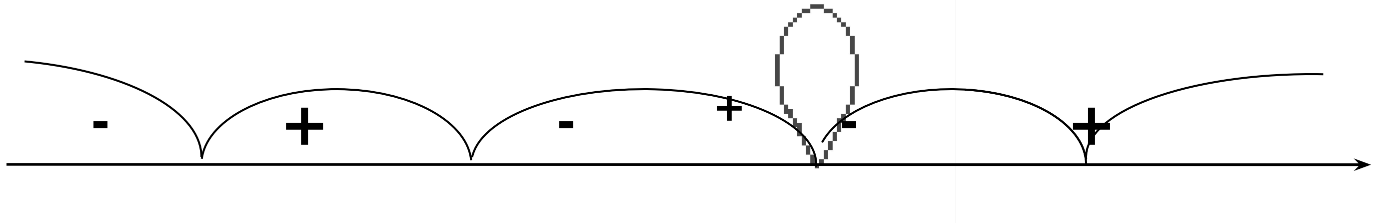
Решение рациональных неравенств методом интервалов



Метод интервалов используется при решении рациональных неравенств, например:

$$(x^2 - 1)\cdot(x^2 + 2x - 8) > 0$$

$$8 - x^3 < 0$$

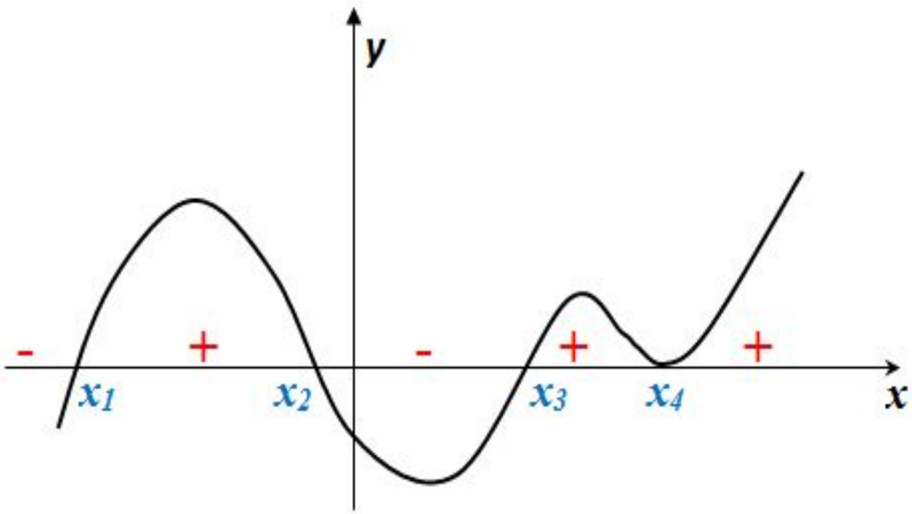
$$2x^2 + x - 3 \geq 0$$

Левая часть неравенства представляет собой рациональный многочлен неизвестного *x*, в правой части стоит *0*.

Для начала рассмотрим график некоторой функции

$$y = f(x)$$

и вспомним, что точки пересечения графика функции с осью Ox называются **нулями функции** или **корнями** уравнения $f(x) = 0$



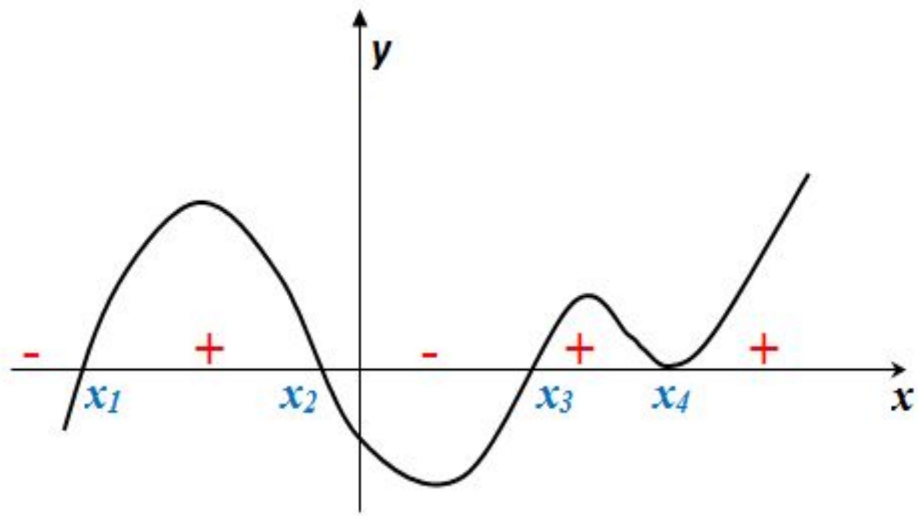
У нас корней четыре: x_1, x_2, x_3, x_4.

Они разбивают всю ось Ох на интервалы.

На каждом таком интервале функция

либо положительна $f(x) > 0$ (интервалы со знаком «+»),

либо отрицательна $f(x) < 0$ (интервалы со знаком «-»).

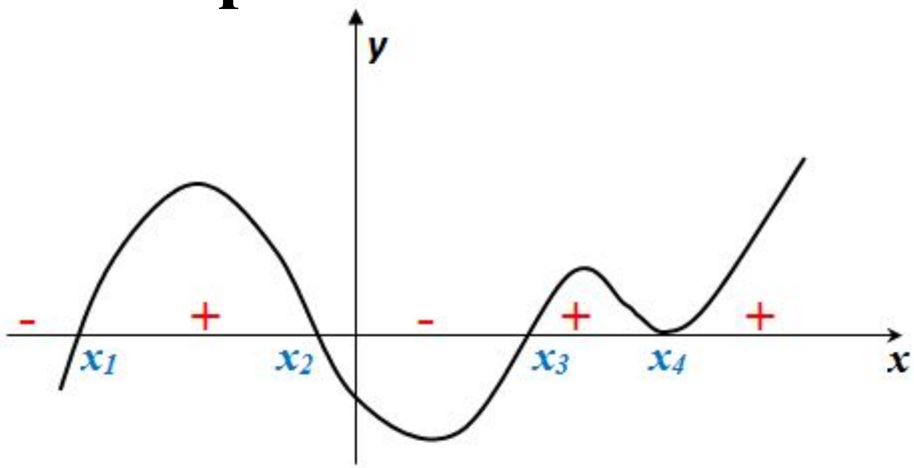


Метод интервалов и позволяет нам найти эти самые интервалы (поэтому он так и называется).

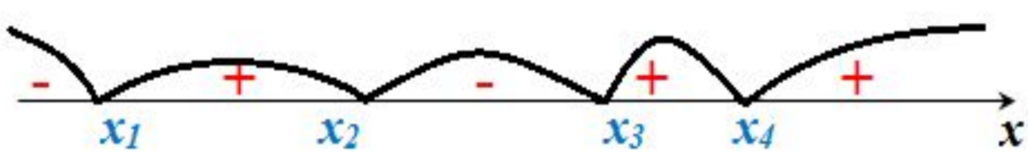
Таким образом, для решения неравенства

f(x) > 0 или ***f(x) < 0***

надо найти интервалы со знаками «+» или «-».



Из графика функции «выдернем» только ось *Ox* с интервалами. Вот примерно такая картинка у нас будет получаться при решении неравенств.



Назад в прошлое

Конечно же, все вы помните формулу для вычисления корней квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$

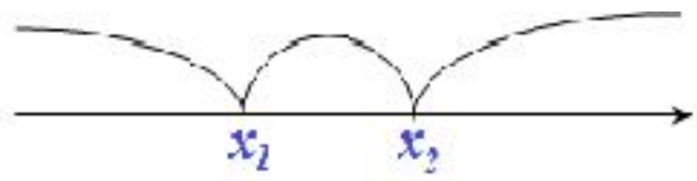
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

где $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант. Если $D = 0$, то уравнение имеет ***два равных*** корня (а не один, как многие из вас думали раньше).

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a}$$

$x_1 = x_2$ - это верно, но их все-таки два!!!

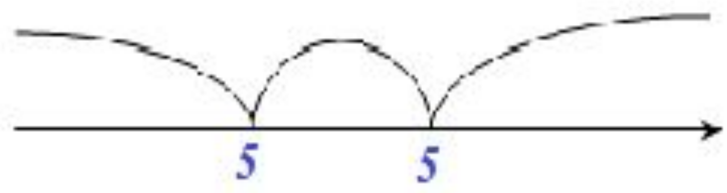
Если корни различные, то интервал между ними на оси x будет выглядеть вот так:



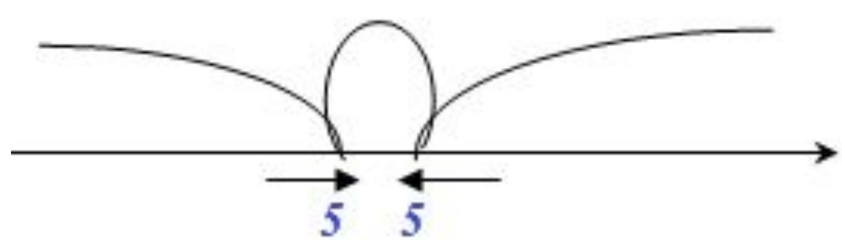
А если корни равны, например, $x_1 = x_2 = 5$?

Как изобразить интервал между ними?

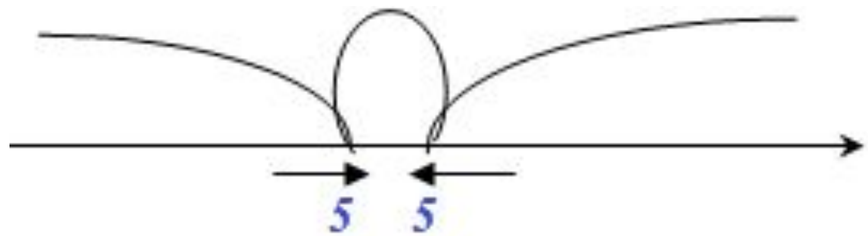
Такое бывает?



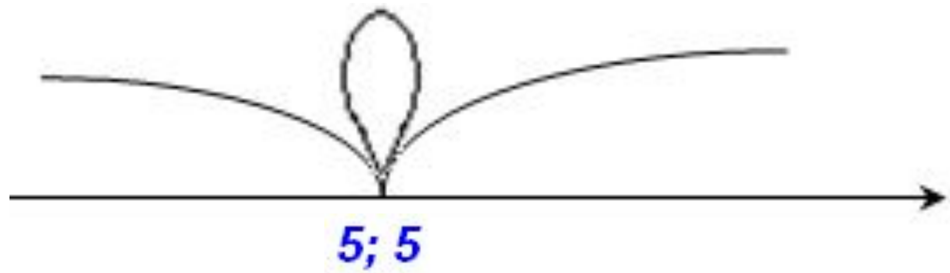
Ведь это одна и та же точка на числовой оси, так и «стянем» эти пятерки друг к другу поближе.



Тянем – потянем… Что получим?



И не совсем интервал, а вот такую петлю!



«Сложился» наш интервал петелькой, и очень она нам пригодится.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов

1. Привести неравенство к виду ***f(x) > 0*** (т. е. в правой части неравенства должен стоять 0).
2. Решить уравнение ***f(x) = 0***

   (т. е. найти все корни x_1, x_2, x_3 и т. д.)
3. Все корни отметить на оси х.
4. Нарисовать интервалы (и петли, если есть равные корни).
5. Определить знак «+» или «-» на одном интервале (любом).
6. Расставить знаки на остальных интервалах, чередуя «+» и «-» (в петлях знаки тоже ставятся!!!)
7. В ответ записать интервалы

   со знаком «+» при решении неравенства ***f(x) > 0*** ,

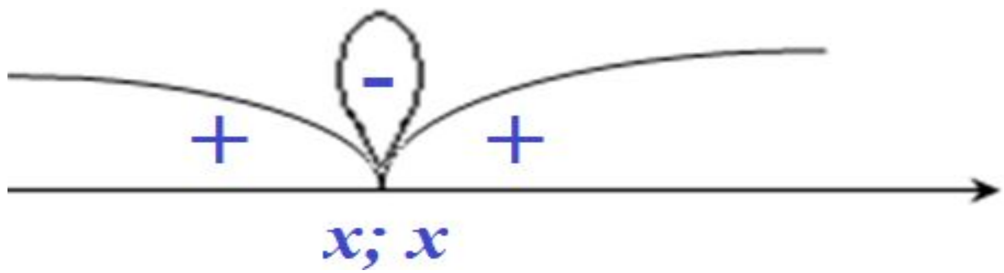
   со знаком «-» при решении неравенства ***f(x) < 0.***

При решении строгих неравенств все корни «выкалываются», при решении нестрогих неравенств в ответ записываются и корни тоже!

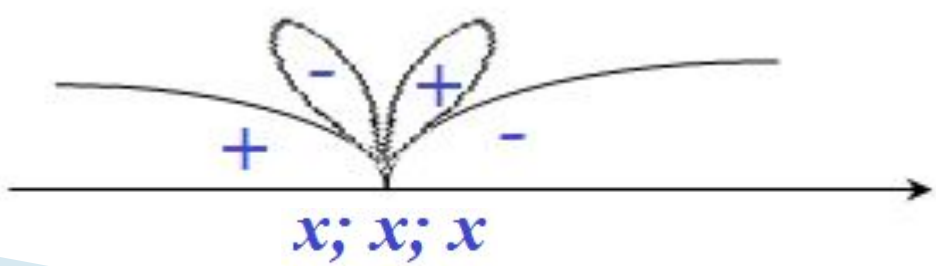
Подумай и сделай вывод

Попробуйте сформулировать правило:

знаки слева и справа от корня будут одинаковыми, если…..



знаки слева и справа от корня будут разными, если…..



Решение неравенств методом интервалов

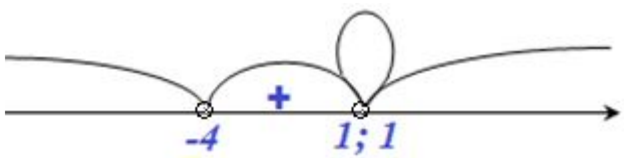
Задание 1. $(2x-2)(x^2+3x-4)<0$

Найдем корни многочлена, стоящего в правой части. Для этого каждое выражение в скобках приравняем к нулю и решим полученные уравнения.

$2x-2=0$ $\qquad$ $x^2+3x-4=0$

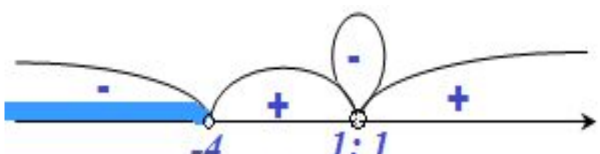
$x=1$ $\qquad$ $x_1=1, \quad x_2=-4$

Теперь отметим все найденные корни на числовой оси и нарисуем интервалы. У нас получилось два равных корня **1** и **1**, поэтому не забудем нарисовать петлю в точке **1**.



Определим знак («+» или «-») на одном интервале, например, при $x=0$ (это средний интервал). Подставим $x=0$ в левую часть неравенства:

$(2\cdot0-2)(0^2+3\cdot0-4)=(-2)\cdot(-4)=8$ –положительное число, значит на среднем интервале будет стоять знак «+». *На остальных интервалах знаки будем чередовать (про знак в петле не забываем!)*

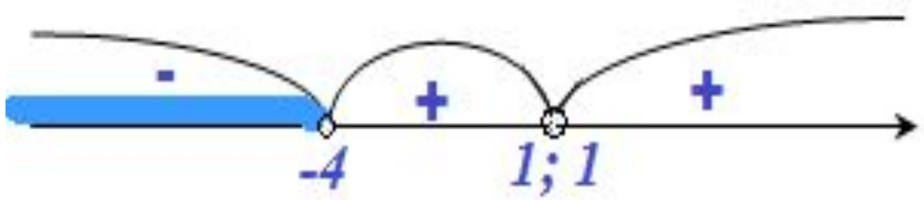


Осталось записать в ответ интервалы с «-», так как в неравенстве стоит знак < 0. Такой интервал у нас один.

Ответ: $(-\infty; -4)$.

Несколько вопросов - замечаний

1. Теперь понятно, **для чего нам нужны петли**? Ведь если бы мы в предыдущем задании не нарисовали петлю, то знаки на интервалах чередовать было бы **нельзя!!!**



Иначе ответ получился бы неправильным.

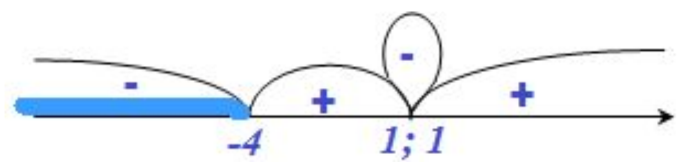
Без петли нам пришлось бы определять знак на каждом интервале. Возможно, многие так и делают.

Несколько вопросов - замечаний

2. **Что изменится** в решении, если неравенство будет **нестрогим**?

$$(2x - 2)(x^2 + 3x - 4) \le 0$$

Корни изменятся? Нет. Может, петли не будет? Будет. Может, знаки на интервалах поменяются? Тоже нет. И картинка получится такая же, только корни выкалывать не станем.



А раз корни не выколоты, значит, все они записываются в ответ. И единица тоже.

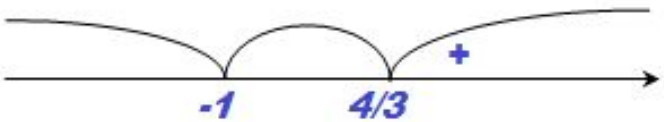
Ответ: **(-∞; -4]U1**

Решение неравенств методом интервалов

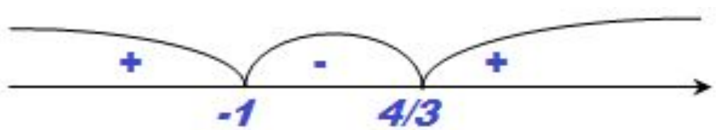
Задание 2. $3x^2 - x \geq 4$

Перенесем 4 из правой части неравенства в левую (с противоположным знаком): $3x^2 - x - 4 \geq 0$

Найдем корни квадратного трехчлена, стоящего в левой части (приравняем его к нулю и решим уравнение). Корни $x_1 = -1$, $x_2 = 4/3$. Теперь отметим все найденные корни на числовой оси и нарисуем интервалы.



Определим знак («+» или «-») на одном интервале, например, при $x = 2$ (это самый правый интервал). Подставим $x = 2$ в левую часть неравенства: $3 \cdot 2^2 - 2 - 4 = 6$ –положительное число, значит на этом интервале будет стоять знак «+». На остальных интервалах знаки будем чередовать.



В ответ запишем интервалы со знаком «+» и корни, так как в неравенстве стоит знак ≥ 0.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [4/3; +\infty)$

Решение неравенств методом интервалов

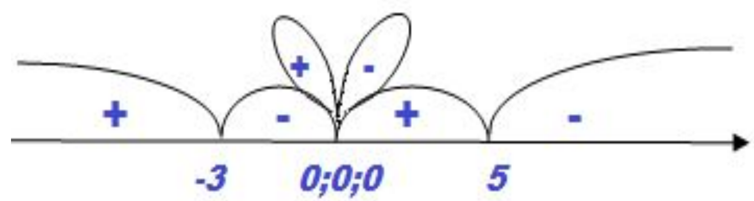
Задание 3. $x^2 \cdot (5 - x)\cdot(3x + x^2) > 0$

Найдем корни многочлена, стоящего в правой части. Для этого каждый множитель приравняем к нулю и решим полученные уравнения.

$x^2 = 0$ $\quad$ $5 - x = 0$ $\quad$ $3x + x^2 = 0$

$x_{1,2} = 0$ *(два равных корня!!!)* $\quad$ $x = 5$ $\quad$ $x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = -3$

Отметим все найденные корни на числовой оси и нарисуем интервалы. Обратите внимание, что корень $x = 0$ встречается трижды! Сколько будет петлей в нуле? Конечно же, две.



Определим знак («+» или «-») на одном интервале, например, при $x = 1$ (между нулем и пятеркой).

$1^2 \cdot (5 - 1)\cdot(3\cdot1 + 1^2) = 16$ –положительное число, значит на этом интервале будет стоять знак «+». На остальных интервалах знаки будем чередовать.

В ответ запишем интервалы со знаком «+», так как в неравенстве стоит знак >0.

Ответ: $(-\infty; -3)\cup(0; 5)$

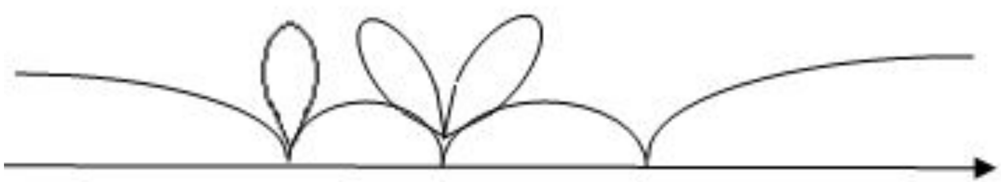
Задания для самостоятельного решения

Задание 4. $5 - 3x - 2x^2 \geq 0$

Задание 5. $(7x^2 + 14x)\cdot(x^2 - 2x - 8) \leq 0$

Задание 6. $(2x - 2)\cdot(1 + x)\cdot(3x + 9) < 0$

Задание 7. $(7 - x)^2\cdot(5x + 5)\cdot(x^2 - 6x - 7) > 0$



***Ответы*:** [0; 4]U(-2) (7; + ∞)

(-∞; -3)U(-1; 1) [-5/2; 1]