Линейная алгебра

Лекция 3

Системы линейных уравнений

План лекции

- **Система линейных алгебраических уравнений**
- **Совместность, определенность и равносильность систем**
- **Методы решения систем:**
  - *Метод Крамера;*
  - *Метод обратной матрицы;*
  - *Метод Гаусса.*
- **Количество решений системы**
- **Случай однородных систем**

Системы линейных уравнений (СЛУ)

Под системой линейных уравнений (СЛУ) будем понимать:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где $x_1, x_{2,} \ldots x_n$ – «неизвестные» системы,
$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in R$ – коэффициенты системы,
m – число уравнений, n – число неизвестных.

Матричная запись СЛУ

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A – матрица коэффициентов СЛУ,
B – столбец свободных членов,
X – столбец неизвестных.

Решение СЛУ

Решением СЛУ называется совокупность чисел

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 \in R \quad ,$$

удовлетворяющая всем уравнениям системы, т.е. обращающая их в верные числовые равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 = b_1 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0 = b_m \end{cases}$$

Матричная запись решения СЛУ

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \in R^n : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \\ x_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$A \cdot X_0 = B$$

$$x_{01} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_{02} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_{0n} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Типы СЛУ

СЛУ называется **совместной**, если у неё имеется хотя бы одно решение, в противном случае СЛУ называется **несовместной**.

Совместная СЛУ называется **определённой**, если она имеет одно единственное решение и **неопределённой** в противном случае.

Две системы называются **равносильными**, если их множества решений совпадают.

СЛАУ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ называется **однородной**, если $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, в противном случае СЛУ называется **неоднородной**.

Расширенная матрица СЛУ

Вся информация о СЛУ $\mathbf{A \cdot X = B}$ содержится в **расширенной матрице системы**:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Совместная СЛУ

Пусть дана совместная определенная СЛАУ от **n** неизвестных.

Тогда:

если система однородна, то она имеет только <u>**тривиальное**</u> решение $x_i = 0, i=1,\ldots,n$;

если система не однородна, то она имеет <u>**единственное**</u> решение, которое может быть найдено

- по правилу Крамера,
- методом обратной матрицы,
- методом Гаусса.

Правило Крамера решения СЛУ

Пусть дана совместная СЛУ от **n** неизвестных

$$A \cdot X = B \ , \ \det(A) = \Delta \neq 0 \ .$$

Тогда система имеет единственное решение

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \ , \ i = 1, 2, ..., n \ ,$$

где Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Правило Крамера. Пример 1

Найти решение СЛУ
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 45 + 4 - (6 - 12 - 5) = 62 \neq 0 \ ,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 62 \ , \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 62 \ , \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 62 \ .$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1 \ .$

Метод обратной матрицы решения СЛУ

Пусть дана совместная СЛАУ от **n** неизвестных

$$A \cdot X = B \ , \ \det(A) = \Delta \neq 0 \ .$$

Тогда существует A^{-1} и $\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

(т.к. $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$).

<u>Пример (тот же).</u>

$$\Delta = 62 \neq 0 \ , \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \ A^{-1} = \frac{1}{62}\begin{pmatrix} 7 & 19 & -1 \\ -8 & -4 & 10 \\ 13 & -9 & 7 \end{pmatrix} .$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{62} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 19 & -1 \\ -8 & -4 & 10 \\ 13 & -9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Метод Гаусса решения СЛУ

Суть метода состоит в последовательном исключении неизвестных: сначала исключается x_1 из всех уравнений системы, начиная со 2-го, далее исключается x_2 из всех уравнений, начиная с 3-го, и т. д., пока в последнем уравнении останется только x_n (**<u>прямой ход </u>схемы Гаусса**). Затем из последнего уравнения находится x_n , с помощью этого значения из предпоследнего уравнения вычисляется x_{n-1} и т. д., пока из 1-го уравнения не найдется x_1 (**<u>обратный ход</u> схемы Гаусса**).

Метод Гаусса решения СЛАУ. Пример

Пример (тот же):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{II-3I \\ III-2I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 9 & -4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 62 & 62 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

или

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Алгоритм решения произвольной СЛУ

1. Приведем СЛУ к системе с матрицей A_1 трапециевидного (ступенчатого) вида:

а) полагая $a_{11} \neq 0$, исключим неизвестную переменную x_1 из всех уравнений системы, начиная со 2-го. Для этого

к 2-му уравнению прибавим 1-ое, умноженное на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$,

к 3-му уравнению прибавим 1-ое, умноженное на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$,

. . . . ,

к n-ому уравнению прибавим 1-ое, умноженное на $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$.

В результате преобразований система примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots \qquad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \quad \ldots \qquad + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots \qquad + a_{rn}^{(1)}x_n = b_r^{(1)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + a_{1j} \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right), \; i = 2,3,\ldots,n, \;\; j = 2,3,\ldots,n$$

$$b_i^{(1)} = b_i + b_1 \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right), \; i = 2,\ldots,n$$

б) полагая $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестную переменную x_2

из всех уравнений системы, начиная с третьего. Для этого

к 3-му уравнению прибавим 2-ое, умноженное на $-\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$,

к 4-му уравнению прибавим 2-ое, умноженное на $-\dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$,

. . . . ,

к n-ому уравнению прибавим 2-ое, умноженное на $-\dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$.

в) и т.д.

2. Укороченная система

2. Отбросив последние $n - r$ уравнений, запишем укороченную систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots \qquad + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \quad \ldots \qquad + a_{2,n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{r,r}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{r,n}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)} \end{cases}$$

3. Свободные и базисные неизвестные

3. Назовем неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ <u>базисными</u>,

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – <u>свободными</u>.

Запишем укороченную систему в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,n}x_n \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2,r}^{(1)}x_r = b_2^{(1)} - a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} - a_{2,n}^{(1)}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r,r}^{(r-1)}x_r = b_r^{(r-1)} - a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} - a_{r,n}^{(r-1)}x_n \end{cases}$$

4. Общее решение СЛУ

4. Для каждого набора свободных неизвестных

$$x_{r+1} = c_1, \quad x_{r+2} = c_2, \quad \dots, \quad x_n = c_{n-r}$$

укороченная система имеет единственное решение:

$$X(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

называемое <u>общим решением</u> исходной СЛУ.

Общее решение СЛУ. Пример 2

Найти общее решение СЛУ
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Положим $x_3 = c_1$, $x_2 = c_2$.

Укороченная система имеет вид $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$,

откуда $x_1 = 2c_2 + 3c_1$.

Общее решение $X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} 2c_2 + 3c_1 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in R$.

Теорема о числе решений СЛУ

Пусть дана совместная СЛУ от $\mathbf{n}$ неизвестных с матрицей коэффициентов , которая при приведении к ступенчатому виду имеет $\mathbf{r}$ ненулевых строк.

Тогда:

1. если $\mathbf{r = n}$, то система имеет единственное решение;
2. если $\mathbf{r < n}$, то система имеет бесконечно много решений, причем $\mathbf{(n - r)}$ неизвестным можно присвоить произвольные значения, а остальные $\mathbf{r}$ неизвестных выражаются через них единственным образом.

Следствия из теоремы о числе решений СЛУ

Система **n** линейных уравнений с **n** неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов системы **невырожденная.**

Однородная система **A·X= 0** всегда совместна, т.к. имеет **тривиальное решение X= 0**. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\mathbf{r < n}$.

Фундаментальное множество решений однородной СЛУ

Общее решение однородной системы имеет вид

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \ldots + c_{n-r} E_{n-r} \;,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ – произвольные постоянные.

<u>Фундаментальное множество решений</u> $\boxed{\{E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}\}}$ может быть получено из общего решения, если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

Фундаментальное множество решений однородной СЛУ. Пример 2 (продолжение)

Найти фундаментальное множество решений СЛУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Общее решение $X = \begin{pmatrix} 3c_2 + 2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathrm{R}$

При $c_1=1$, $c_2=0$ $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, при $c_2=1$, $c_1=0$ $E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2 (продолжение)

Общее решение системы может быть записано так:

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ - фундаментальное множество решений исходной СЛУ.

Структура общего решения неоднородной СЛУ

Общее решение неоднородной системы $\mathbf{A \cdot X = B}$ может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы $\mathbf{A \cdot X = 0}$ и произвольного частного решения неоднородной системы.

$$X = X_{одн} + \tilde{X}_{неодн}$$

Структура множества решений неоднородной СЛУ. Пример 3

Найти множество решений СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Укороченная система имеет вид
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

$n\text{-}r = 2$. Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, тогда

$$x_2 = -2 + 4c_1 + c_2$$

$$x_1 = 1 + 2 - 4c_1 - c_2 - 2c_1 - c_2 = 3 - 6c_1 - 2c_2$$

Пример 3 (продолжение)

Общее решение

$$X=\begin{pmatrix}3-6c_1-2c_2\\-2+4c_1+c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=\boxed{c_1\begin{pmatrix}-6\\4\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathrm{R}$$

общее решение однородной СЛУ

частное решение неоднородной СЛУ