$\sqrt[n]{x}$

«Путешествие в мир иррациональных уравнений».

$\sqrt[n]{x}$

Разработала преподаватель ГБОУ СПО «КТТ» Сарычева С.В.

Маршрут урока:

1. Начало истории иррациональных чисел

2. Понятие иррационального уравнения

3. Основные приемы решения иррациональных уравнений.

4. Методы решения иррациональных уравнений.

5. Примеры решения уравнений различными методами .

6. Примеры для самостоятельного решения.

Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится **под знаком корня (радикала)** или **под знаком операции возведения в дробную степень.**

Примеры иррациональных уравнений:

Основная идея при решении уравнений данного типа – это **освобождение их от иррациональности**.

Ее можно достичь путем **совместного возведения обеих частей** в нужную степень.

$$\sqrt[3]{5 + x} = \sqrt[3]{x}$$

$$\left(\sqrt[3]{5 + x}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$$

Либо путем извлечения корня из соответствующей степени выражения.

$$(7x+3)^{\frac{1}{3}}=(4-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{(7x+3)^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{(4-x)^{\frac{1}{3}}}$$

При возведении обеих частей уравнения в нечетную степень (3,5,7,..) выполняется

равносильное

преобразование уравнения, поэтому

посторонние решения не появляются!

Пример решения уравнения: $\sqrt[3]{x^2+2x}=\sqrt[3]{x}$

$$\left(\sqrt[3]{x^2+2x}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$$

$$x^2+2x=x$$

$$x^2-x=0$$

$$x\cdot(x-1)=0$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad x=1$$

Ответ: 0; 1.

Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень является <u>неравносильным</u> преобразованием уравнений, поэтому в решении <u>могут</u> появляться посторонние корни.

Для отсеивания посторонних корней необходимо выполнять *проверку* или *находить ОДЗ*.

Рассмотрим примеры решения подобных уравнений:

$$1.\ \sqrt{5x-9}=3-x$$

$$2.\ \sqrt{3x-2}=5-x$$

$$1.\ \sqrt{5x-9}=3-x$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{5x-9}^{\,2}=(3-x)^2$$

$$5x-9=9-6x+x^2$$

$$x^2-11x+18=0$$

$$x_1=2, \qquad x_2=9$$

Выполним проверку:

1. $x_1 = 2$, то $\sqrt{5 \cdot 2 - 9} = 1$

и $3 - 2 = 1, 1 = 1.$

2. $x_2 = 9$, то $\sqrt{5 \cdot 9 - 9} = 6$

и $3 - 9 = -6, 6 \neq -6.$

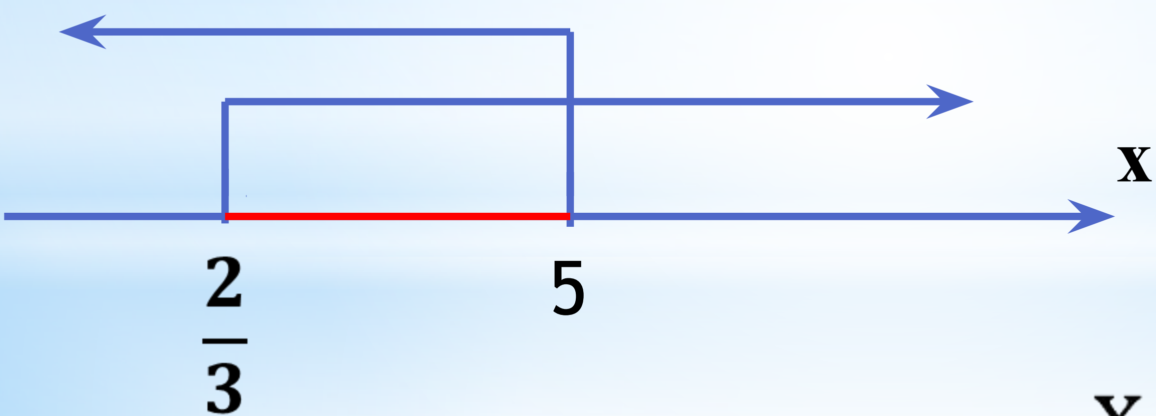
Значит, x_2 не является корнем данного уравнения.

Ответ: 2.

2. $\sqrt{3x-2} = 5 - x$

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, \\ 5 - x \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \dfrac{2}{3}, \\ x \leq 5. \end{cases}$$



$$x \in \left[\frac{2}{3}; 5\right]$$

Аналогично рассмотренному примеру возведем обе части уравнения в квадрат и решим уравнение:

$$3x - 2 = 25 - 10x + x^2$$

$$x^2 - 13x + 27 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{61}}{2}$$

Пусть $x_2 > x_1$, тогда оценка корней показывает, что

$$2,5 < x_1 < 3,5$$

$$9,5 < x_2 < 10,5$$

Поэтому x_2 корнем данного уравнения не является

Ответ: $\frac{13 \pm \sqrt{61}}{2}$.

В случае извлечения нечетных корней (n=3,5,..) преобразование вида $\sqrt[n]{f^n(x)}$=f(x) является всегда <u>равносильным</u>, поэтому посторонних корней <u>не</u> появляется.

При извлечении корня четной степени (n=2,4,…) результат необходимо брать по модулю $\sqrt[n]{f^n(x)} = |f(x)|$, так как по определению результат выполнения данной операции должен быть неотрицательным числом.

Также при решении иррациональных уравнений необходимо учитывать не равносильность преобразований корня четной степени вида:

$$\sqrt[n]{f(x)\cdot g(x)} = \sqrt[n]{f(x)}\cdot\sqrt[n]{g(x)}$$

- разбиение корня

$$\sqrt[n]{f(x)}\cdot\sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{f(x)\cdot g(x)}$$

- слияние корней

При разбиении подкоренного выражения возможна *потеря корней из-за сужения ОДЗ.*

Для того, чтобы предотвратить возможную потерю корней из-за сужения ОДЗ исходного выражения необходимо наряду с разбиением вида

$$\sqrt[n]{f(x)\cdot g(x)}=\sqrt[n]{f(x)}\cdot\sqrt[n]{g(x)}$$

рассмотреть и второй его вариант

$$\sqrt[n]{f(x)\cdot g(x)}=\sqrt[n]{-f(x)}\cdot\sqrt[n]{-g(x)}\ .$$

При слиянии корней возможно *получение посторонних корней из-за расширения исходного ОДЗ*.

Посторонние корни, которые появляются при слиянии корней из-за расширения ОДЗ отбрасывают при их проверке подстановкой в исходное уравнение.

Алгоритм решения иррациональных уравнений основными методами:

1. **Найти ОДЗ или после нахождения корней уравнения выполнить проверку.**

2. **Возвести в одну и ту же степень обе части уравнения.**

3. **Решить полученное уравнение.**

4. **Записать ответ.**

Методы решения иррациональных уравнений:

1. Уединение корня в одной из частей уравнения, а потом возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

2. Введение новой переменной и решение полученного уравнения любым из известных методов.

3. Умножение на сопряженное выражение.

4. Метод применения свойств функции.

5. Уравнения приводимые к уравнениям с модулями.

6. Искусственные приемы решения иррациональных уравнений.

Уединение корня в одной из частей уравнения, а потом возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

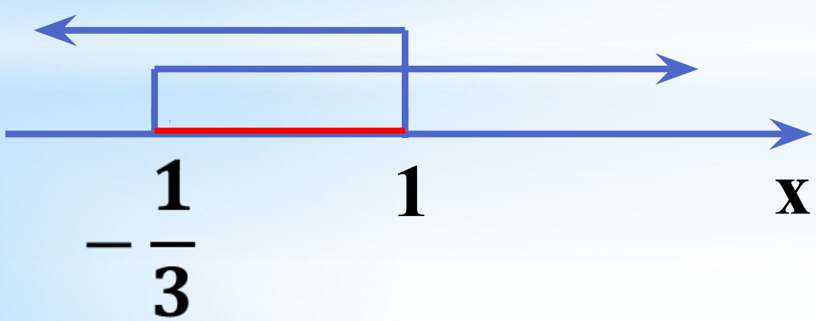
Решить уравнение: $3x = -1 + \sqrt{1 - x}$.

Преобразуем уравнение, оставив корень в правой части равенства:

$$3x + 1 = \sqrt{1 - x}$$

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0, \\ 1 - x \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 1. \end{cases}$$



$$x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

Возведем обе части в квадрат и приравняем уравнение к нулю.

$$(3x+1)^2 = \left(\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 1 - x$$

$$9x^2 + 7x = 0$$

$$x \cdot (9x+7) = 0$$

$x_1 = 0$ или $x_2 = -\frac{7}{9}$ - **посторонний корень, так как** $-\frac{7}{9} < -\frac{1}{3}$.

<u>Ответ: 0.</u>

Введение новой переменной и решение полученного уравнения любым из известных методов.

Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$$

Пусть $u = x^2 - x,$ **тогда уравнение принимает вид:**

$$\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}.$$

Возведем обе части уравнения дважды в квадрат и преобразуем его:

$$u + 2 + 2\sqrt{u + 2} \cdot \sqrt{u + 7} + u + 7 = 2u + 21$$

$$\sqrt{(u+2)\cdot(u+7)} = 6$$

$$u^2 + 9u - 22 = 0$$

$$u_1 = 2, \qquad u_2 = -11$$

Подстановка корней в уравнение показывает, что $u_2 = -11$ посторонний корень.

Возвращаясь к исходной переменной получаем уравнение:

$$x^2 - x = 2 \qquad x_1 = 2, \qquad x_2 = -1.$$

Ответ: -1; 2.

Умножение на сопряженное выражение.

Решить уравнение:

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

Умножим обе части уравнения на выражение сопряженное выражению, стоящему в левой части данного уравнения. Учитывая, что подкоренные выражения имеют смысл при $x \in (-\infty; +\infty)$, **получаем:**

$$\left(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)=$$
$$=\left(2x^2+3x+5\right)-\left(2x^2-3x+5\right)=6x$$

Итак, левая часть уравнения равна 6x, значит наше уравнение принимает вид:

$$6x = 3x \cdot \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}\right)$$

то есть оно имеет решения, если:

$$x \cdot \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}\right) = 0,$$

при этом замечаем, что $x_1 = 0,$ или

$$\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}\right) = 2.$$

Для упрощения решения, сложим полученное и исходное уравнения, в итоге получаем уравнение следствие:

$$2\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 3x + 2.$$

Решаем его методом возведения в квадрат обеих частей уравнения и получаем: $x_2 = -4$, $x_3 = 4$.

Выполнив проверку, поочередно подставляя, найденные значения $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$

в заданное уравнение , убеждаемся, что ему удовлетворяет только значение $x_3 = 4$.

Ответ: 4.

<u>*Метод применения свойств функции.*</u>

№ 1. Решить уравнение: $\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}=6$.

Для решения воспользуемся свойствами монотонности функции: сумма двух возрастающих функций является возрастающей функцией и всякая монотонная функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента.

(При решении данного уравнения обычным методом необходимо будет дважды обе части уравнения возводить во вторую степень).

Функции $y=\sqrt{x+11}$ **и** $y=\sqrt{x-1}$ **- возрастающие, поэтому их сумма также возрастающая функция.**

Значит, данное уравнение, если имеет корень, то только один. Подбором легко найти, что x=5.

<u>Ответ: 5.</u>

Метод применения свойств функции.

№ 2. Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}\ .$$

(Попытка решить данное уравнение основными методами к успеху не приведет.)

Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 3-x\geq 0); \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1, \\ x\leq 3; \end{cases} \quad \Bigg| \quad 1\leq x\leq 3.$$

Значит, данное уравнение, имеет корни только из данного промежутка. Проверяя целые значения (1,2,3) , находим, что x=2.

Докажем, что уравнение не имеет других корней.

На отрезке $[1;3]$ функция

$y=\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}$ **является возрастающей,**

а функция $y=4+\sqrt{3-x}$- убывающей, поэтому уравнение имеет единственный корень: x=2.

Ответ: 2.

Уравнения приводимые к уравнениям с модулями.

Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 8x + 16} = 11.$$

Каждое подкоренное выражение можно свернуть, как квадрат двучлена:

$$\sqrt{(x - 3)^2} + \sqrt{(x + 4)^2} = 11$$

$$|x - 3| + |x + 4| = 11$$

При $x < -4$ **уравнение принимает вид:**

$$-(x - 3) - (x + 4) = 11, \quad \text{откуда} \quad x = -6.$$

При $x < -4$ **уравнение принимает вид:**

$$-(x-3)-(x+4)=11,$$ **откуда** $x=-6.$

При $-4 \le x < 3$ **уравнение принимает вид:**

$$-(x-3)+(x+4)=11$$ **и не имеет корней.**

При $x \le 3$ **уравнение принимает вид:**

$$x-3-x+4=11,$$ **откуда** $X=5.$

<u>**Ответ: -6; 5.**</u>

Искусственные приемы решения иррациональных уравнений.

Решить уравнение:

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1,5(x+4).$$

Уединение корня и возведение обеих частей уравнения в квадрат привело бы к громоздкому уравнению. Но, если внимательно посмотреть, то можно заметить, что уравнение легко сводится к квадратному, если его обе части умножить на 2. Получаем:

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12,$$

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8=0.$$

Введем новую переменную, пусть

$$y=\sqrt{2x^2-3x+2}.$$

Получаем квадратное уравнение $y^2-2y-8=0.$

Его корни: $y_1=4,\ y_2=-2.$

Значит, исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-3x+2}=4,\\ \sqrt{2x^2-3x+2}=-2.\end{array}\right.$$

Второе уравнение корней не имеет, а из первого следует, что корни уравнения равны:

$$x_1 = 3,5; \quad x_2 = -2.$$

Так как совокупность уравнений равносильна начальному уравнению, причем уравнение два корней не имеет, то найденные корни можно проверить подстановкой в первое уравнение совокупности.

Эта подстановка показывает, что оба значения х являются корнями этого уравнения, а значит и заданного уравнения.

Ответ: -2; 3,5.

Примеры для самостоятельного решения дома:

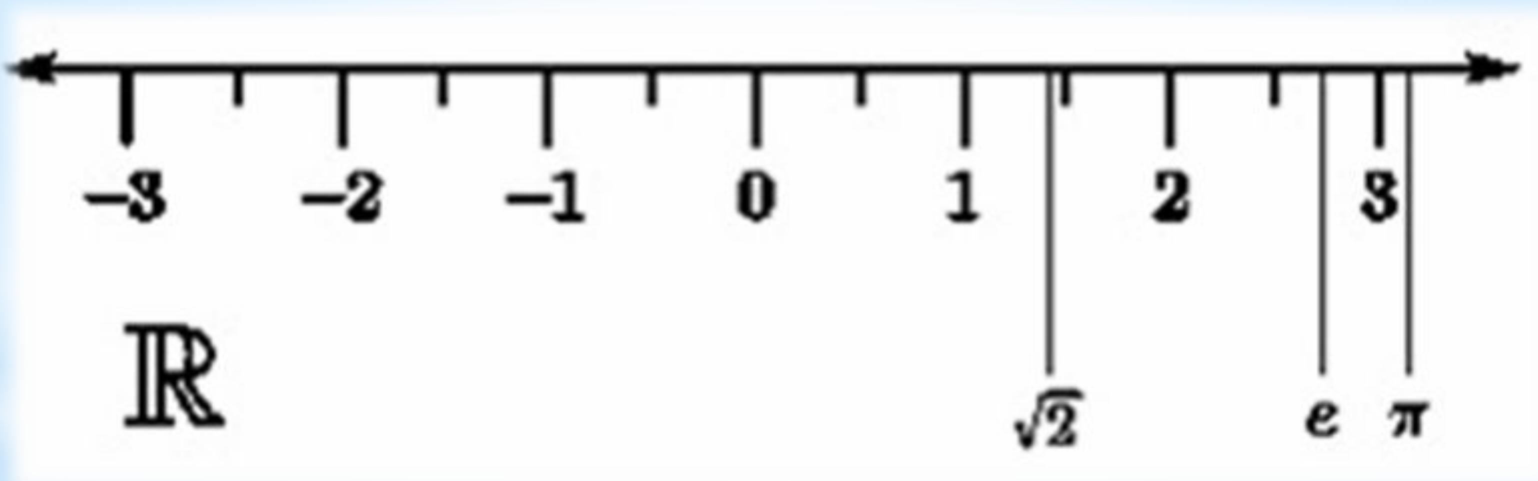
$$1.\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5.$$

$$2.\ \sqrt{x-1}=3-x.$$

$$3.\ \sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2+5x-5}=-7.$$

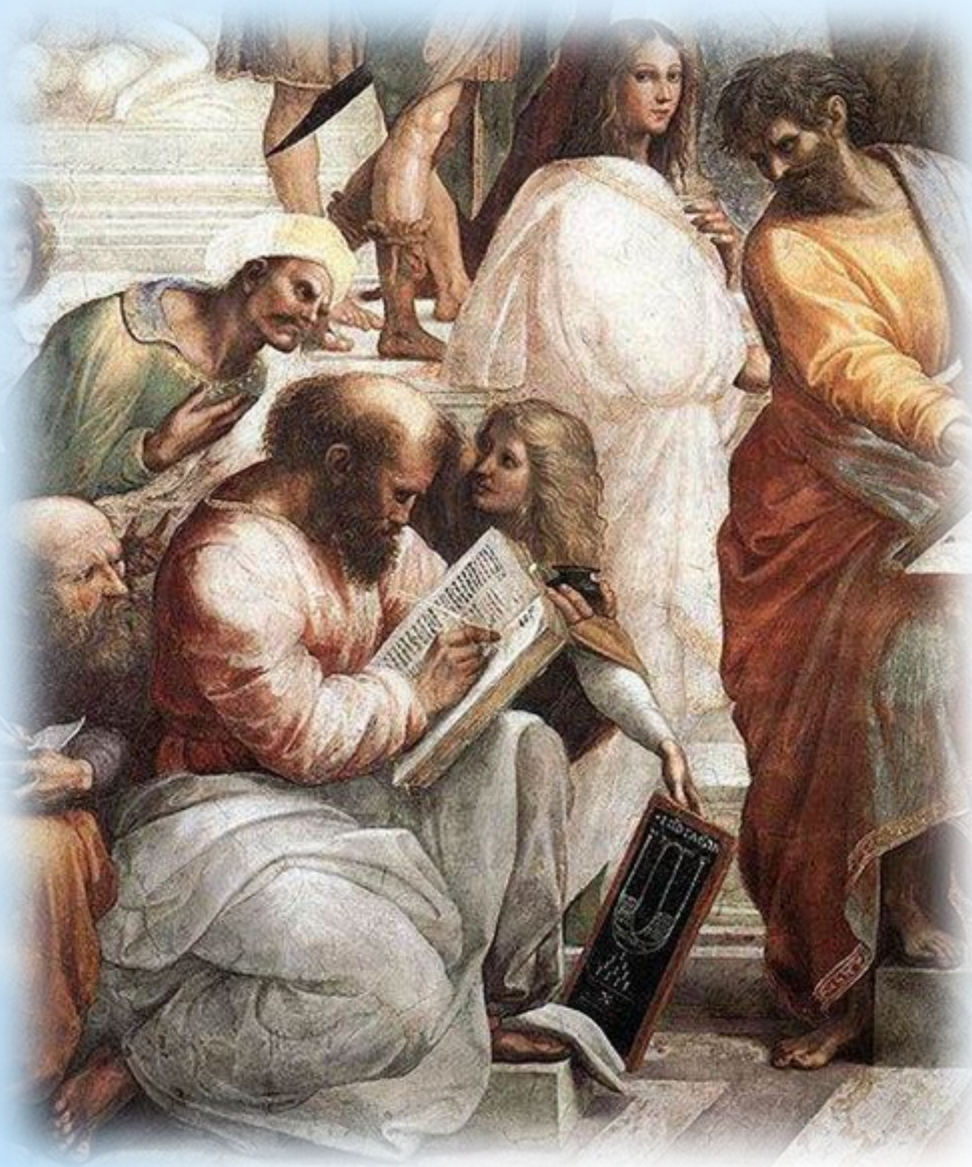
$$4.\ \sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{4x^2-12x+9}=4.$$

Если натуральные числа возникли в процессе счета, а рациональные — из потребности оперировать частями целого, то вещественные числа предназначены для измерения непрерывных величин. Расширение запаса рассматриваемых чисел привело к множеству вещественных чисел, которое помимо чисел рациональных включает также другие элементы, называемые иррациональными числами.



Концепция иррациональных чисел была неявным образом воспринята индийскими математиками в VII веке до нашей эры, когда Манава (ок. 750 г. до н. э. — ок. 690 г. до н. э.) выяснил, что квадратные корни некоторых натуральных чисел, таких как 2 и 61, не могут быть явно выражены.

Иррациона́льное число́ — это вещественное число которое не является рациональным, то есть не может быть представлено в виде дроби, где числитель и знаменатель является целым числом (причем знаменатель не равен нулю)



Первоначально термины “рациональный” и “иррациональный” относились не к числам, а к соизмеримым и соответственно не соизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли выразимыми и невыразимыми.

Несоизмеримые величины, были названы еще в древности иррациональны ми.

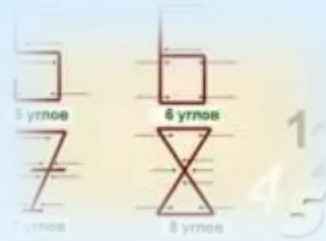
Гиппас из Метапонта
(ок. 500 гг. до н. э.)

Первое доказательство существования иррациональных чисел приписывается Гиппасу, пифагорейцу, который нашёл это доказательство, изучая длины сторон пентаграммы. Гиппас обосновал, что не существует единой единицы длины.

Он показал, что если гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника содержит целое число единичных отрезков, то это число должно быть одновременно и четным, и нечетным.

Существует легенда, что Гиппас совершил открытие, находясь в морском походе, и был выброшен за борт другими пифагорейцами «за создание элемента вселенной, который отрицает доктрину, что все сущности во вселенной могут быть сведены к целым числам и их отношениям».

Открытие Гиппаса поставило перед пифагорейской математикой серьёзную проблему, разрушив лежавшее в основе всей теории предположение, что числа и геометрические объекты едины и неразделимы.



Математики Индии, Ближнего и Среднего Востока, развивая алгебру, тригонометрию и астрономию, не могли обойтись без иррациональных величин, которые, однако, длительное время не признавали за числа.

1	I	100	C
5	V	500	D
10	X	1000	M
50	L	2000	Z

Махмуд
Дин ал-Каши
Рене Декарта
Симон Стевин

В современных учебных руководствах основа определения иррационального числа опирается на идеи ал-Каши, Стевина и Декарта об измерении отрезков и о неограниченном приближении к искомому числу с помощью бесконечных десятичных дробей. Однако обоснованием свойств действительных чисел и полная теория их была разработана лишь в XIX в.

Не все знают, что современная форма $\sqrt{x}$ появилась не сразу. Эволюция знака радикала длилась почти пять веков, начиная с далекого 13 века. Когда итальянские и некоторые европейские математики впервые назвали квадратный корень латинским словом Radix (корень) или сокращенно R.

Современный знак корня произошел от обозначения, примяемого немецкими математиками XV-XVI вв.:

Скорее всего, в последствии от таких обозначений как раз и образовался знак V, близкий по записи к знакомому школьникам современному знаку, но без верхней черты.

Автором этого знака был преподаватель математики из Вены, уроженец Чехии Криштоф Рудольф. Эти знаком пользовались А.Жирар, С. Стевин

V (2) или V (3).

В 1626г. нидерландский математик А. Жирар видоизменил знак корня Рудольфа и ввел совсем близкое к современному обозначение

Такая форма записи начала вытеснять прежний знак R. Однако некоторое время знак корня писали разрывая верхнюю черту, а именно так:

$$V\,\overline{a+b}$$

И только в 1637 году Рене Декарт соединил горизонтальную черту с галочкой, применив новое обозначение в своей книге «геометрия».

Блиц опрос.

1. **Какие уравнения называются иррациональными?**

2. Какой метод является основным при решении иррациональных уравнений?

3. Всегда ли необходимо выполнять проверку или находить ОДЗ?

4. Какие еще методы решения иррациональных уравнений вы запомнили?

Используемые источники:

1. http://www.gov.uz/ru/helpinfo/science/245

2. http://ru.wikipedia.org/wiki/Заглавная_страница

3. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов «Алгебра и начала анализа 11 класс», профильный уровень, часть 1; Москва; «Мнемозина»; 2007 г.

4. Ю. Н. Макарычев «Алгебра 9«, дополнительные главы к школьному учебнику, учебное пособие для учащихся школ с углубленным изучением математики; Москва; Просвещение; 1997 г.

5. http://www.ankolpakov.ru/2011/03/04/o-znake-kvadratnogo-kornya/