

Кубические уравнения

Выполнил
студент группы
СТз-17-1
Басистых В.Н

Понятие кубического уравнения

- **Кубическое уравнение** - алгебраическое уравнение третьей степени,

$$ax^3 + bx^2 + cx - d = 0$$

- где a, b, c, d - коэффициенты, а x - переменная.
- Число x , обращающее уравнение в тождество, называется **корнем** или решением уравнения

Любое кубическое уравнение можно привести к более простому виду - каноническому :

$$y^3 + py + q = 0$$

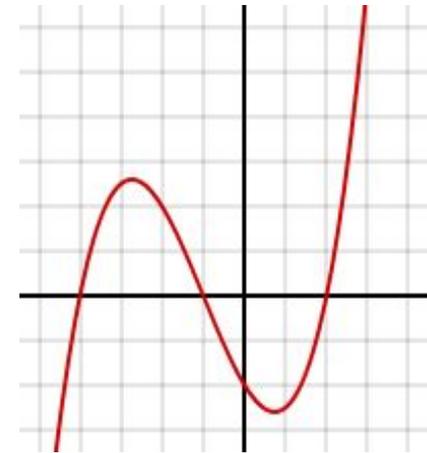


График кубического уравнения

Для нахождения корней кубического многочлена существует несколько способов:

1. С помощью вынесения общего множителя;
2. С помощью деления на многочлен;
3. С помощью теоремы Виета;
4. С помощью схемы Горнера;
5. Решение возвратных уравнений;
6. Графический способ.

1. Решение кубических уравнений с помощью вынесения общего множителя за скобки

Алгоритм решения:

1. Перегруппировать члены данного уравнения
2. Вынести общий множитель за скобки
3. Получить произведение равное нулю
4. Решить полученные уравнения.

Пример: $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$

Решение:

1. Преобразуем

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 2x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 5x - 3x + 3 = 0$$

2. Попарно группируем и выносим общий множитель за скобку

$$2x^2(x-1) - 5x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

3. Выносим общий множитель $(x-1)$, получаем произведение множителей

$$(x-1)(2x^2 - 5x - 3) = 0$$

$$x-1=0 \quad 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

4. $x-1=0$ $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x_1 = 1 \quad x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_2 = 3 \quad x_3 = -0,5$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = -0,5$

2. Решение кубических уравнений с помощью деления многочлен на многочлен

Алгоритм решения:

1. Подобрать один корень из делителей свободного члена
2. Поделить многочлен на многочлен
3. Найти корни в получившемся квадратном уравнении

Пример: $x^3+3x^2-6x-8=0$

1.

Решение: Рассмотрим делители свободного члена 8: (1; -1; 2; -2; 4; -4; 8; -8).
Найдем делитель при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

$$X=1: 1^3+3*1^2-6*1-8 \neq 0$$

$$X=-1: (-1)^3+3*(-1)^2-6*(-1)-8=0$$

2.

Так как кубическое уравнение можно представить в виде произведения множителей $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-X_1)(x-X_2)(x-X_3)$, то разделим многочлен

x^3+3x^2-6x-8 на многочлен $(x+1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-6x-8 & x+1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+2x-8 \\ \hline 2x^2-6x & \\ -2x^2+2x & \\ \hline -8x-8 & \\ -8x-8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3.

получаем (x^2+2x-8)

$$x^3+3x^2-6x-8=(x+1)(x^2+2x-8)$$

$$x^2+2x-8=0$$

$$D=2^2-4*1*(-8)=36$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2*1}$$

$$X_2=2$$

$$X_3=-4$$

Ответ: $x_1=-1; x_2=2; x_3=-4$

3. Теорема Виета

Алгоритм решения:

Подобрать корни, удовлетворяющие системе

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -b/a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = c/a \\ x_1x_2x_3 = -d/a \end{array} \right.$$

,где x_1, x_2, x_3 – корни уравнения

Пример: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

Решение: Подбираем корни:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 * x_2 + x_2 * x_3 + x_1 * x_3 = 26 \\ x_1 * x_2 * x_3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 3 + 4 = 9 \\ 2 * 3 + 3 * 4 + 4 * 2 = 26 \\ 2 * 3 * 4 = 24 \end{cases}$$

Ответ: $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=4$

4. Схема Горнера

Алгоритм решения:

1. По схеме Горнера найти корень уравнения
2. Решить получившееся квадратное уравнение

Если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, $g(x) = x - c$, то при делении $f(x)$ на $g(x)$ частное $q(x)$ имеет вид $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, где $b_0 = a_0$, $b_k = c \cdot b_{k-1} + a_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Остаток r находится по формуле $r = c \cdot b_{n-1} + a_n$.

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
$x = c$	$b_0 = a_0$	$b_1 = c \cdot b_0 + a_1$	$b_2 = c \cdot b_1 + a_2$...	$b_{n-1} = c \cdot b_{n-2} + a_{n-1}$	$r = f(c) = c \cdot b_{n-1} + a_n$

В первой строке этой таблицы записывают коэффициенты многочлена $f(x)$.

Если какая-то степень переменной отсутствует, то в соответствующей клетке таблицы пишется 0. Всегда старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого $b_0 = a_0$. Если $x = c$ является корнем многочлена, то в последней клетке получается 0, т.е. остаток от деления будет равен нулю.

Пример: Решить уравнение $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

Решение: Находим делители свободного члена 12: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$. используя схему Горнера, найдем целые корни уравнения:

	$a_0=1$	$a_1=-1$	$a_2=-8$	$a_3=12$	
$x = 1$	1	0	-8	4	не корень
$x = -1$	1	-2	-6	18	не корень
<u>$x = 2$</u>	1	1	-6	0	корень

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = 2; x_2 = 3$$

Ответ: $x_1 = 2; x_2 = 3$

5. Решение возвратных кубических уравнений

Алгебраическое уравнение вида: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

называется возвратным, если его коэффициенты, стоящие на симметричных относительно середины позициях, равны, то есть если $a_{n-k} = a_k$, при $k = 0, 1, \dots, n$.

Алгоритм решения:

1. Корнем уравнения является $x = -1$
2. Поделить многочлен на многочлен
3. Найти корни в получившемся квадратном уравнении

Пример : $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

Решение : $x_1 = -1$, по правилу нечётных степеней для возвратного уравнения.

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2 - 3x + 1)$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Ответ : $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

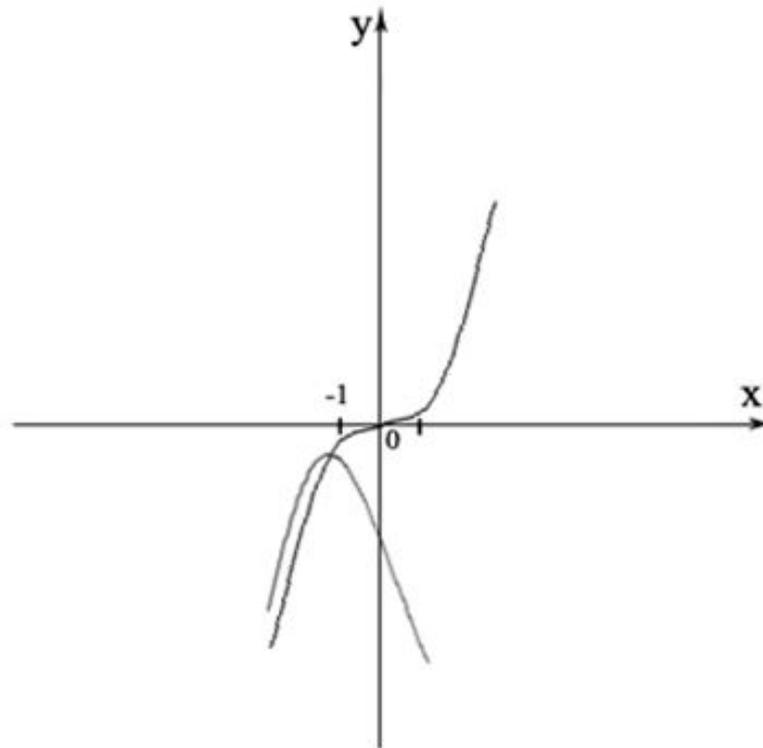
6. Графический способ

Алгоритм решения:

- 1. Разбить кубическое уравнение на два уравнения
- 2. Построить графики функций стоящих в левой и правой частях уравнения
- 3. Абсциссы точек пересечения графиков – корни заданного уравнения

Пример : $x^3+4x^2+6x+3=0$

Решение : Преобразуем уравнение $x^3 = -4x^2-6x-3$. Построим графики функций $y=x^3$ и $y=-4x^2-6x-3$



Ответ : $x_1=-1$

Заключение

Просмотрев множество способов решения кубических уравнений, я остался верен двум на мой взгляд самым надёжным и практичным способам - это теорема Виета и схема Горнера, они позволяют быть уверенным в своем ответе.

Теперь, выбирая между ними, мне стоит лишь посмотреть на сложность коэффициента уравнения.