Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Институт права и национальной безопасности
Факультет таможенного дела

Раздел 1 тема №1

«МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ»

Лекция №1

профессор Резниченко Александр Васильевич

Москва – 2016

Линейная алгебра – часть высшей алгебры, изучающая векторные (линейные) пространства и их подпространства; линейные отображения; линейные, билинейные и квадратичные функции на векторных пространствах.

Исторически первым разделом линейной алгебры была ***теория линейных уравнений****, в связи с необходимостью решением систем которых возникло понятие* ***матрицы*** *и* ***определителя****: в* ***1750 г.*** *получены* ***формулы Крамера****, в* ***1849 г.*** *был разработан* ***метод Гаусса****, для решения систем линейных уравнений.*

Понятие ***ранга матрицы****, предложенное* ***Г.Фробениусом*** *в* ***1877 г.****, позволило явно выразить условия совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах коэффициентов этой системы.*

В ***XX веке*** *центральное пол… …нейной алгебре …- тие векторного пространств… …е с ним поняти… отображения и функций на век… …странстве.*

Габриэль Крамер

Фердинанд Георг Фробениус

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Основные сведения о матрицах
2. Операции над матрицами
3. Определители квадратных матриц и их свойства
4. Обратная матрица. Ранг матрицы

Литература

1. «Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум» / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: "Юрайт", 2016.
2. «Математика для экономистов от ари… эконометрики: базовый курс» / Под ре… Кремера. – М.: "Юрайт", 2016.
3. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. «Кра… высшей математики: Учебное пособие… М.: ООО «Издательство Астрель», 201…

ПЕРВЫЙ ВОПРОС

Основные сведения о матрицах

Определение.

Матрицей размера $m \times n$ (m на n) называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называются ее **элементами**.

Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами, например A, B, C, …, а для обозначения элементов используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где первый индекс i – номер строки, а второй индекс j – номер столбца.

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сокращенная запись

$A_{mn} = [a_{ij}]_{mn}$; $A_{mn} = \| a_{ij} \|_{mn}$;

$A = (a_{ij})$, где $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$.

Пример.

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad a_{21} = 5$$

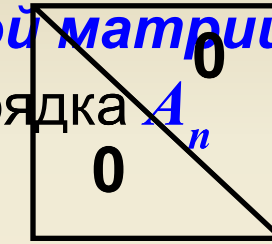
Определение.

Матрица называется ***квадратной***, если число строк m равно числу столбцов n.

Определение.

Квадратная матрица называется ***диагональной***, если все ее элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны **0**.

$$\forall i \forall j \text{ при } i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$



Число n называется ***порядком квадратной матрицы***.

Обозначение квадратной матрицы n-го порядка A_n

Определение.

Множество всех элементов a_{ii} матрицы, у которых номер строки равен номеру столбца ($i = j$), называется ***главной диагональю***.

Определение.

Диагональная матрица называется ***скалярной***, если все ее элементы, принадлежащие главной диагонали, равны одному и тому же числу C.

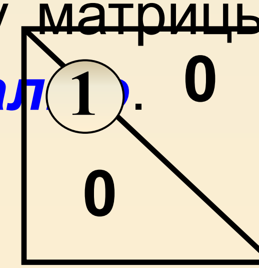
Определение.

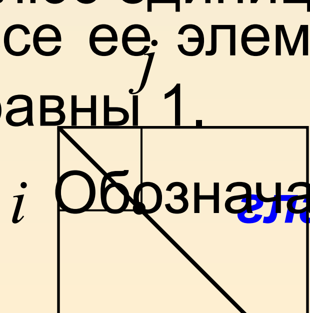
Множество всех элементов a_{ii} квадратной матрицы, у которых сумма номера строки и номера столбца равна порядку матрицы плюс единица ($i + j = n + 1$), называется ***побочной диагональю***.

Определение.

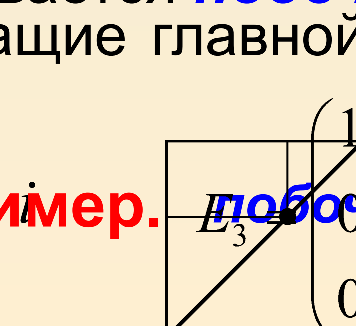
Скалярная матрица называется ***единичной***, если все ее элементы, принадлежащие главной диагонали, равны 1.

Обозначается E_n.





главная диагональ



побочная диагональ

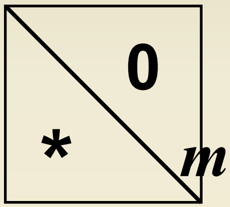
Пример.

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

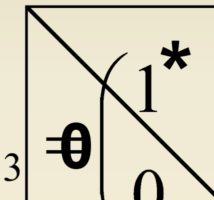
Определение.

Квадратная матрица называется **верхней (нижней) треугольной**, если все ее элементы, находящиеся ниже (выше) главной диагонали, равны **0**.

Прямоугольная матрица называется **верхней трапецеидальной** или **ступенчатой**, если $m<n$ и все ее элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны **0**.



$$A_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&0\\4&-1&2\end{pmatrix}$$



$$A_{2,3}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}$$

$$B_3=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&5\\0&0&1\end{pmatrix}$$

нижняя треугольная матрица

верхняя треугольная матрица

Определение.

Прямоугольная матрица с одним столбцом ($n=1$) называется **вектором-столбцом**, прямоугольная матрица с одной строкой ($m=1$) называется **вектором-строкой**.

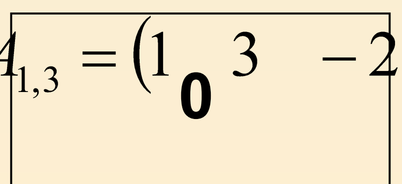
вектор-строка $A_{1,3}=\begin{pmatrix}1&3&-2\end{pmatrix}$;

вектор-столбец $B_{3,1}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Определение.

Матрица любой размерности называется **нулевой** или **нуль-матрицей** если все ее элементы равны **0**.

Обозначается $\mathbf{0}_{mn}$



$$0_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

ВТОРОЙ ВОПРОС

Операции над матрицами

Определение.

Две матрицы одного размера $(m \times n)$ **равны**, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i, j$.

$$A_{mn} = B_{mn} \Leftrightarrow \forall i\,\forall j\;\; a_{ij} = b_{ij}$$

2. Сложение матриц

Суммой двух матриц A и B одинакового размера называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$, т.е. матрицы складываются поэлементно.

$$[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn} \underset{Df}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$.

$$\lambda A_{mn} = \lambda[a_{ij}]_{mn} = [\lambda a_{ij}]_{mn}$$

Пример. Для $A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad 2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Следствие.

Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

3. Вычитание матриц

Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции 1 и 2.

$$[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij}]_{mn} - [b_{ij}]_{mn} \underset{Df}{=} [a_{ij}]_{mn} + (-1)\cdot[b_{ij}]_{mn} = [a_{ij} - b_{ij}]_{mn}$$

Пример.

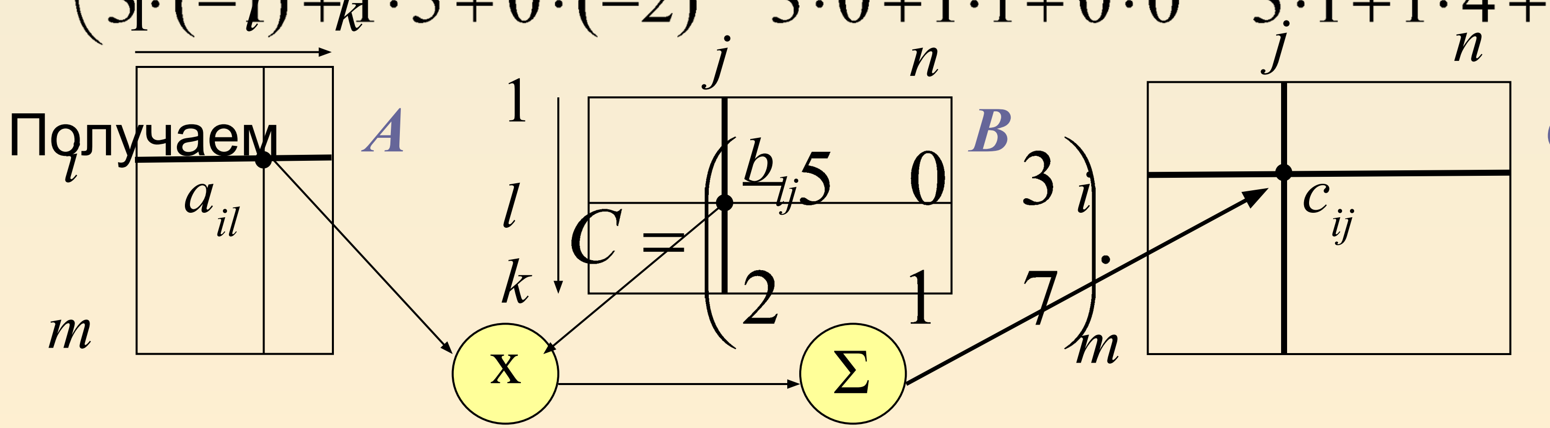
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Умножение матриц

Операция умножения матрицы A на матрицу B определена, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда **произведением** матриц $A_{mk}\cdot B_{kn}$ называется такая матрица C_{mn}, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

$$c_{ij} \overset{Df}{=} \sum_{l=1}^{k} a_{il}\cdot b_{lj} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik}\cdot b_{kj}$$



Пример.

Вычислить произведение матриц $A\cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

Большинство свойств (при соответствующих размерах матриц) аналогичны свойствам операций над числами:

1) $\forall A \forall B \quad A+B=B+A$

2) $\forall A \forall B \forall C \quad A+(B+C)=(A+B)+C$

сложение

3) $\forall \lambda \forall \mu \forall A \ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

4) $\forall \lambda \forall \mu \forall A \ (\lambda+\mu)A=(\lambda A+\mu A)$

умножение на число

5) $\forall \lambda \, \forall A \forall B \quad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ *сложение и умножение на число*

6) $\forall A \forall B \forall C \ A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ *умножение*

7) $\forall \lambda \forall A \forall B \quad \lambda(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B$ *умножение и умножение на число*

8) $\forall A \forall B \forall C \quad A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

сложение и умножение

Специфика операций над матрицами (умножения):

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

Специфика операций над матрицами (умножения):

а) Если произведение матриц $A \cdot B$ существует, то после перестановки сомножителей произведение $B \cdot A$ может и не существовать.

Так $A_{23} \cdot B_{33} = C_{23}$, а умножение $B_{33} \cdot A_{23}$ невозможно.

б) Если произведение матриц $A \cdot B$ и BA существует, то они могут быть матрицами разных размеров

Для $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{2,3} \cdot B_{3,2} = C_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix},$

тогда как $B_{3,2} \cdot A_{2,3} = D_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$ т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

Специфика операций над матрицами (умножения):

в) Если оба произведения матриц AB и BA существуют и оба – матрицы одинакового размера (т.е. A и B квадратные матрицы одного порядка), то *коммутативный (переместительный) закон умножения*, вообще говоря, не выполняется, т.е. $AB \neq BA$.

$$A_{2,2} \cdot B_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 2+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{2,2} \cdot A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+2\cdot 0 & 0\cdot 2+2\cdot 0 \\ 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрицы A и B для которых выполняется *коммутативный закон* называются ***перестановочными***.

Таким образом единичная матрица при умножении матриц играет ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

Специфика операций над матрицами (умножения):

г) Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т.е. из того, что $\boldsymbol{AB}=0$, не следует, что $\boldsymbol{A}=0$ или $\boldsymbol{B}=0$.

Пример. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq 0; B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq 0,$ но $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0.$

д) Если $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AD}$, то из этого равенства еще не следует, что матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ равны.

Пример. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 3 & 1\end{pmatrix},$ т.е $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{D}$,

но $$AB=AD=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 8 & 14\end{pmatrix}.$$

5. Возведение в степень

Целой положительной степенью A^m ($m > 1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A , т.е.

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ раз}}.$$

Замечания.

1. Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

2. $A^0 = E$, $A^1 = A$.

3. $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$; $(A^m)^k = A^{mk}$.

4. Равенство $(A \cdot B)^m = A^m \cdot B^m$ справедливо только для ***перестановочных*** матриц.

Пример. Для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$

6. Транспонирование матрицы

Под этой операцией понимается переход от матрицы A к матрице A'(A^T), в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.

Матрица A' называется ***транспонированной*** относительно матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если матрица A имеет размер $(m\times n)$, то транспонированная матрица A' имеет размер $(n\times m)$.

Свойства операции транспонирования

1. $(A')'=A$; **2.** $(\lambda A)'=\lambda\cdot A'$; **3.** $(A+B)'=A'+B'$; **4.** $(AB)'=B'\cdot A'$.

ТРЕТИЙ ВОПРОС

Определители квадратных матриц

Важнейшей числовой характеристикой **квадратной матрицы** является ее **определитель** (**детерминант**).

В общем случае **определитель матрицы размера** n (A_n) вычисляется как составленная по определенным правилам алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых является произведением n элементов матрицы, причем из каждой строки (и из каждого столбца) матрицы входит в это произведение ровно один элемент.

Обозначения: $\det A_n$, $d(A_n)$, $|A_n|$, Δ_n

Зададим правила вычислений определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков, а затем приведем формулу для вычисления определителя n-го порядка.

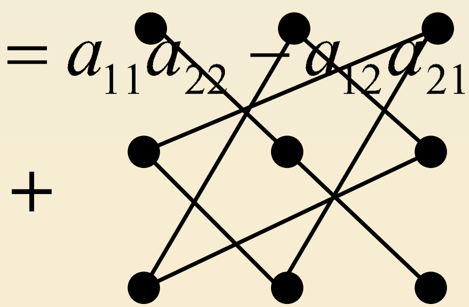
Определители квадратных матриц 1-го и 2-го порядков
Определитель квадратной матрицы 3-го порядка

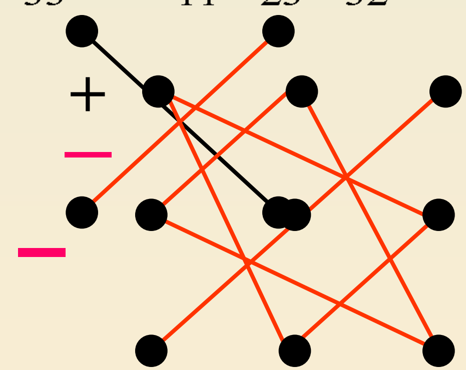
$n = 1.$ $A = (a_{11}) \to \det A = \det(a_{11}) = a_{11}.$

$n = 2.$ Определитель равен разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$





Пример.

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 3\cdot 1 = 7.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 5 + 0\cdot 4\cdot(-2) + 2\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot(-2) - 0\cdot(-1)\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 =$$

$$= 15 + 0 + (-2) - (-12) - 0 - 4 = 21$$

Определитель квадратной матрицы n-го порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Из общего числа n^2 элементов этой матрицы выберем набор, содержащий n элементов, таким образом, чтобы в него входило по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца.

Упорядочим набор, записав сначала элемент из первой строки, затем из второй и т.д.:

$$(a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}).$$

Номера столбцов $(j_1; j_2; \dots; j_n)$ образуют при этом ***перестановку J*** из n чисел: 1,2,3,…, n .

Определитель квадратной матрицы n-го порядка

Определение.

Инверсией (**беспорядком**) ***в перестановке J*** называется наличие пары чисел, в которой большее число предшествует меньшему.

Пример.

В перестановке J = (2, 1, 3) имеется одна инверсия (2, 1), а в перестановке J = (3, 2, 1) – три: (3, 2), (3, 1) и (2, 1).

Каждому из вышеуказанных наборов элементов матрицы A_n поставим в соответствие произведение его элементов

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

и число $r(J)$, равное числу инверсий в перестановке $J = (j_1; j_2; \ldots; j_n)$ из номеров соответствующих столбцов матрицы A_n.

Определитель квадратной матрицы n-го порядка

Определение.

Определителем квадратной матрицы n-го порядка или **определителем n-го порядка** называется число, равное алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак каждого члена определяется как $(-1)^{r(J)}$, где $r(J)$ – число инверсий в перестановке J из номеров столбцов элементов матрицы, если при этом номера строк записаны в порядке возрастания:

Пример.

$$\Delta_3 = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+ (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определение.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из A удалением i-ой строки и j-го столбца.

Пример.

Минор элемента a_{12} матрицы A_3

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Определение.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)) = -1.$$

Теорема Лапласа

Определитель квадратной матрицы A n-го порядка равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

Пьер-Симон де Лаплас

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot A_{is}$$

разложение по элементам i-ой строки; i = 1,2, …, n;

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \cdot A_{sj}$$

разложение по элементам j-ого столбца; j = 1,2, …, n.

Вычисление определителя квадратной матрицы разложением по строке (столбцу)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(3\cdot 5 - 1\cdot 4) + 0 + 2\cdot((-1)\cdot 1 - 3\cdot(-2)) = 11 + 10 = 21.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 5\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 5\cdot 1\cdot 3\cdot 1 + 0 = 15.$$

Определитель удобно вычислять по строке или столбцу, содержащему наибольшее число нулей.

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению элементов, принадлежащих главной диагонали.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель тоже равен нулю.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель тоже умножится на λ.

Замечание.

За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех ее элементов.

3. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется: $|A^T| = |A|$. ***Свойства строк и столбцов одинаковы.***

4. При перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5. Если матрица содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

6. Если элементы двух строк матрицы пропорциональны, ее определитель равен нулю.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю.

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки, предварительно умноженные на одно и то же число.

9. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной матрицы заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей

$$\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})\cdot\det(\boldsymbol{B}).$$

ЧЕТВЕРТЫЙ ВОПРОС

Обратная матрица.
Ранг матрицы

Определение.

Матрица A^{-1} называется ***обратной по отношению к квадратной матрице A***, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E.$$

Замечание.

Очевидно, что по правилам умножения матриц A^{-1} и E должны быть квадратными матрицами порядка n.

Так как умножение матриц некоммутативно, докажем совпадение левой и правой обратных матриц, умножаемых слева и справа на A:

$$A_{л}^{-1} = A_{л}^{-1}\cdot E = A_{л}^{-1}\cdot(A\cdot A_{п}^{-1}) = (A_{л}^{-1}\cdot A)\cdot A_{п}^{-1} = E\cdot A_{п}^{-1} = A_{п}^{-1}$$

Определение.

Если определитель матрицы отличен от нуля ($|A|\neq 0$), то такая квадратная матрица называется ***невырожденной*** или ***неособенной***, в противном случае (при $|A| = 0$) – ***вырожденной*** или ***особенной***.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы).

Обратная матрица A^{-1} существует (и единственная) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$$

где $\widetilde{A}$ - ***присоединенная матрица***, элементы $\widetilde{a}_{ij}$ которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A^T, транспонированной к исходной матрице A.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_{11} = 5; \; A_{12} = -2; \; A_{21} = -3; \; A_{22} = 1; \quad \Rightarrow \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы.

Если $|\boldsymbol{A}| = 0$, то матрица $\boldsymbol{A}$ вырожденная и обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ не существует. Если $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, то матрица $\boldsymbol{A}$ невырожденная и обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ существует.

2. Находим матрицу $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, транспонированную к $\boldsymbol{A}$.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A_{ij}^{T} = A_{ji}$ ($\boldsymbol{i} = 1,2, \ldots, \boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{j} = 1,2, \ldots, \boldsymbol{n}$) и составляем из них присоединенную матрицу $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{a}_{ij} = A_{ij}^{T} = A_{ji} \quad (i = 1,2, \ldots, n;\ j = 1,2, \ldots, n)$$

4. Вычисляем обратную матрицу.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$, исходя из ее определения: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$. (п.5 необязателен).

Альтернативный алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Любую невырожденную квадратную матрицу ***A*** с помощью ***элементарных преобразований*** только столбцов или только строк можно привести к единичной матрице ***E*** того же порядка.

2. Те же преобразования, совершенные над матрицей ***E*** в том же порядке, приводят ее к обратной матрице A^{-1}.

3. Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами ***A*** и ***E*** одновременно, записывая их рядом через черту.

Замечание.

К ***элементарным преобразованиям матриц*** относятся:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).

2. Умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю.

3. Изменение порядка строк (столбцов).

4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5. Транспонирование матрицы.

Пример.

Найти матрицу, обратную к матрице ***A***, используя преобразования исходной матрицы к единичной ***E***:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Определитель матрицы $|A| = -20 \neq 0$ и, следовательно, матрица ***A*** имеет обратную.

Запишем обе матрицы рядом:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Поменяем местами **1**-й и **2**-й столбцы.

Затем к элементам **3**-го столбца прибавим элементы **1**-го, а к элементам **2**-го – **1**-го, умноженные на (-2).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Получим:

К элементам **1**-го столбца прибавим элементы **2**-го, умноженные на (-2), а к элементам **3**-го столбца — умноженные на (-6).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Далее в полученной матрице к элементам **1**-го и **2**-го столбцов прибавляем элементы **3**-го, умноженные на (-1):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -15 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение.

Минором порядка k матрицы A размера $m \times n$ называется определитель матрицы, полученной из ***A*** выделением произвольных ***k*** ее строк и ***k*** столбцов.

Определение.

Рангом матрицы A (***rang A*** или ***r*** (***A***)) называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \det A = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 11; \quad r(A) = 2$$

Пример.

Вычисление ранга матрицы

1. Ранг диагональной матрицы равен числу элементов диагонали, отличных от нуля.

2. Ранг верхней треугольной матрицы, в которой все элементы главной диагонали, не равны 0, равен числу строк.

3. Ранг прямоугольной матрицы удобно вычислить, приведя ее элементарными преобразованиями к ***ступенчатому*** виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \neq 0$; $i = 1, \dots, r$; $r \leq k$.

Ранг ступенчатой матрицы равен r .

Пример.

Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -6 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрица *A* имеет размер **4**x**3**, значит, $r(A)\le 3$. С помощью элементарных преобразований, не меняющих ранг матрицы, приведем матрицу *A* к ступенчатому виду.

1. Транспонируем матрицу *A*:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -2 & -9\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -2 & 9\end{pmatrix}.$$

2. Умножим элементы **1**-й строки на (-1), сложим ее со **2**-й и **3**-й строками матрицы.

В новой матрице поменяем местами **2**-ю и **3**-ю строки.

3. Умножим элементы **2**-й строки на -3 и сложим с элементами **3**-й строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \end{pmatrix} \cdot (-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу размера **3** x **4**, у которой 3 ненулевых элемента на главной диагонали, значит, $r(A) = 3$.

Эта матрица имеет ненулевой минор 3-го порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ (НЕЗАВИСИМОСТЬ) СТРОК (СТОЛБЦОВ) МАТРИЦЫ

Определение.

Строки (столбцы) матрицы A_{mn} $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = 0,$$

где $e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \; i = 1 \div m$; $0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

В противном случае строки матрицы называются ***линейно зависимыми***.

Теорема о ранге матрицы:

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все ее остальные строки (столбцы).

Пример.

Выяснить, при каком значении параметра a матрица ***A*** имеет 3 линейно независимые строки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрица ***A*** имеет 3 линейно независимые строки, если ее ранг равен 3, т.е. $|A| \neq 0$.

Вычислим определитель матрицы ***A*** по правилу треугольников:

$$|A| = -a - 6 + 8 = 2 - a; \quad |A| \neq 0, \text{ откуда } a \neq 2.$$

Таким образом при всех значениях a, кроме $a = 2$, все строки матрицы линейно независимы.

Благодарю за внимание, лекция окончена!