Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1,\ a > 0$ называют показательными уравнениями

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{h(x)}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f(x) = h(x)}$$

Методы решения показательных уравнений:

1. *Функционально-графический метод.*
2. *Метод уравнивания показателей.*
3. *Метод введения новой переменной.*

Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4}=64$$

$$2^{2x-4}=2^6$$

$$2x-4=6$$

$$x=5$$

Ответ: 5

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x-3,5=0,5$$

$$x=2$$

Ответ: 2

Пример 3

$$5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$$

$$x^2-3x=3x-8$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

Ответ: 2; 4

Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-2}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0{,}5} : 5^{0{,}5} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2}$$

$$5^{0{,}5-x-0{,}5} = 5 \cdot \left(5^{-2}\right)^{x-2}$$

$$5^{-x} = 5^{1-2x+4}$$

$$5^{-x} = 5^{5-2x}$$

$$-x = 5 - 2x$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 5

$$4^{x} + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$\left(2^{2}\right)^{x} + 2 \cdot 2^{x} - 24 = 0$$

$$\left(2^{x}\right)^{2} + 2 \cdot 2^{x} - 24 = 0$$

Пусть $2^{x} = t$, *где* $t > 0$ *тогда*

$$t^{2} + 2t - 24 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

$t_1 = -6$ *не уд – ет условию* $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^{x} = 4$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Показательные уравнения. Примеры

Пример 6

$$9\cdot 27^{x-\frac{2}{3}}-\frac{2}{81}\cdot 9^{x+2}=9$$

$$9\cdot \frac{27^{x}}{27^{\frac{2}{3}}}-\frac{2}{81}\cdot 9^{x}\cdot 9^{2}=9$$

$$9\cdot \frac{27^{x}}{9}-2\cdot 9^{x}=9$$

$$27^{x}-2\cdot 9^{x}-9=0$$

Пусть $3^{x}=t$, *где* $t>0$, *тогда*

$$t^{3}-2t^{2}-9=0$$

$$t^{3}-3t^{2}+t^{2}-9=0$$

$$t^{2}(t-3)+(t-3)(t+3)=0$$

$$(t-3)(t^{2}+t+3)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t^{2}+t+3=0 - \text{нет корней} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$3^{x}=3$$

$$x=1$$

Ответ: 1.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 7 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1}-13\cdot15^{x}+54\cdot9^{x-1}=0$$

$$5\cdot5^{2x}-13\cdot15^{x}+54\cdot\frac{9^{x}}{9}=0$$

$$5\cdot5^{2x}-13\cdot15^{x}+6\cdot9^{x}=0$$

Разделим на 9^{x}, *тогда*

$$\frac{5\cdot5^{2x}}{9^{x}}-\frac{13\cdot15^{x}}{9^{x}}+\frac{6\cdot9^{x}}{9^{x}}=0$$

$$5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+6=0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=t$, *где* $t>0$, *тогда*

$$5t^{2}-13t+6=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=\frac{3}{5}, \\ t_2=2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=\frac{3}{5} \quad \textit{или} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{x}=2$$

$$x=-1 \qquad\qquad x=\log_{\frac{5}{3}}2$$

Ответ : $-1;\ \log_{\frac{5}{3}}2.$

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$

$0 < a < 1$

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

$$т.к.\ функция\ \ y = 2^t\ \ монотонно$$

$$возрастает\ на\ R,\ то$$

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

$$Ответ:\ \ (5; +\infty)$$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$т.к.\ функция\ \ y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

$$монотонно\ \ убывает\ на\ R,\ то$$

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

$$Ответ:\ \ (2; +\infty)$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 3

$$0{,}5^{x^2-3x} \le 0{,}5^{3x-8}$$

т.к. функция $y=(0{,}5)^t$

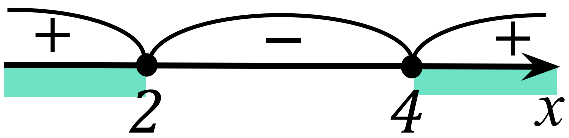
монотонно убывает на R, то

$$x^2-3x \ge 3x-8$$

$$x^2-6x+8 \ge 0$$

н.ф.: $x^2-6x+8=0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$



$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad \Big| : \left(3^{3x}\right), \ т.к. \ 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \ где \ t > 0$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t-1)\left(t^2 + t + 2\right)$$

$т.к. \ t^2 + t + 2 > 0 \ для \ любых \ t, \ то \ t - 1 > 0$

$$t > 1$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

$т.к.\ a = \frac{2}{3} < 1,$ то ф – ция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывает на R

$$x < 0$$

Ответ : $(-\infty;\ 0).$