КИНЕМАТИКА

8. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

8.1. Способы задания движения точки

Кинематикой называют раздел механики, в котором рассматривают движение тел и точек без учета сил, приложенных к ним.

Система отсчета - реальное или условное тело, относительно которого определяют положение и движение других тел.

Описание способов сводится к определению:

а) самой системы отсчета;

б) положения точки в пространстве;

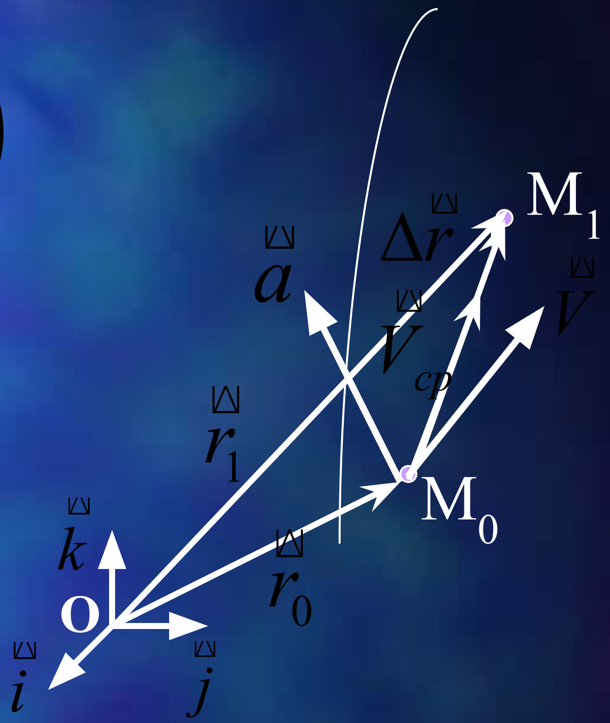
в) уравнений движения точки;

г) формул, по которым могут быть найдены кинематические характеристики движения точки.

8.1.1. Векторный способ

Уравнение движения точки $\vec{r} = f(t)$

$\vec{r}$ - радиус-вектор



Траекторией точки называют некоторую линию, представляющую собой после-довательность положений точки относительно системы отсчета

Перемещением точки, Δr, за данный промежуток времени называется вектор, соединяющий начальное и конечное положения точки на ее траектории

Годографом радиуса-вектора называют линию, описываемую его концом

Средняя скорость

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{cp} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ускорение точки - это векторная величина, характеризующая изменение скорости точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

8.1.2. Естественный способ

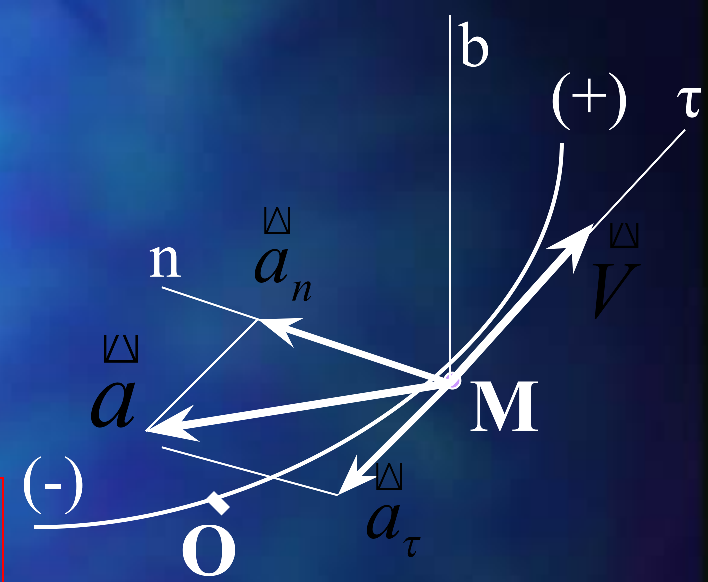
Уравнение движения точки

$$\boxed{S = f(t)}$$

OM* = *S – дуговая координата

Скорость точки

$$\boxed{V = \frac{dS}{dt}}$$



Ускорение точки

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}$$

Составляющие ускорения

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \\ a_n &= \frac{V^2}{\rho} \end{aligned}\right\}$$

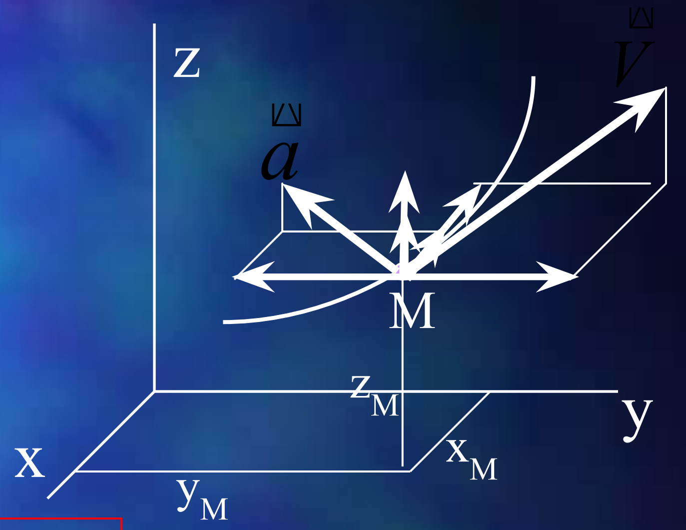
- касательная составляющая; $\vec{a}_\tau$

- нормальная составляющая. $\vec{a}_n$

8.1.3. Координатный способ

Уравнения движения точки

$$\left.\begin{aligned} x_M &= f_1(t) \\ y_M &= f_2(t) \\ z_M &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$



Скорость точки

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \varphi_1(t) \\ V_y &= \varphi_2(t) \\ V_z &= \varphi_3(t) \end{aligned}\right\}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = V_x/V, \quad \cos\beta = V_y/V, \quad \cos\gamma = V_z/V.$$

Ускорение точки

$$\left.\begin{aligned} a_x &= dV_x/dt = d^2x/dt^2 = \psi_1(t) \\ a_y &= dV_y/dt = d^2y/dt^2 = \psi_2(t) \\ a_z &= dV_z/dt = d^2z/dt^2 = \psi_3(t) \end{aligned}\right\}$$

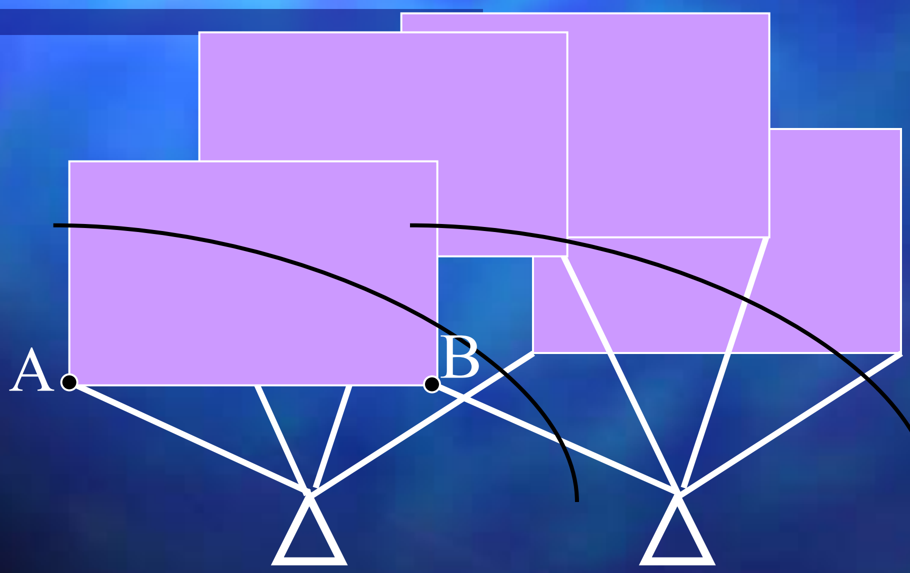
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

9. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

9.1. Поступательное движение тела

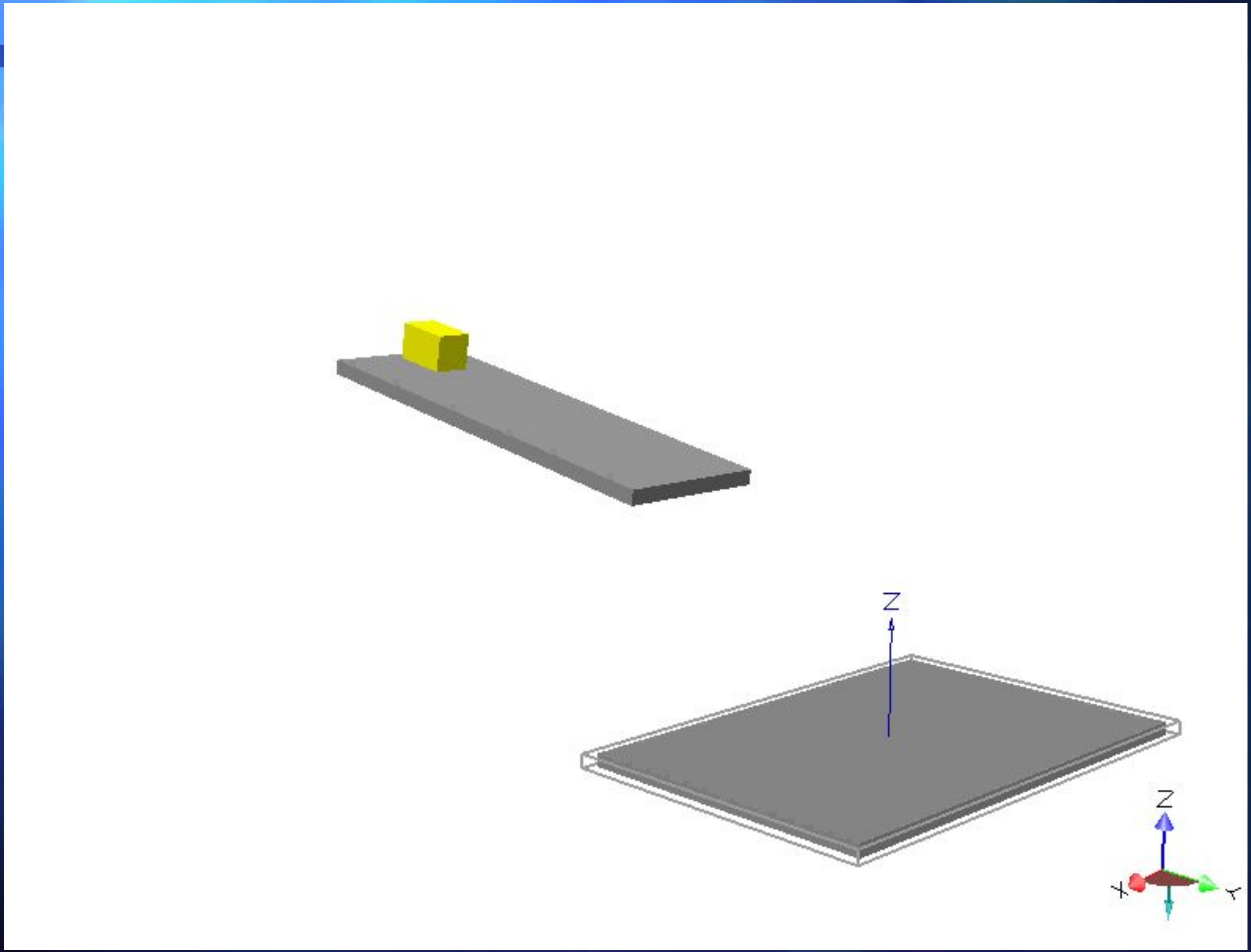
Поступательным называется такое движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается при его движении параллельной самой себе

прямолинейная траектория



криволинейная траектория

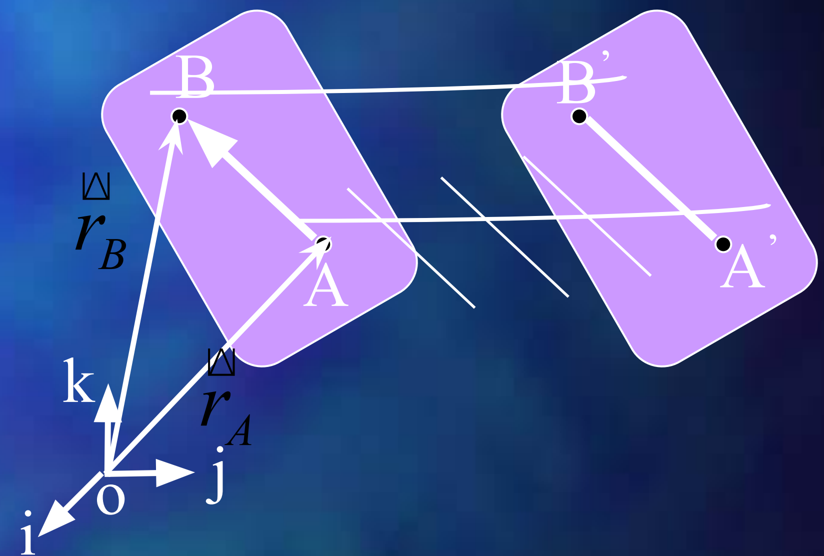
Пример поступательного движения тела



Свойства поступательного движения

при поступательном движении все точки тела:
- описывают одинаковые траектории;
- имеют в любой момент времени равные по модулю и одинаковые по направлению скорости и ускорения

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$$



$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\left(\vec{AB}\right)}{dt}$$

$$d\left(\vec{AB}\right)/dt = 0 \qquad \vec{V}_B = \vec{V}_A$$

$$\vec{r}_A = f(t)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

9.2. Вращательное движение тела

Вращательным называется такое движение тела, при котором хотя бы две его точки остаются неподвижными

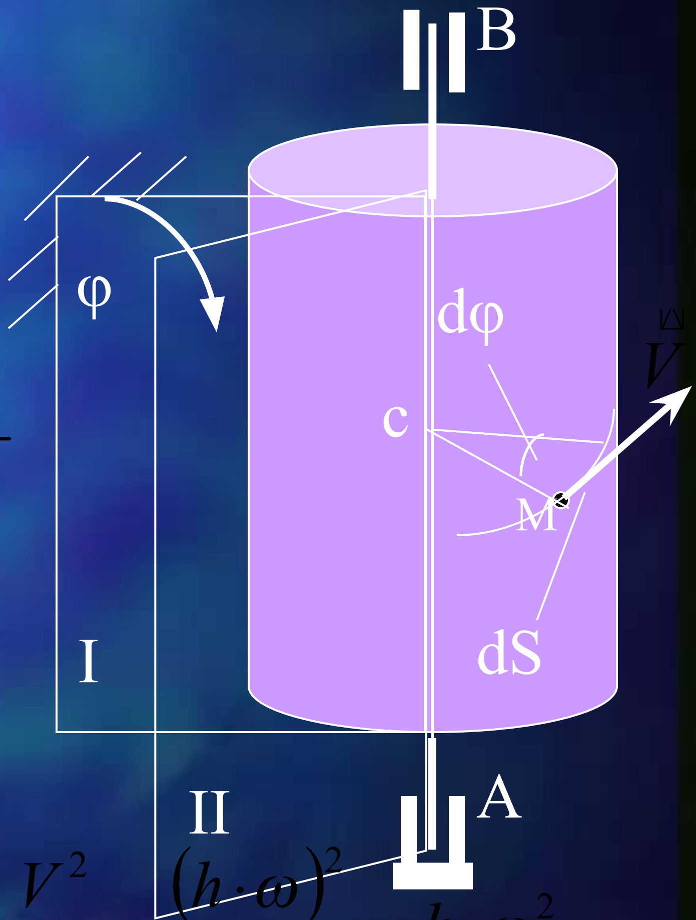
Уравнение вращательного движения

$$\varphi = f(t)$$

φ - угловая координата

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

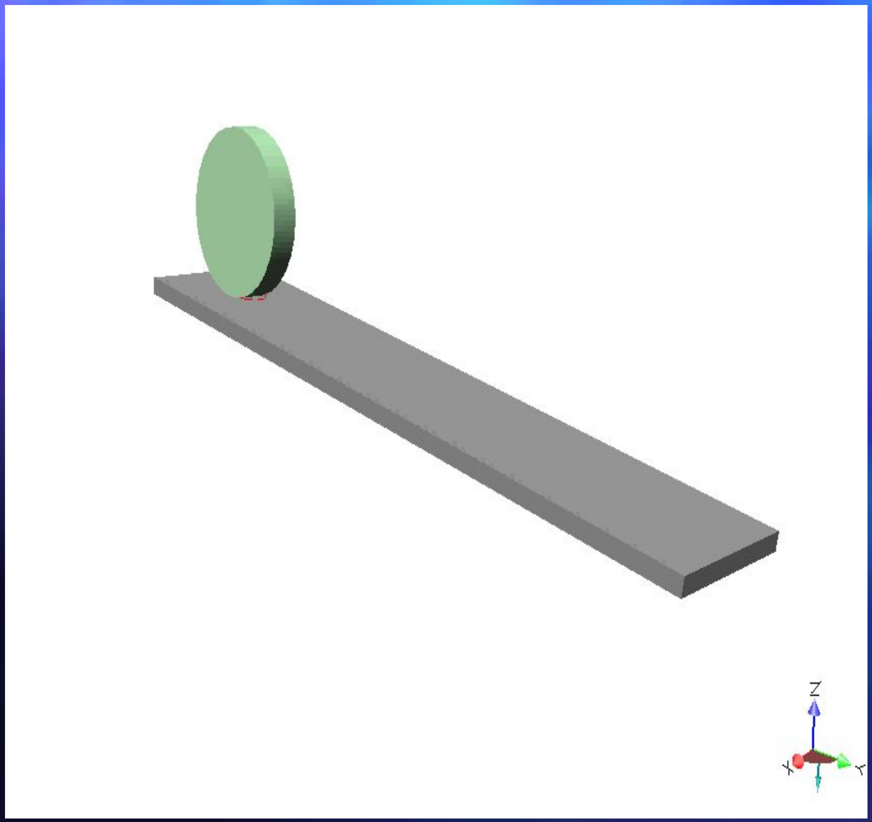
$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{h \cdot d\varphi}{dt} = h \cdot \omega$$



$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(h \cdot \omega)}{dt} = h \cdot \frac{d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon \qquad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(h \cdot \omega)^2}{h} = h \cdot \omega^2$$

9.3. Плоскопараллельное движение тела

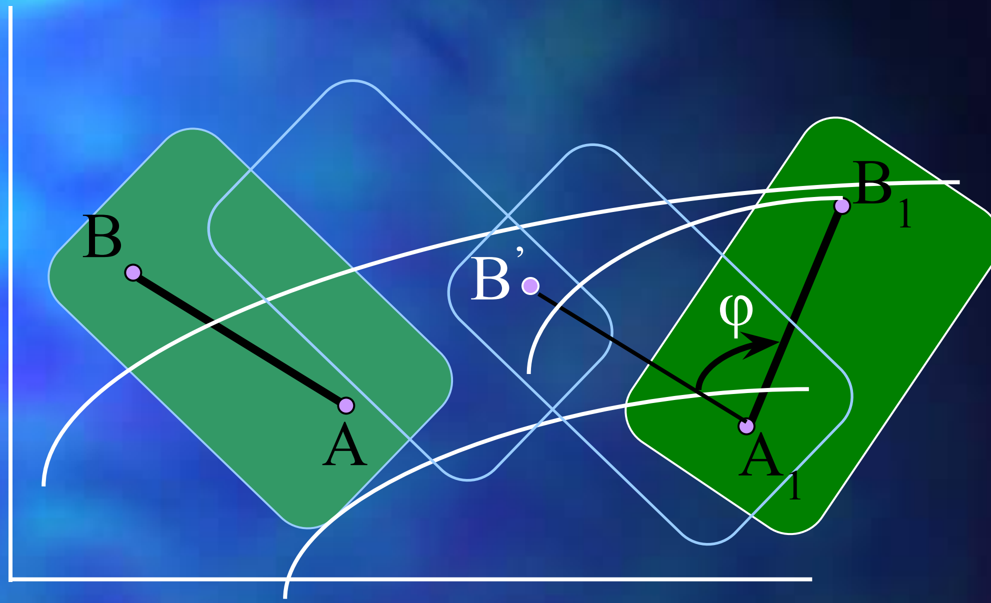
Плоскопараллельным (плоским) называется такое движение тела, при котором все его точки описывают траектории, параллельные некоторой неподвижной плоскости



Разложение плоского движения на составляющие

Составляющие плоского движения:

1) поступательная;
2) вращательная.



Уравнения плоского движения тела

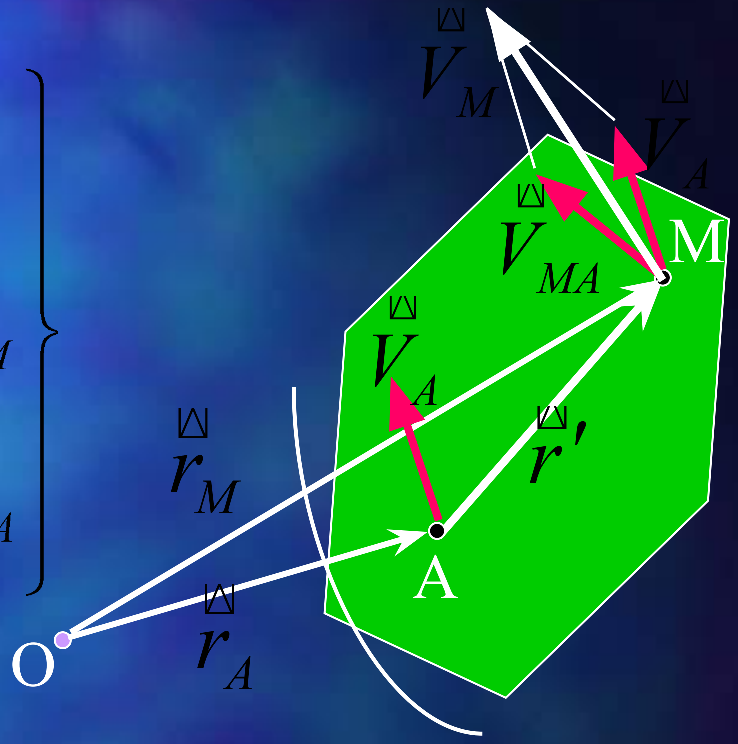
$$\left.\begin{aligned} x_A &= f(t) \\ y_A &= f(t) \\ \varphi &= f(t) \end{aligned}\right\}$$

Первые 2 уравнения описывают поступательную составляющую движения, а последнее уравнение – вращательную составляющую

Скорости точек при плоском движении тела

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}\,'$$

$$\Downarrow \frac{d}{dt} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_A}{dt} &= \vec{V}_A \\ \frac{d\vec{r}_M}{dt} &= \vec{V}_M \\ \frac{d\vec{r}\,'}{dt} &= \vec{V}_{MA} \end{aligned}\right\}$$



$$\boxed{\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}}$$

скорость произвольной точки М тела при его плоском движении определяется как геометрическая сумма скорости другой какой-либо точки А, называемой полюсом, и скорости точки М, которую она получает при вращении тела вокруг полюса

Теорема о проекциях скоростей 2-х точек

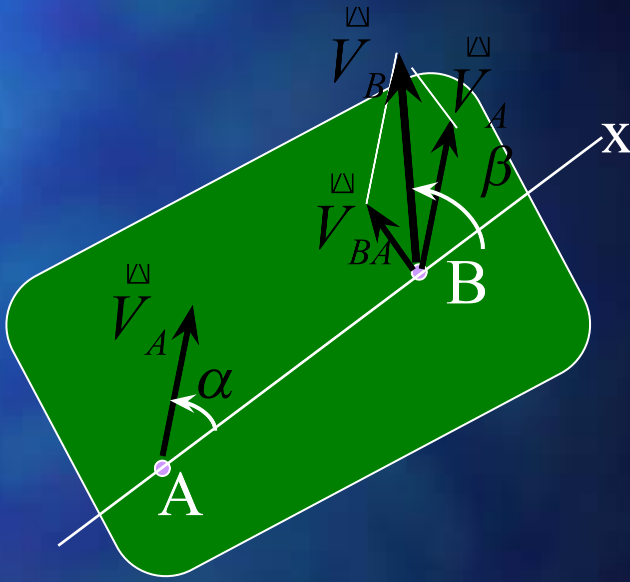
проекции скоростей двух точек тела, совершающего плоское движение, на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$$V_{Bx} = V_{Ax} + V_{BAx}$$

$$V_{Bx} = V_B \cdot \cos\beta$$

$$V_{Ax} = V_A \cdot \cos\alpha$$

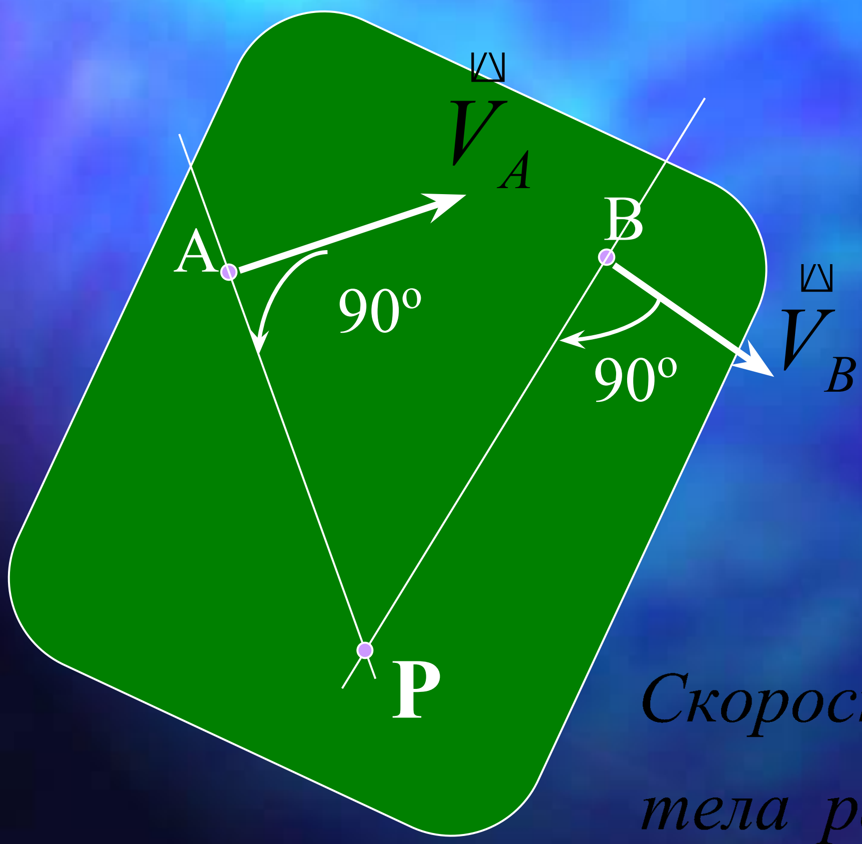


$$V_{BAx} = V_{BA} \cdot \cos 90^{\circ} = 0$$

$$V_B \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha$$

Мгновенный центр скоростей (МЦС)

МЦС - точка сечения тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю



$Пусть\ V_p \neq 0,\ тогда\ одно-временно\ должно\ выполняться$

$$V_{A_{AP}} = V_{P_{AP}}\ и\ V_{B_{BP}} = V_{P_{BP}},$$

$что\ невозможно,\ поэтому$

$$V_P = 0$$

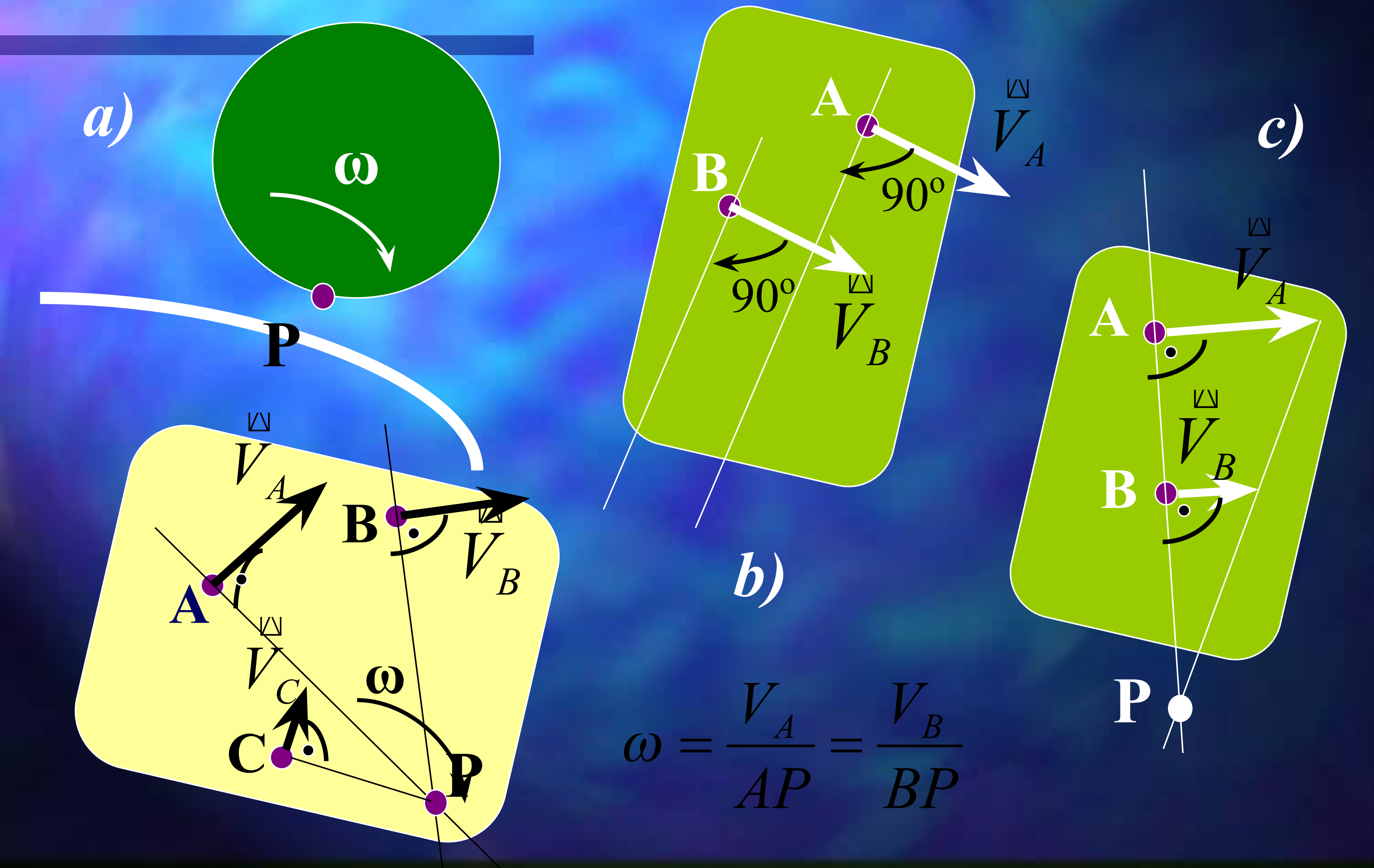
$Скорость\ произвольной\ точки\ M\ тела\ равна\ V_M = V_{MP}\ или\ V_M = \omega \cdot MP$

ВЫВОДЫ:

1) практическое значение МЦС заключается в том, что с его помощью геометрически сложное плоское движение тела можно рассматривать как простое мгновенно вращательное движение относительно оси, проходящей через МЦС;

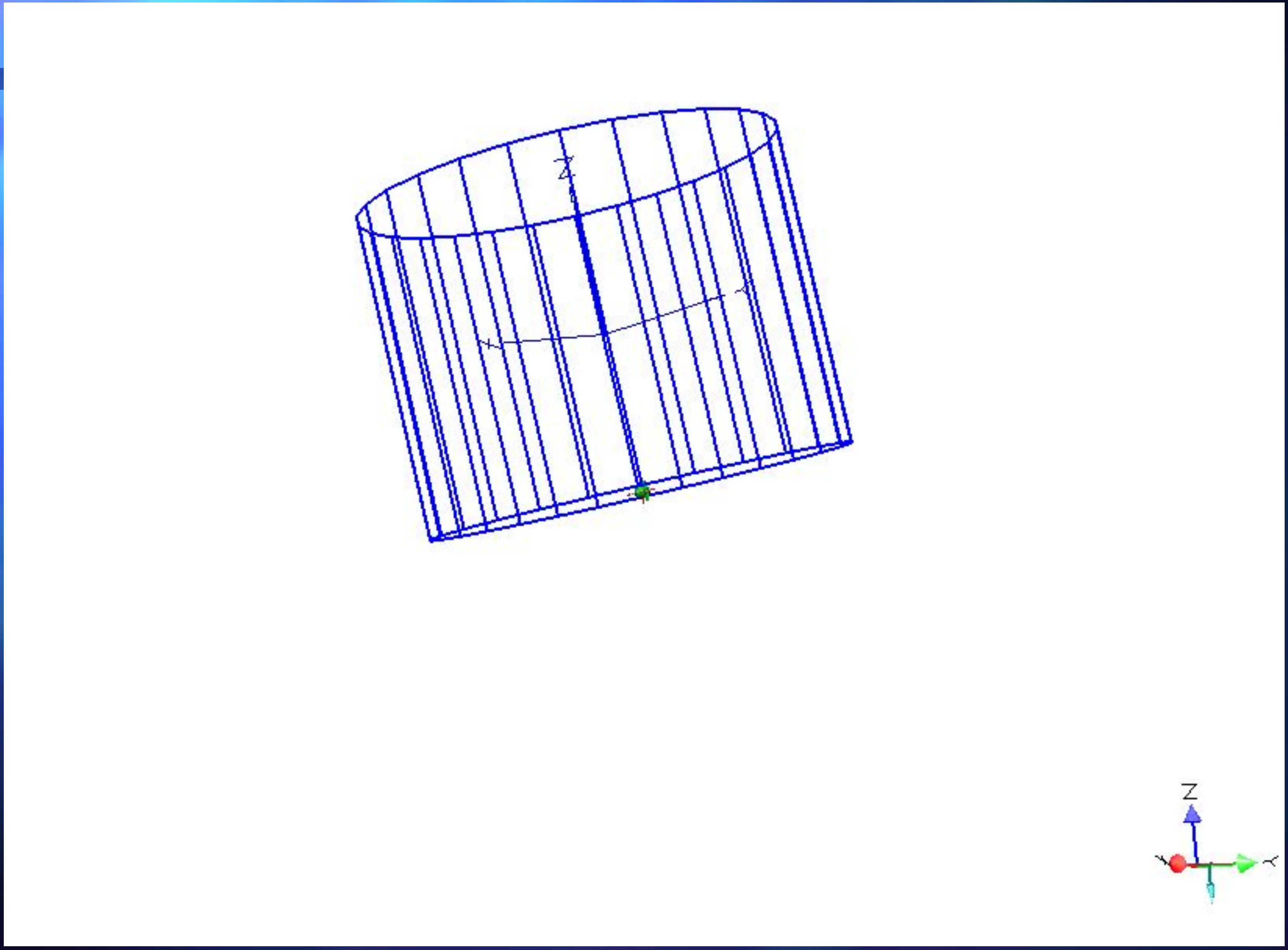
2) скорость произвольной точки тела, совершающего плоское движение, определяется как скорость, которую она получает при вращении тела вокруг МЦС

Частные случаи определения положения МЦС



$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

9.4. Движение тела с одной неподвижной точкой



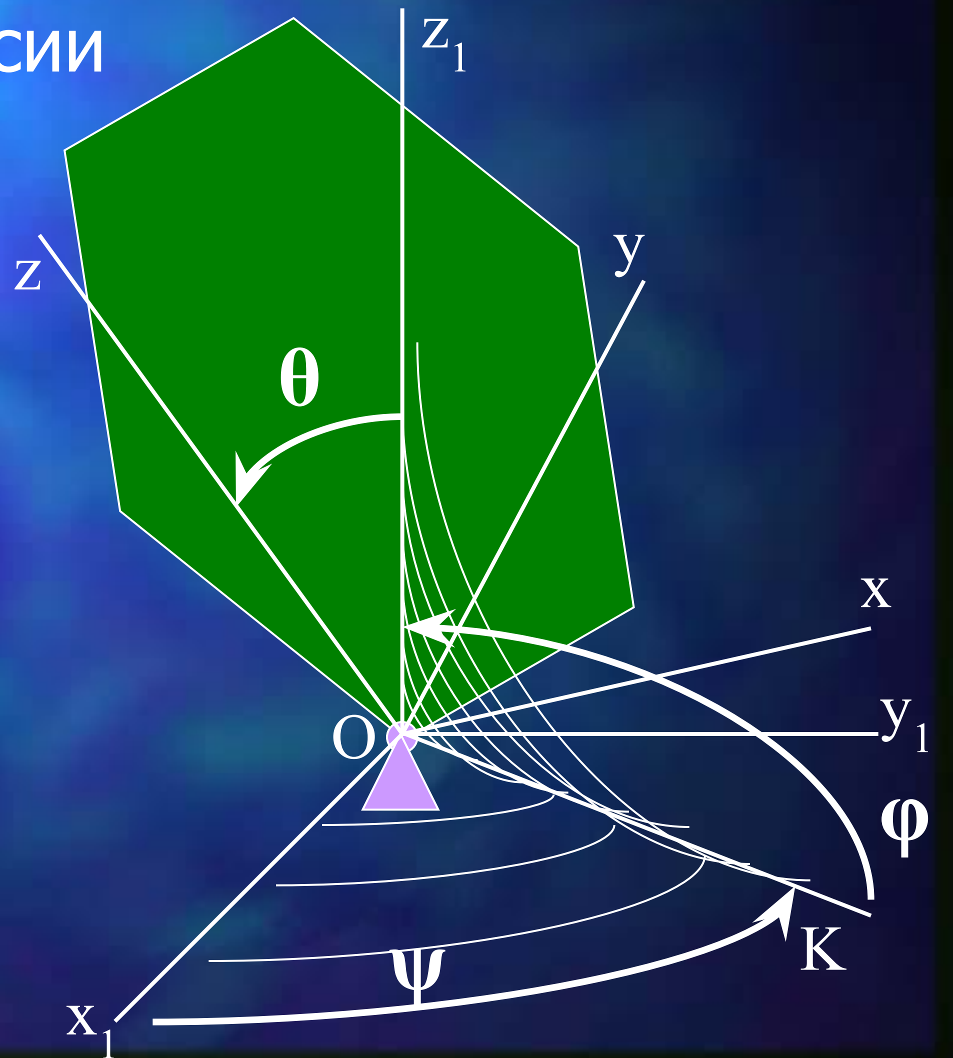
Уравнения движения

φ = <KOx –угол собственного вращения

Ψ = <x_1OK – угол прецессии

Θ = <z_1Oz – угол нутации

OK – линия узлов



$$\left.\begin{aligned}\varphi &= f_1(t)\\ \psi &= f_2(t)\\ \theta &= f_3(t)\end{aligned}\right\}$$

Теорема Эйлера-Даламбера

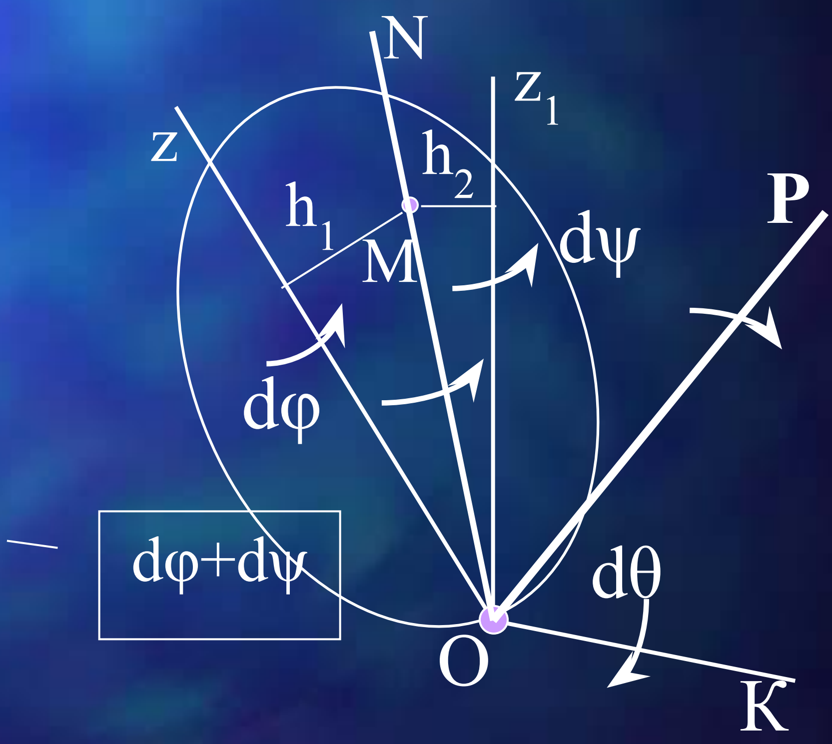
всякое элементарное перемещение тела, имеющего одну неподвижную точку, можно представить как элементарный поворот относительно мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку

$$Найдем\,(\bullet)M\,,где$$

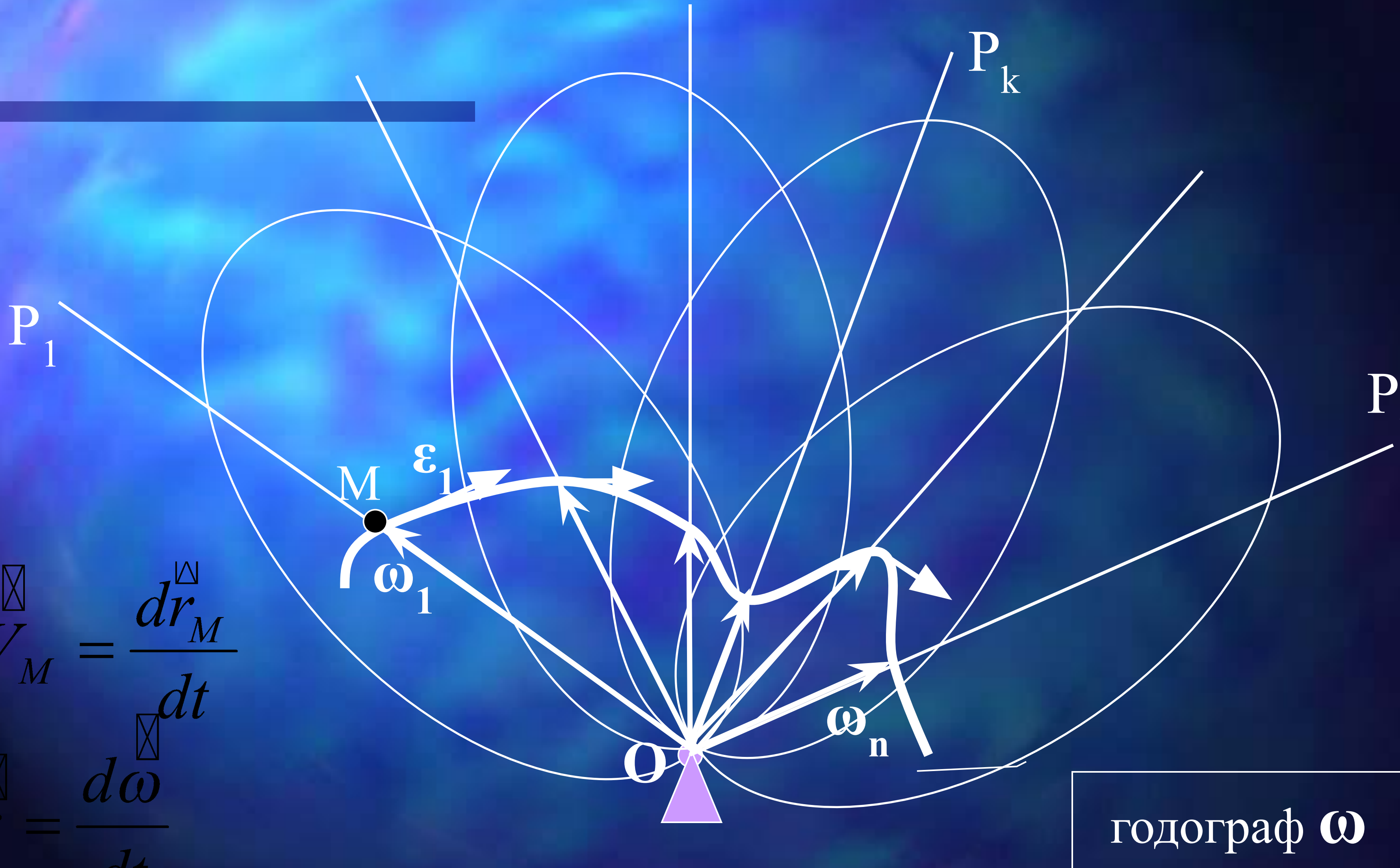
$$h_1 \cdot d\varphi = h_2 \cdot d\psi\,,$$

$$т.е.$$

$$h_1 \cdot d\varphi - h_2 \cdot d\psi = 0$$



Кинематические характеристики тела

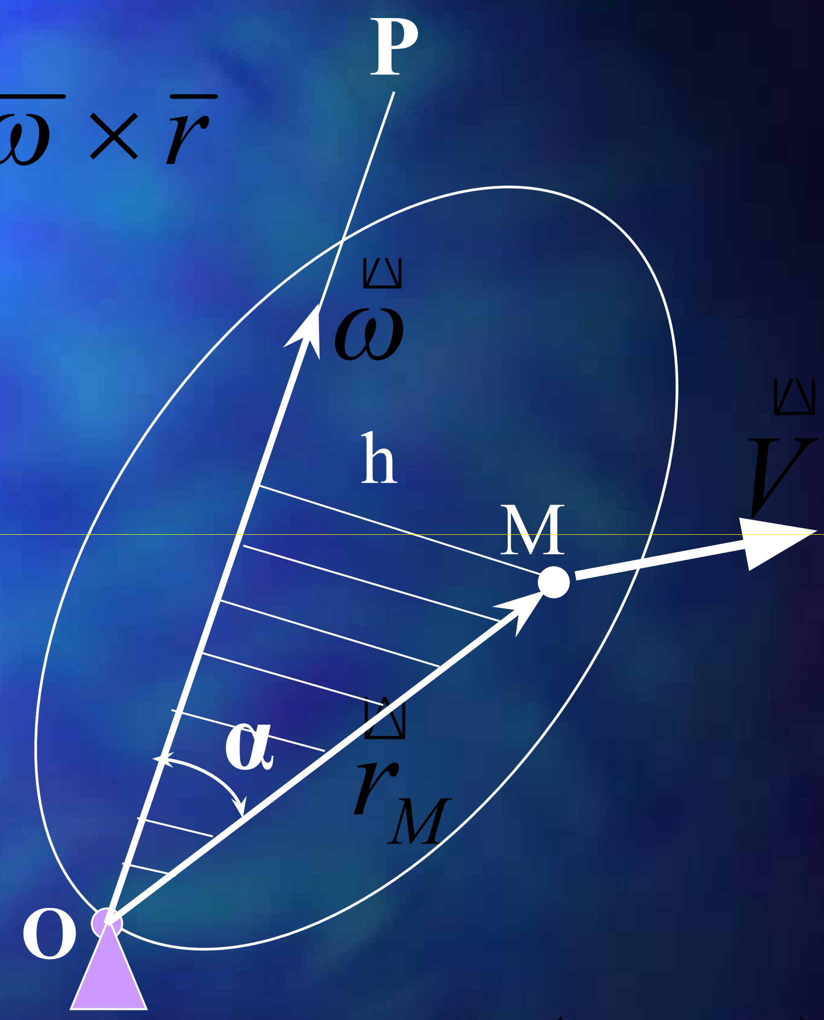


$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Кинематические характеристики точки

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$



$$\left|\overline{\omega} \times \overline{r}\right| = \omega r \sin\alpha = \omega h$$

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \left(\frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt}\right) = \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\omega} \times \overline{V}\right)$$

$$\overline{a}_{\tau} = \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right) \qquad \overline{a}_{n} = \left(\overline{\omega} \times \overline{V}\right)$$

9.5. Движение свободного тела

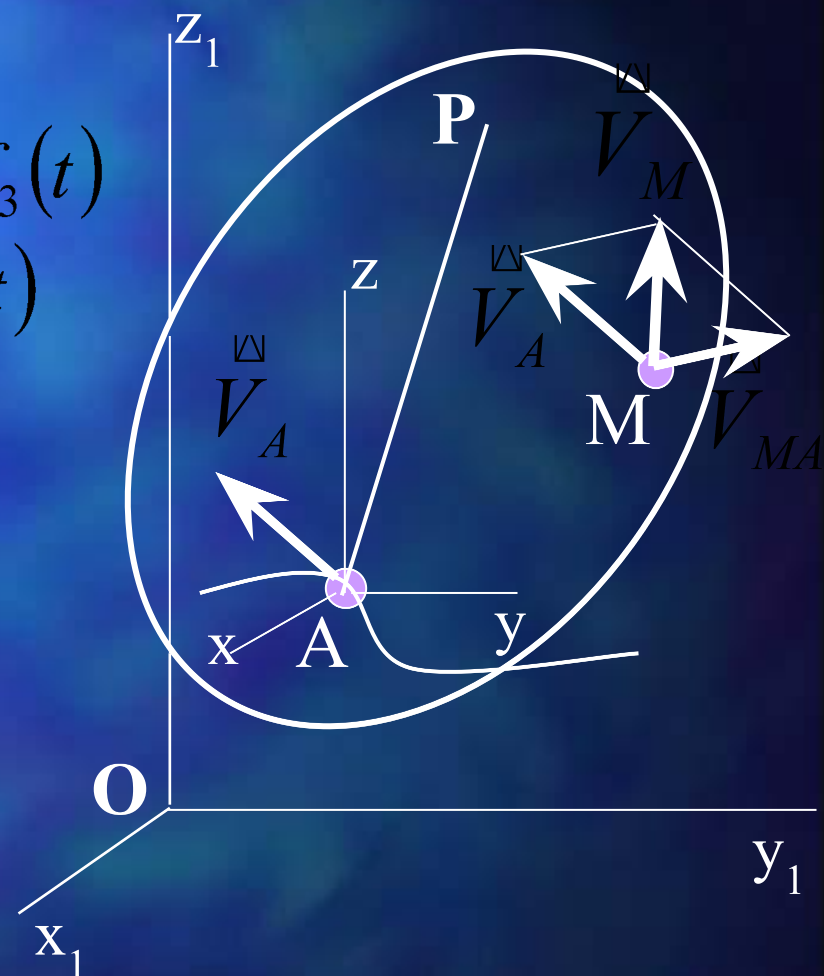
Уравнения движения тела:

$$\begin{cases} x_{1A} = f_1(t) \quad y_{1A} = f_2(t) \quad z_{1A} = f_3(t) \\ \varphi = f_4(t) \quad \psi = f_5(t) \quad \theta = f_6(t) \end{cases}$$

Скорость точки M:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$$

$$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}$$



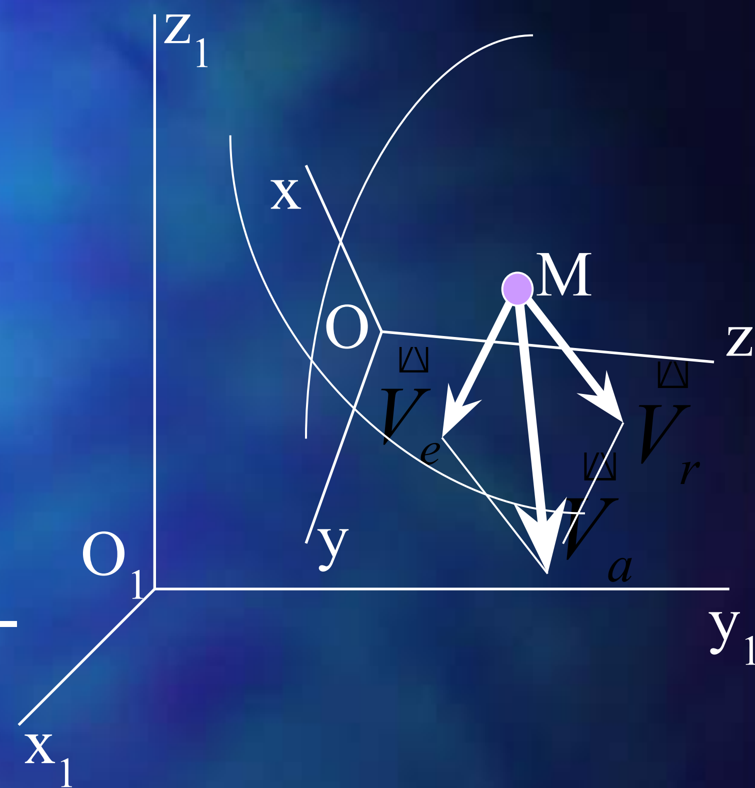
Ускорение точки M:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}$$

$$\bar{a}_{MA} = \left(\bar{\varepsilon} \times \overline{AM}\right) + \left(\bar{\omega} \times \bar{V}_{MA}\right)$$

10. Сложное движение точки

Относительным называется движение точки относительно подвижной системы отсчета



Переносным называется движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета

Сложным (абсолютным) называется движение, являющееся геометрической суммой относительного и переносного движений

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

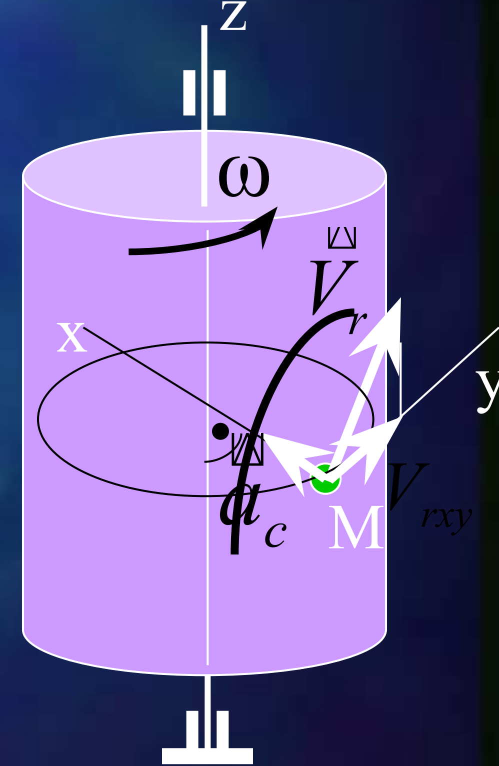
10.2. **Ускорение точки**

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c$$

Ускорение Кориолиса учитывает влияние относительного движения точки на переносную скорость и переносного движения на относительную скорость

$$\overline{a}_c = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r\right) \quad a_c = 2\omega_e V_r \sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r\right)$$

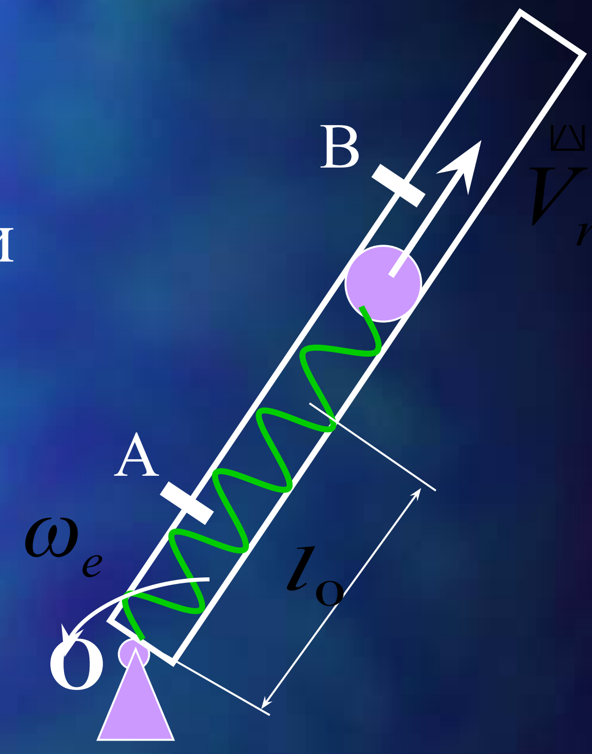
Правило Н.Е.Жуковского: спроектировать вектор относительной скорости, V_r, на плоскость, перпендикулярную оси вращения, и полученную проекцию, V_{rxy}, довернуть в этой же плоскости на 90° по направлению вращения



Случаи $a_c = 0$:

1) $\omega_e = 0$ – подвижная система отсчета движется поступательно;

2) $V_r = 0$ – в относительном движении скорость точки может быть равна нулю, как частное значение;



3) $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r) = 0$ - вектор угловой скорости параллелен вектору относительной скорости.

$$V_{r}\big|_{A,B} = 0$$