# Модель принятия решений. Модель объекта.

Вектор параметров

$$y=(y_1, y_2, \dots, y_N) \qquad (1)$$

$N \geq 1$ - размерность модели

Вектор-функция характеристик

$$W(y)=(W_1(y), W_2(y), \dots, W_n(y)) \qquad (2)$$

Лучше, когда меньше.

# Модель принятия решений. Координатные ограничения.

Координаты вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ изменяются в заданных пределах, определяемых векторами начала и конца

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_N), \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_N), \qquad (3)$$

где $a_i, b_i, 1 \le i \le N,$ - константы, причем , возможно

$$a_i = -\infty \;\; и / или \;\; b_i = +\infty$$

Гиперпараллелепипед возможных значений вектора $y$

$$D = \{y \in R^N : a_i \le y_i \le b_i, 1 \le i \le N\} \qquad (4)$$

# Модель принятия решений. Функциональные ограничения.

Задается множество индексов

$$G = \{j_1, \dots, j_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \qquad (5)$$

и набор допусков $q_i, 1 \le i \le m.$

Для характеристик $W_{j_i}(y)$ с номерами $j_i \in G$ ставится условие непревышения соответствующих допусков $q_i,$ т.е. вводятся ***функциональные ограничения***

$$W_{j_i}(y) \le q_i, \; j_i \in G. \qquad (6)$$

**Определение.** Вектор $y \in D,$ удовлетворяющий неравенствам (6), называется ***допустимым вектором (допустимой точкой)***.

# Модель принятия решений. Функциональные ограничения.

Введем обозначения

$$g_i(y) = W_{j_i}(y) - q_i, 1 \le i \le m, \quad (7)$$

Тогда

$$g_i(y) \le 0, 1 \le i \le m. \quad (8)$$

Допустимая область

$$Q = \{y \in D : g_i(y) \le 0, 1 \le i \le m\}. \quad (9)$$

Если $m = 0$, то $Q = D$.

# Модель принятия решений. Частичная вычислимость.

Введем семейство вложенных множеств

$$Q_1 = D, Q_{i+1} = \{y \in Q_i : g_i(y) \le 0\} \quad (10)$$

Очевидно, что

$$Q_{m+1} = Q \quad и \quad Q_{m+1} \subseteq Q_m \subseteq \dots \subseteq Q_2 \subseteq Q_1 = D.$$

**Определение**. Ограничения (7) называются ***полностью вычислимыми***, если все функции $g_i(y), 1 \le i \le m,$ определены и вычислимы в множестве $D$.

**Определение**. Ограничения (7) называются ***частично-вычислимыми***, если каждая функция $g_i(y), 1 \le i \le m,$ определена и вычислима в соответствующем множестве $Q_i$.

# Модель принятия решений. Векторный критерий эффективности.

Зададим множество индексов

$$F = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad (11)$$

и введем вектор-функцию

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_k(y)), \qquad (12)$$

где

$$f_s(y) = W_{i_s}(y),\ i_s \in F. \qquad (13)$$

Вектор-функция (12) называется ***векторным критерием эффективности***. В модели с частичной вычислимостью все частные $f_s(y), 1 \le s \le k$, критерии

могут быть определены только в области $Q_{m+1} = Q.$

В общем случае допускается $G \cap F \neq \varnothing.$

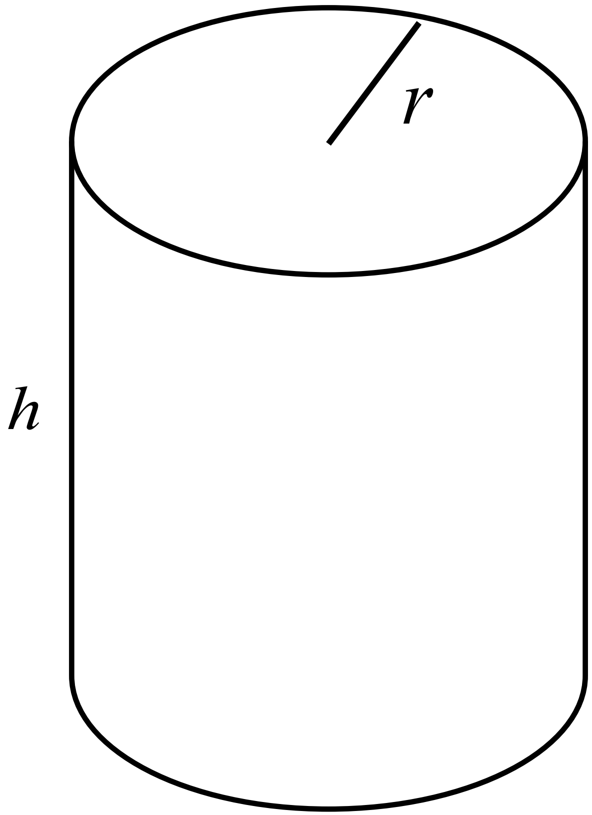
# Модель принятия решений. Оптимальность решения.

Решение оптимизационной задачи

$$f(y) \to \min, y \in Q, \qquad (14)$$

принимается в качестве оптимального решения в рамках сформированной модели.

# Модель принятия решений. Консервная банка.




$$y = (r, h)$$

$$r \geq 0, h \geq 0$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$L = 4\pi r + h$$

$$V = const$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2V / r$$

$$L = 4\pi r + V / \pi r^2$$

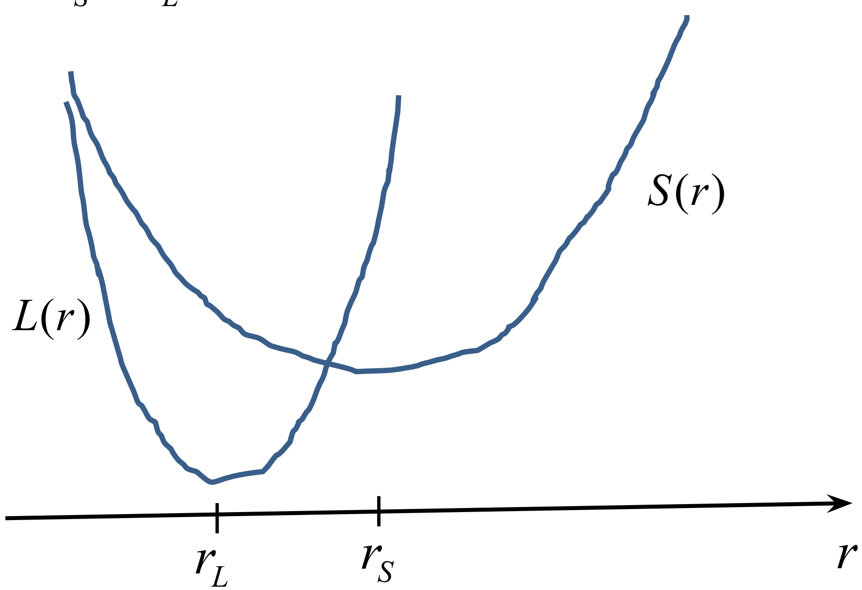
# Модель принятия решений. Консервная банка.

$$f(r) = (S(r), L(r)) \to \min,\ 0 \le r \le \infty$$

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0, \quad r_S = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$$

$$L'(r) = 4\pi - \frac{2V}{\pi r^3}, \quad r_L = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}, \quad L''(r) = \frac{6V}{\pi r^4} > 0$$

$r_S > r_L$



# Модель принятия решений. Оптимальное решение

$$f(y) \to \min, y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_k(y)),$$

$$Q = \{y \in D : g_i(y) \le 0, 1 \le i \le m\}.$$

$$D = \{y \in R^N : a_i \le y_i \le b_i, 1 \le i \le N\}$$

Что является оптимальным решением в случае противоречивости частных критериев?

# Модель принятия решений. Оптимальное решение

**Определение 1.** Точка $x \in Q$ доминирует точку $y \in Q$ $(x \succ y)$, если

$$\forall i, 1 \le i \le k, \quad f_i(x) < f_i(y)$$

(сильное доминирование).

**Определение 2.** Точка $x \in Q$ доминирует точку $y \in Q$ $(x \succ y)$, если

$$\forall i, 1 \le i \le k, \quad f_i(x) \le f_i(y)$$

и существует номер $j, 1 \le j \le k,$ такой, что $f_j(x) < f_j(y)$

(слабое доминирование).

# Модель принятия решений. Паретовское оптимальное решение.

**Определение 3.** Точка $y^* \in Q$ и соответствующий ей вектор $f(y^*)$ называются эффективными (неулучшаемыми, оптимальными по Парето), $\forall y \in Q$

Если из условий $f_i(y) \le f_i(y^*), 1 \le i \le k,$

$$f(y) = f(y^*)$$

следует, что .

$y^*$ оптимальна по Парето, если ее нельзя улучшить в $Q$ ни по одному частному критерию.

Оптимальное решение – множество $P$ всех паретовских точек.

# Модель принятия решений. Слейтеровское оптимальное решение.

**Определение 4**. Точка $\tilde{y} \in Q$ называется слабо эффективной (оптимальной по Слейтеру, слейтеровской точкой), если не существует $x \in Q$ такой, что

$$f_i(x) < f_i(\tilde{y}), 1 \le i \le k,$$

(т.е. не существует доминатора в смысле Определения 1).

Оптимальное решение – множество $S$ всех слейтеровских точек.

Очевидно, что $P \subseteq S$ .

# Метод главного критерия

$$f(y) \to \min,\ y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y),\ f_2(y), \ldots ,\ f_k(y))$$

$$Q_1^* = \{y_1^* \in Q : f_1(y_1^*) = \min_{y \in Q} f_1(y)\}$$

$$Q_2^* = \{y_2^* \in Q_1^* : f_2(y_2^*) = \min_{y \in Q_1^*} f_2(y)\}$$

. . . . .

$$Q_k^* = \{y_k^* \in Q_{k-1}^* : f_k(y_k^*) = \min_{y \in Q_{k-1}^*} f_k(y)\}$$

# Метод сверток. Линейная свертка.

$$f(y) \to \min,\ y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y),\ f_2(y), \ldots, f_k(y))$$

Вектор весов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k),\ \lambda_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq k,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

Линейная свертка $\Lambda(y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(y)$

Рассмотрим задачу

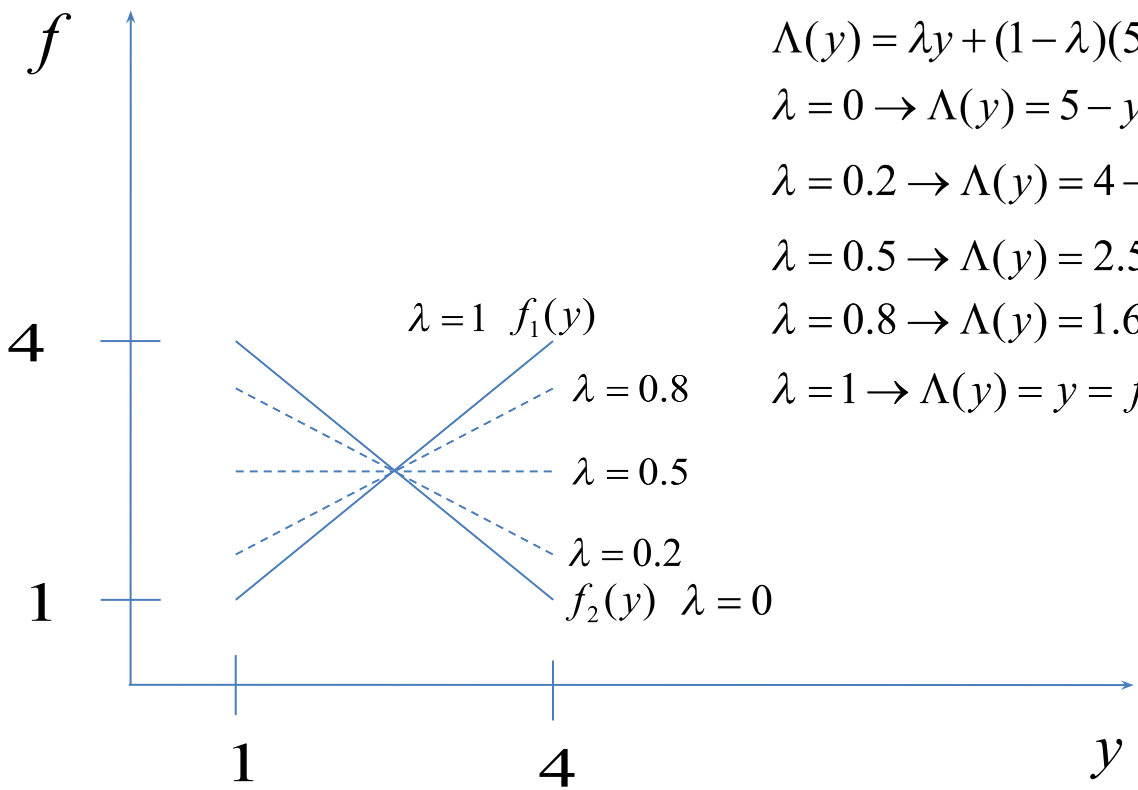
$$\Lambda(y) \to \min,\ y \in Q$$

# Метод сверток. Линейная свертка.

Пример.

$$f_1(y) = y$$
$$f_2(y) = 5 - y$$
$$Q = [1, 4]$$

$$\Lambda(y) \to \min,\ y \in Q$$




$$\Lambda(y) = \lambda y + (1-\lambda)(5-y) = (2\lambda - 1)y + 5(1-\lambda)$$
$$\lambda = 0 \to \Lambda(y) = 5 - y = f_2(y) \to y^* = 4$$
$$\lambda = 0.2 \to \Lambda(y) = 4 - 0.6y \to y^* = 4$$
$$\lambda = 0.5 \to \Lambda(y) = 2.5 \to y^* \in [1, 4]$$
$$\lambda = 0.8 \to \Lambda(y) = 1.6y + 1 \to y^* = 1$$
$$\lambda = 1 \to \Lambda(y) = y = f_1(y) \to y^* = 1$$

$$Q_\lambda^* = \begin{cases} \{4\},\ 0 \le \lambda < 0.5 \\ [1, 4],\ \lambda = 0.5 \\ \{1\},\ 0.5 < \lambda \le 1 \end{cases}$$

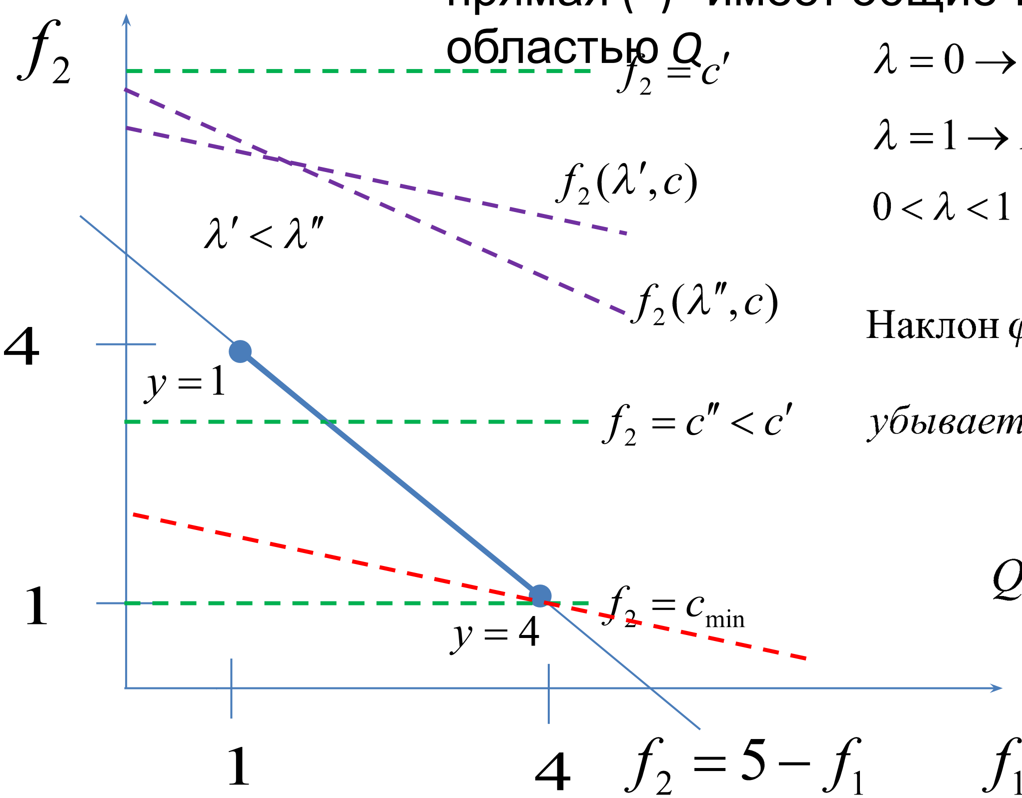
# Метод сверток. Линейная свертка.

Область $Q$ в пространстве критериев : $y=1\to(1,4)$; $y=4\to(4,1)$, $f_2=5-f_1$

В пространстве критериев $\Lambda(f)=\lambda f_1+(1-\lambda)f_2$

Рассмотрим линии уровня свертки $\lambda f_1+(1-\lambda)f_2=c \quad (*)$

$\Lambda(y)\to\min,\ y\in Q$ означает, что надо найти наименьшее $c$, при котором прямая (*) имеет общие точки с допустимой областью $Q$




$\lambda=0\to\Lambda(f)=f_2=c \ \to(f_1^*,f_2^*)=(4,1)$

$\lambda=1\to\Lambda(f)=f_1=c\to(f_1^*,f_2^*)=(1,4)$

$0<\lambda<1 \quad f_2(\lambda,c)=\dfrac{c}{1-\lambda}-\dfrac{\lambda}{1-\lambda}f_1$

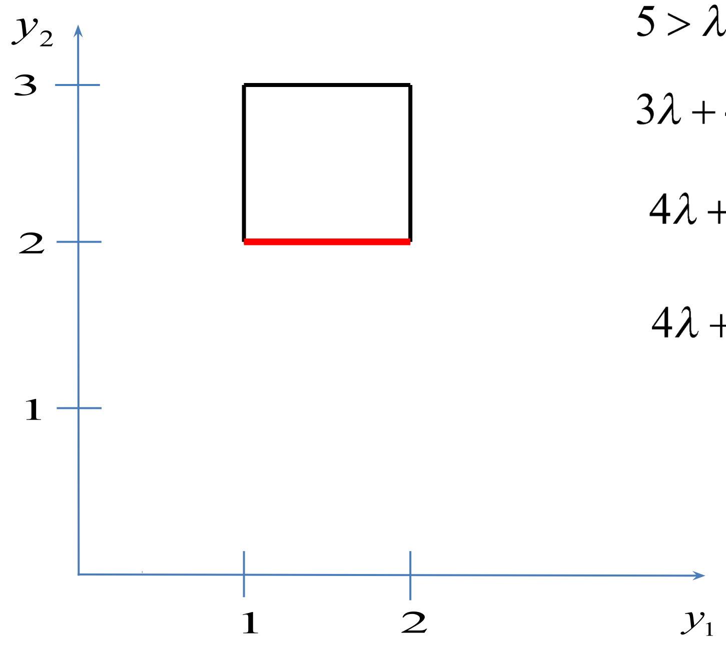
Наклон $\varphi(\lambda)=-\dfrac{\lambda}{1-\lambda}<0.\ \ \varphi'(\lambda)=-\dfrac{1}{(1-\lambda)^2}<0$

*убывает от* $0$ (*при* $\lambda=0$) *до* $-\infty$ (*при* $\lambda=1$)

$$Q_\lambda^*=\begin{cases}(4,1),\ 0\le\lambda<0.5\\(f_1,5-f_1),\ f_1\in[1,4],\lambda=0.5\\(1,4),\ 0.5<\lambda\le1\end{cases}$$

# Метод сверток. Линейная свертка.

$$f_1(y) = 2y_1 + y_2$$
$$f_2(y) = -y_1 + 2y_2$$
$$1 \le y_1 \le 2$$
$$2 \le y_2 \le 3$$




$$\Lambda(y) = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 = (3\lambda - 1) y_1 + (2-\lambda) y_2$$
$$(1,2) \to \Lambda(y) = (3\lambda - 1) + 2(2-\lambda) = \lambda + 3$$
$$(1,3) \to \Lambda(y) = (3\lambda - 1) + 3(2-\lambda) = 5$$
$$(2,2) \to \Lambda(y) = 2(3\lambda - 1) + 2(2-\lambda) = 4\lambda + 2$$
$$(2,3) \to \Lambda(y) = 2(3\lambda - 1) + 3(2-\lambda) = 3\lambda + 4$$
$$5 > \lambda + 3 \to (1,3) \textit{ не может быть минимумом}$$
$$3\lambda + 4 > \lambda + 3 \to (2,3) \textit{ не может быть минимумом}$$
$$4\lambda + 2 < \lambda + 3 \to \lambda < \frac{1}{3} - \textit{точка } (2,2) \textit{ паретовская}$$
$$4\lambda + 2 > \lambda + 3 \to \lambda > \frac{1}{3} - \textit{точка } (1,2) \textit{ паретовская}$$
$$\lambda = \frac{1}{3} \to \Lambda(y) = \frac{5}{3} y_2 \to \textit{любая точка вида}$$
$$(y_1, 2), 1 \le y_1 \le 2, - \textit{паретовская}$$

# Метод сверток. Линейная свертка.

$f_1(y) = 2y_1 + y_2$

$f_2(y) = -y_1 + 2y_2$

$1 \le y_1 \le 2$

$2 \le y_2 \le 3$

$(1,2) \to (4,3)$

$(1,3) \to (5,5)$

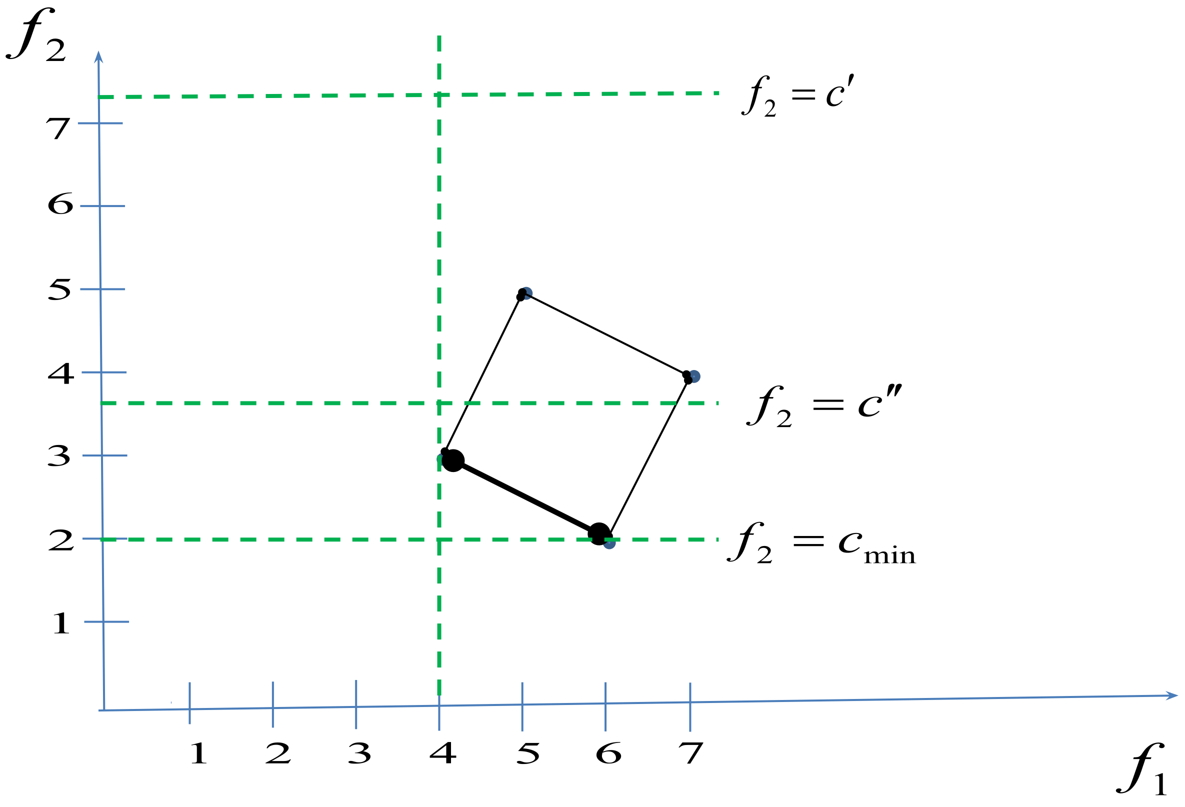
$(2,2) \to (6,2)$

$(2,3) \to (7,4)$

$\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 = c \quad (*)$

$\lambda = 0 \to \Lambda(f) = f_2 = c \to (f_1^*, f_2^*) = (6, 2)$

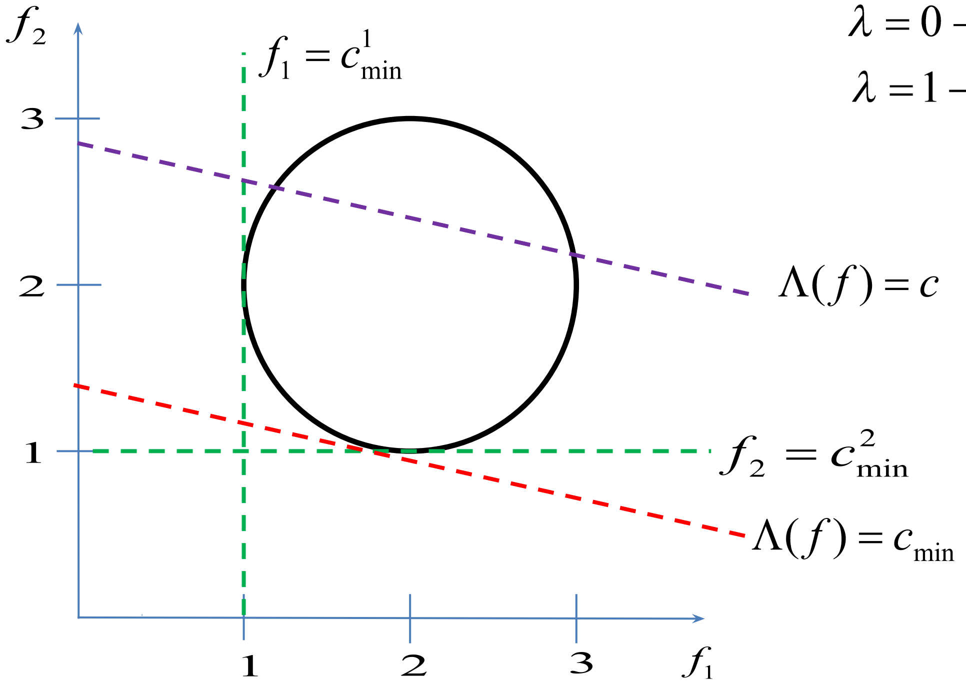
$\lambda = 1 \to \Lambda(f) = f_1 = c \to (f_1^*, f_2^*) = (4, 3)$



# Метод сверток. Линейная свертка.

$$f_1(y) = y_2 \qquad y_2 = f_1$$
$$f_2(y) = y_1 - y_2 \qquad y_1 = f_1 + f_2$$
$$y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_1y_2 - 4y_1 + 7 \le 0 \qquad (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 \le 1$$

$$\Lambda(f) = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 = c \quad (*)$$
$$\lambda = 0 \to \Lambda(f) = f_2 = c \to (f_1^*, f_2^*) = (2, 1)$$
$$\lambda = 1 \to \Lambda(f) = f_1 = c \to (f_1^*, f_2^*) = (1, 2)$$



# Метод сверток. Линейная свертка.

$$(f_1-2)^2+(f_2-2)^2=1$$

$$\lambda f_1+(1-\lambda)f_2=c$$

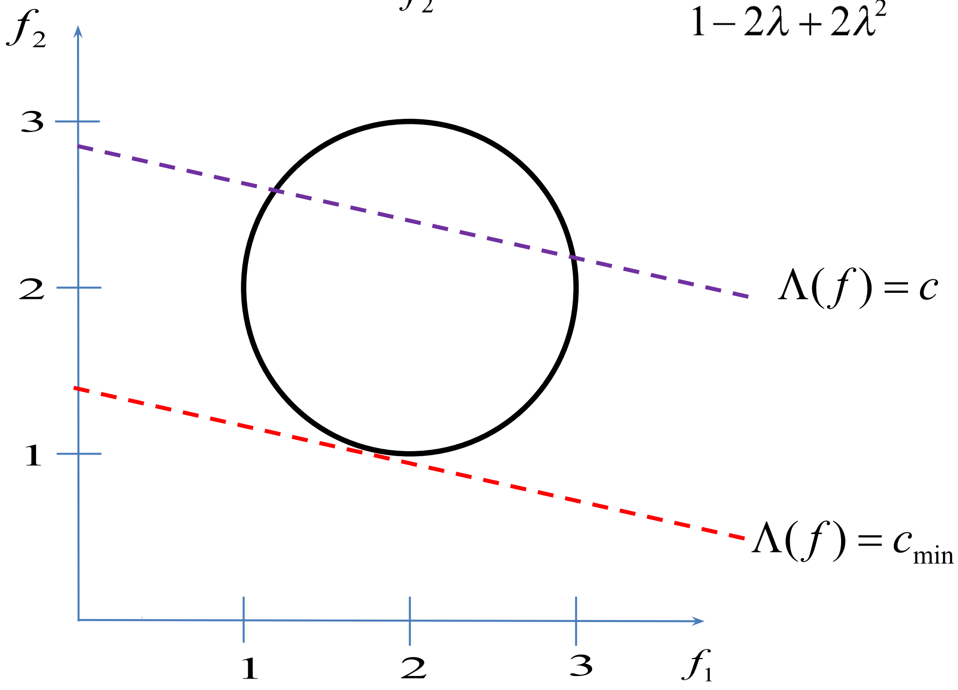
$$f_1=(c-(1-\lambda)f_2)/\lambda$$

$$(1-2\lambda+2\lambda^2)f_2^2-2((1-\lambda)c-2\lambda+4\lambda^2)f_2+c^2-4\lambda c+7\lambda^2=0$$

$$D=-\lambda^2c^2+4\lambda^2c+\lambda^2(2\lambda^2-2\lambda-3)=-\lambda^2(c^2-4c-2\lambda^2+2\lambda+3)=0$$

$$c=2\pm\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2}$$

$$f_2=\frac{(1-\lambda)(2-\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2})-2\lambda+4\lambda^2}{1-2\lambda+2\lambda^2}=2-\frac{1-\lambda}{\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2}}$$




$$0<\lambda<1$$

$$f_1(\lambda)=2-\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2}}$$

$$f_2(\lambda)=2-\frac{1-\lambda}{\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2}}$$

# Метод сверток. Свертка Гермейера.

$$f(y) \to \min,\ y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \ldots, f_k(y))$$

Вектор весов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k),\ \lambda_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq k,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

Свертка Гермейера $\Gamma_\lambda(y) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_i f_i(y)$

Пусть $f_i(y) > 0,\ \ 1 \leq i \leq k,\ \ y \in Q.$

Решение $y^*(\lambda)$ задачи

$$\Gamma_\lambda(y) \to \min,\ \ y \in Q,$$

является слейтеровским решением многокритериальной задачи

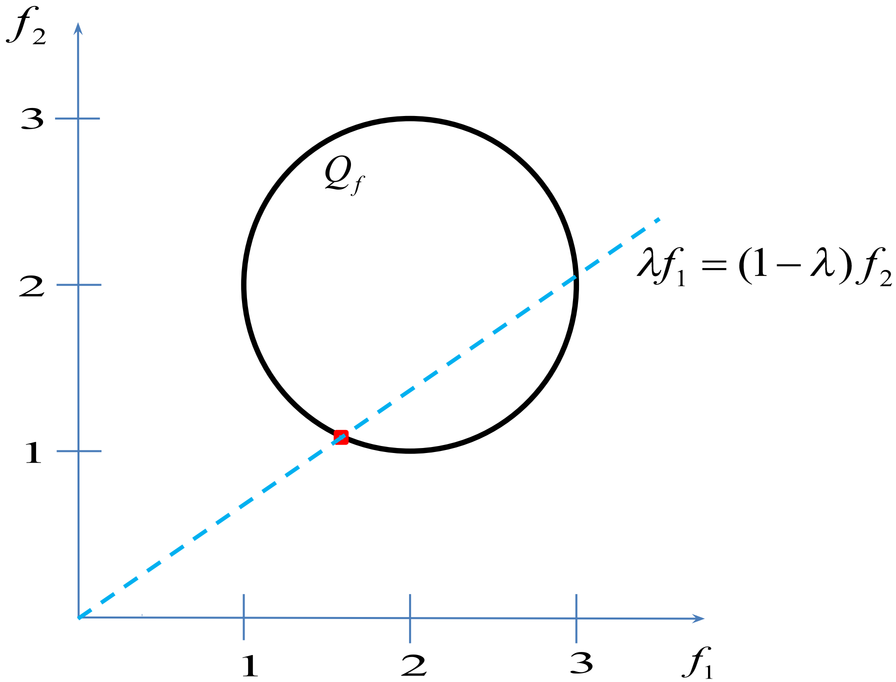
# Геометрическая интерпретация свертки Гермейера.

# Свертка Гермейера. Пример.

$f_1(y) = y_2$ $\quad y_2 = f_1$ $\quad \Gamma_\lambda(f) = \min_{f \in Q_f} \max\{\lambda f_1, (1-\lambda) f_2\}$

$f_2(y) = y_1 - y_2$ $\quad y_1 = f_1 + f_2$ $\quad \lambda = 0 \to \Gamma_\lambda(f) = \min_{f \in Q_f} f_2 \to (f_1^*, f_2^*) = (2,1)$

$y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_1 y_2 - 4y_1 + 7 \le 0$ $\quad (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 \le 1$



# Свертка Гермейера. Пример.

$$Q_f = \{(f_1, f_2) : (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 \le 1\}$$

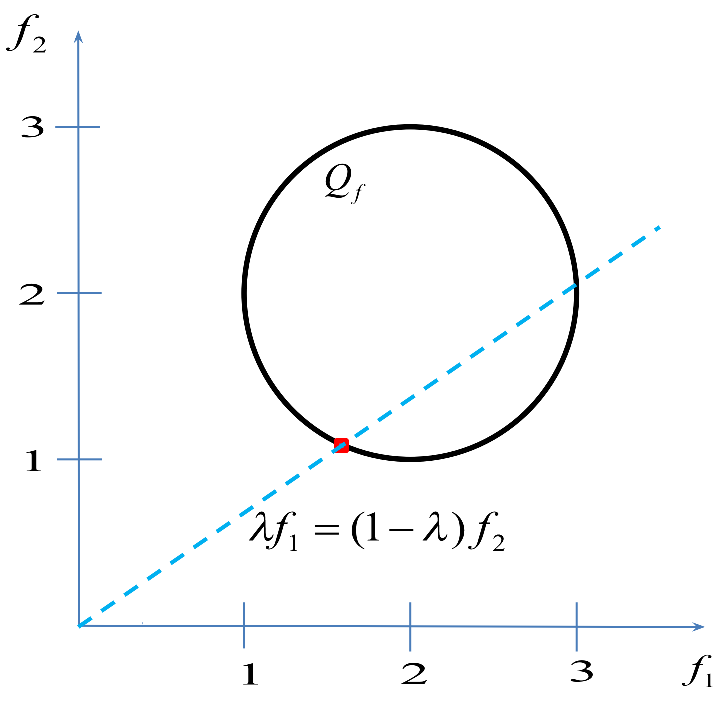
$$\Gamma_\lambda(f) = \min_{f \in Q_f} \max\{\lambda f_1, (1-\lambda) f_2\}$$

$$1/3 < \lambda < 2/3$$

$$\begin{cases} \lambda f_1 = (1-\lambda) f_2 \\ (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 = 1 \end{cases}$$

$$f_1 = ((1-\lambda)/\lambda) f_2$$

$$(1 - 2\lambda + 2\lambda^2) f_2 - 4\lambda(1-\lambda) f_2 + 7\lambda^2 = 0$$




$$f_2 = \frac{2\lambda \pm \lambda\sqrt{-14\lambda^2 + 14\lambda - 3}}{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

$$f_1 = \frac{2(1-\lambda) \pm (1-\lambda)\sqrt{-14\lambda^2 + 14\lambda - 3}}{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

$$f_1^*(\lambda) = \frac{2(1-\lambda) - (1-\lambda)\sqrt{-14\lambda^2 + 14\lambda - 3}}{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

$$f_2^*(\lambda) = \frac{2\lambda - \lambda\sqrt{-14\lambda^2 + 14\lambda - 3}}{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

# Метод уступок

$$f(y) \to \min,\ y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y),\ f_2(y), \ldots, f_k(y))$$

Упорядочиваем по важности

$$f_1 \succ f_2 \succ \ldots \succ f_k$$

$$f_1^* = \min\{f_1(y) : y \in Q\}$$

$$\varepsilon_1 > 0 : f_2^*(\varepsilon_1) = \min\{f_2(y) : y \in Q,\ f_1(y) \le f_1^* + \varepsilon_1\}$$

# Метод уступок

$$\varepsilon_2 > 0 : f_3^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \min\{f_3(y) : y \in Q, f_1(y) \le f_1^* + \varepsilon_1,$$

$$f_2(y) \le f_2^*(\varepsilon_1) + \varepsilon_2\}$$

. . . . .

$$\varepsilon_{k-1} > 0 : f_k^*(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{k-1}) = \min\{f_k(y) : y \in Q, f_1(y) \le f_1^* + \varepsilon_1,$$

$$f_2(y) \le f_2^*(\varepsilon_1) + \varepsilon_2,$$

. . . . .

$$f_{k-1}(y) \le f_{k-1}^*(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{k-2}) + \varepsilon_{k-1}\}$$

Точка $y_k^*$ - глобальный минимум последней задачи – паретовская.

# Многокритериальные задачи. Примеры.

$$f_1(y) = y^2 - 4y + 5$$
$$f_2(y) = y + 1$$
$$1 \le y \le 4$$

---

$$f_1(y) = (y-2)^2 + 1$$
$$f_2(y) = 2y^2 - 8y + 12$$
$$1 \le y \le 3$$

# Многокритериальные задачи. Примеры.

$$f_1(y) = 2y_1 + y_2$$

$$f_2(y) = -y_1 + 2y_2$$

$$1 \le y_1 \le 2$$

$$2 \le y_2 \le 3$$