}{2}$$



$$E_{\kappa(\text{вр})} = \frac{I \omega^2}{2}$$

6. Работа при вращательном движении

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \left[\overrightarrow{d\varphi}, R \right]$$


$$\delta A = \overrightarrow{d\varphi} [R, F] = M \overrightarrow{d\varphi}$$

$$\delta A = M_z d\varphi$$



$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi) d\varphi$$

7. Таблица соответствия для величин, характеризующих поступательное и вращательное

ДВИЖЕНИЯ

ПД	$d\vec{r}$	$\vec{v}$	$\vec{a}$	x	v_x	a_x	m	$\vec{p}$	$\vec{F}$	p_x	F_x
ВД	$d\vec{\varphi}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\varepsilon}$	φ	ω_z	ε_z	I	$\vec{L}$	$\vec{M}$	L_z	M_z

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$