



# Беспроводные системы связи и их безопасность

Профессор, д.ф.-м.н. А.Г. Флакман

Кафедра бионики и статистической радиофизики ННГУ

## Литература

1. Марков Г.Т., Сазонов Д.М. Антенны. – М. Энергия, 1975. 528 с.
2. Пропис Д. Цифровая связь. Пер. с англ. – М: Радио и связь, 2000. 800с.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Пер. с англ. М., Вильямс, 2003. 1104 с.
4. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Теоретические основы обработки сигналов в системах мобильной радиосвязи (Электронное методическое пособие). – Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2010. 107 стр.
5. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Современные методы пространственной обработки сигналов в радиосистемах с антенными решетками. Учебное пособие. / Нижний Новгород: Изд-во НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2008. - 171 с.
6. В.Т. Ермолаев, А.А. Мальцев, А.Г. Флакман, О.В. Болховская, А.В. Ключев. Мобильная связь: вопросы теории и типовые задачи. Учебное пособие. / Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2014. 234 с.



# Лекции 1-3. Основные характеристики антенных решеток (АР)

- АР часто используются в радиосвязи, радиолокации, радиопеленгации, радионавигации
- АР представляет собой множество простых антенн, произвольно распределенных в пространстве и объединенных системой управления передачей и приемом сигналов.
- Простые антенны называют элементами АР. Как правило, они имеют геометрические размеры, не превышающие длину волны, в то время как вся АР может иметь геометрические размеры, значительно превышающие длину волны.
- В большинстве случаев АР состоит из идентичных элементов, распределенных в пространстве упорядоченным образом, например, на одинаковом друг от друга расстоянии. Это обстоятельство оправдывает термин “решетка”, используемый для таких антенных систем.
- Если элементы АР распределены вдоль некоторой линии, то АР называется линейной.
- Эквидистантной линейной АР называется система, элементы которой расположены друг от друга на одинаковом расстоянии, называемым периодом АР.
- Если каждый элемент АР предполагается излучающим равномерно по всем направлениям, то такая система называется эквидистантной линейной АР с изотропно излучающими элементами.
- Решетка называется плоской, когда ее элементы распределены на плоскости.
- Элементы АР могут быть расположены на цилиндрической или сферической поверхности (цилиндрическая или сферическая АР).

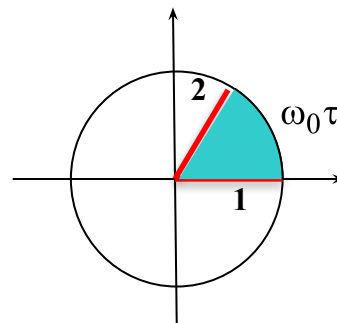
# 1. Прием гармонического сигнала антенной решеткой



Сигнал, принятый первым элементом

$$s_1(t) = \exp(j\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$



Колебание во втором элементе опережает колебание в первом на время

$$\tau = \frac{d \sin \varphi}{c} \quad c = 3 \times 10^8 \text{ м/с} - \text{ скорость света}$$

$$s_2(t) = \exp[j\omega_0(t + \tau)] = \exp(j2\pi f_0 \tau) \exp(j\omega_0 t)$$

$$s_2(t) = \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right) \exp(j\omega_0 t) = \exp[j(\omega_0 t - k\Delta)]$$

$$k = 2\pi/\lambda \quad \Delta = -d \sin \varphi \quad - \text{ волновое число и разность хода}$$

Сигнал в разных элементах АР отличается только разностью фаз  $\Delta_n$ , которая зависит от номера элемента  $n$ :

$$\Delta_n = -\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d\sin\varphi; \quad n = (1 \div N)$$

$$s_n(t) = \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d\sin\varphi\right]\exp(j\omega_0 t); \quad n = (1 \div N)$$

Комплексная амплитуда

$$s_n(t) = S_n \exp(j\omega_0 t); \quad n = (1 \div N)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\varphi\right) \\ \vdots \\ \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}(N-1)d\sin\varphi\right] \end{pmatrix}.$$





$$s_n(t) = \exp[j\omega_0 t - j(kr_n)]; \quad n = (1 \div N)$$

$$\vec{r}_n = \vec{r}_1 + \vec{\rho}_n$$

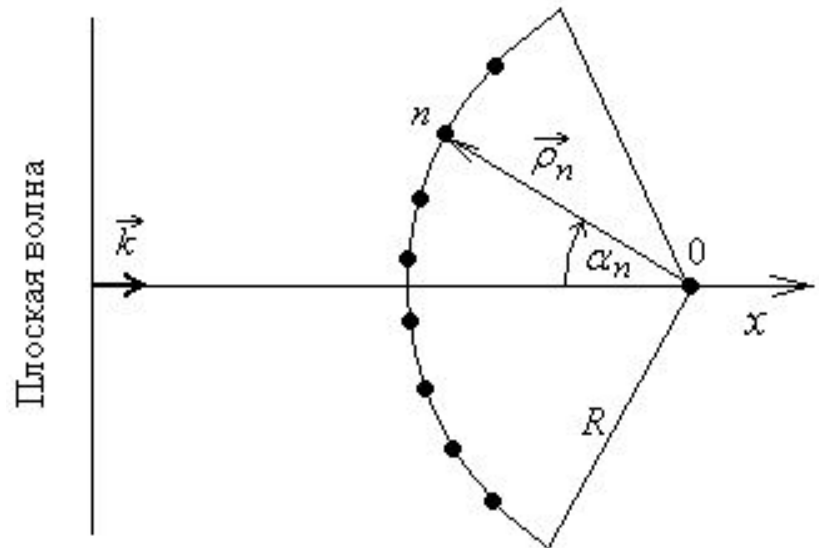
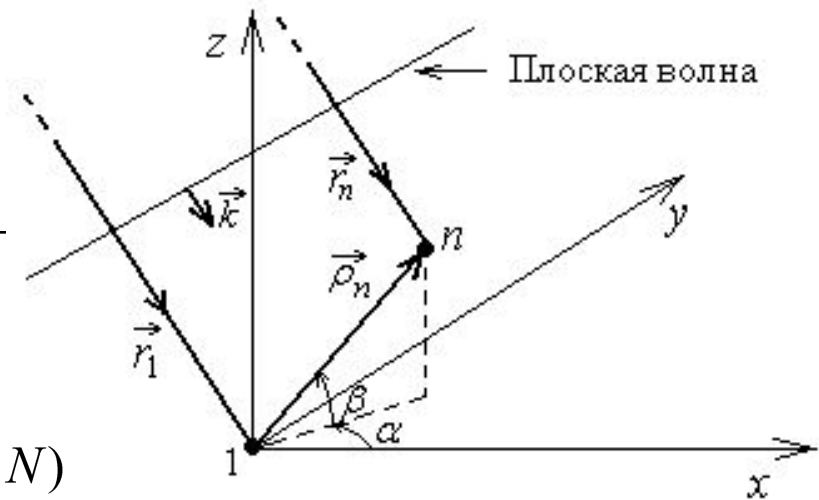
$$s_n(t) = \exp[-j(k\rho_n)] \exp(j\omega_0 t - jkr_1); \quad n = (1 \div N)$$

$$S_n = \exp[-j(k\rho_n)]; \quad n = (1 \div N)$$

**Пример:** круговая решетка

$$(k\rho_n) = -\frac{2\pi}{\lambda} R \cos \alpha_n$$

$$S_n = \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} R \cos \alpha_n\right); \quad n = (1 \div N)$$





## 2. Диаграмма направленности

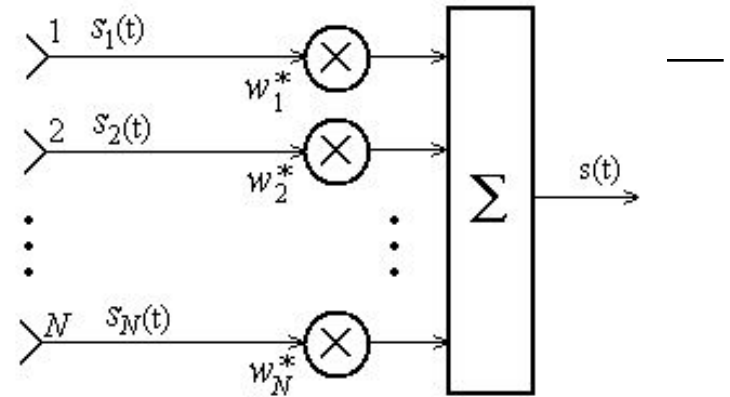
$$s(t) = \sum_{n=1}^N w_n^* s_n(t) = \exp(j\omega_0 t) \sum_{n=1}^N w_n^* S_n$$

$$s_n(t) = S_n \exp(j\omega_0 t); \quad n = (1 \div N)$$

$$s(t) = \exp(j\omega_0 t) \sum_{n=1}^N w_n^* \exp[-j(k\rho_n)]$$

$w_n = \exp[-j(k\rho_n)]$  - максимальная амплитуда на выходе (в  $N$  раз больше амплитуды волны)

$w_n = (-1)^n \exp[-j(k\rho_n)]$  - при четном  $N$  имеем подавление сигнала (ноль на выходе)



**Зависимость комплексной амплитуды выходного сигнала от направления прихода плоской монохроматической волны единичной амплитуды называется диаграммой направленности (ДН) АР.**

$$F(k) = \sum_{n=1}^N w_n^* \exp[-j(k\rho_n)]$$

$$R > 2D_a^2 / \lambda$$

Зона Фраунгофера  
(дальняя зона) антенны



$$F(k) = \sum_{n=1}^N w_n^* \exp[-j(k\rho_n)]$$

ДН является комплексной функцией, она имеет функцию модульного значения  $|F(k)|$  и функцию аргумента  $\Phi(k) = \arg[F(k)]$

$$|F(k)|$$

Амплитудная ДН

$$\Phi(k) = \arg[F(k)]$$

Фазовая ДН

$$F(k) = \sum_{n=1}^N w_n^* \underline{f_n(k)} \exp[-j(k\rho_n)]$$

В общем случае элементы АР могут иметь собственные различные ДН.

$$F(k) = \underline{f(k)} \sum_{n=1}^N w_n^* \exp[-j(k\rho_n)]$$

Множитель решетки

Диаграмма одного элемента АР

Когда АР составлена из идентичных элементов, ее ДН равна произведению ДН одного элемента и множителя решетки



# Свойства ДН линейной эквидистантной АР, состоящей из изотропных элементов

$$S_n(t) = \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)d \sin \varphi\right] \exp(j\omega_0 t)$$

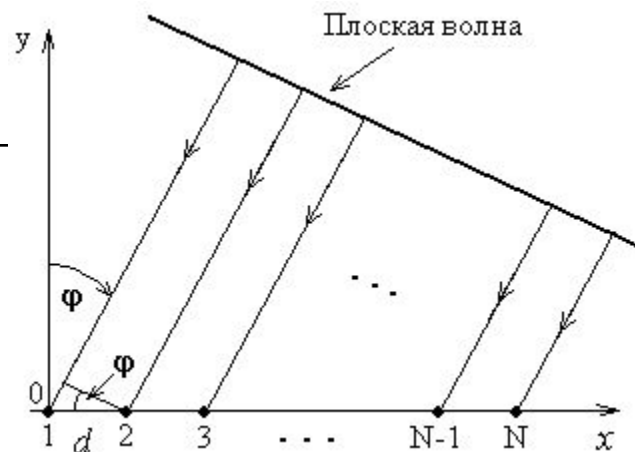
$$(1) \quad F(\varphi) = \sum_{n=1}^N w_n^* \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} d(n-1) \sin \varphi\right]$$

$$(2) \quad w_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} d(n-1)\xi\right]$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^N |w_n|^2 = 1$$

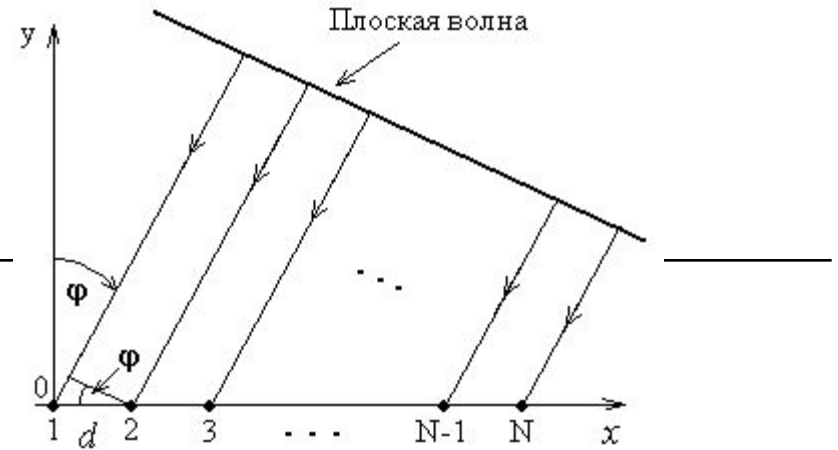
$$(4) \quad F(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} d(n-1)(\sin \varphi - \xi)\right]$$

$$(5) \quad F(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sin\left[\pi \frac{d}{\lambda} N(\sin \varphi - \xi)\right]}{\sin\left[\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \varphi - \xi)\right]} \exp\left[j\pi \frac{d}{\lambda} (N-1)(\sin \varphi - \xi)\right]$$



# Амплитудная ДН

$$(1) \quad |F(\varphi)| = \sqrt{N} \frac{\left| \sin \left[ \pi \frac{d}{\lambda} N (\sin \varphi - \xi) \right] \right|}{N \left| \sin \left[ \pi \frac{d}{\lambda} (\sin \varphi - \xi) \right] \right|}$$



Обобщенная угловая переменная

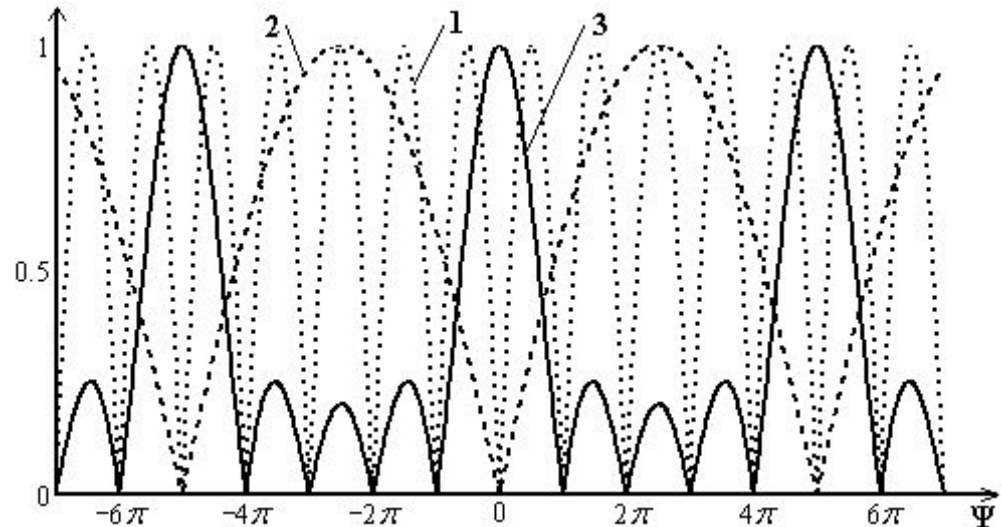
$$(2) \quad \Psi = \pi \frac{d}{\lambda} N (\sin \varphi - \xi)$$

$$(3) \quad |F(\Psi)| = \sqrt{N} \frac{|\sin \Psi|}{N |\sin \Psi / N|}$$

Положения максимумов

$$(4) \quad \Psi = \pm \pi N m \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Кривая 1 –  $|\sin \Psi|$   
 Кривая 2 –  $|\sin(\Psi/N)|$   
 Кривая 3 –  $|F(\Psi)|/\sqrt{N}$   
 $N=5$



Положения максимумов  $\Psi = \pm \pi N m$   $m=0,1,2,\dots$

1. ДН - периодическая функция относительно обобщенной угловой переменной  $\Psi$

2. Направление главного луча  $\varphi_0$  находим из формулы  $\sin \varphi_0 = \xi$

3. Угловое расстояние между первыми нулями дает ширину луча

$$\Delta \varphi_{ar} = 2 \cdot \arcsin \left( \frac{\lambda}{dN \cos \varphi_0} \right)$$

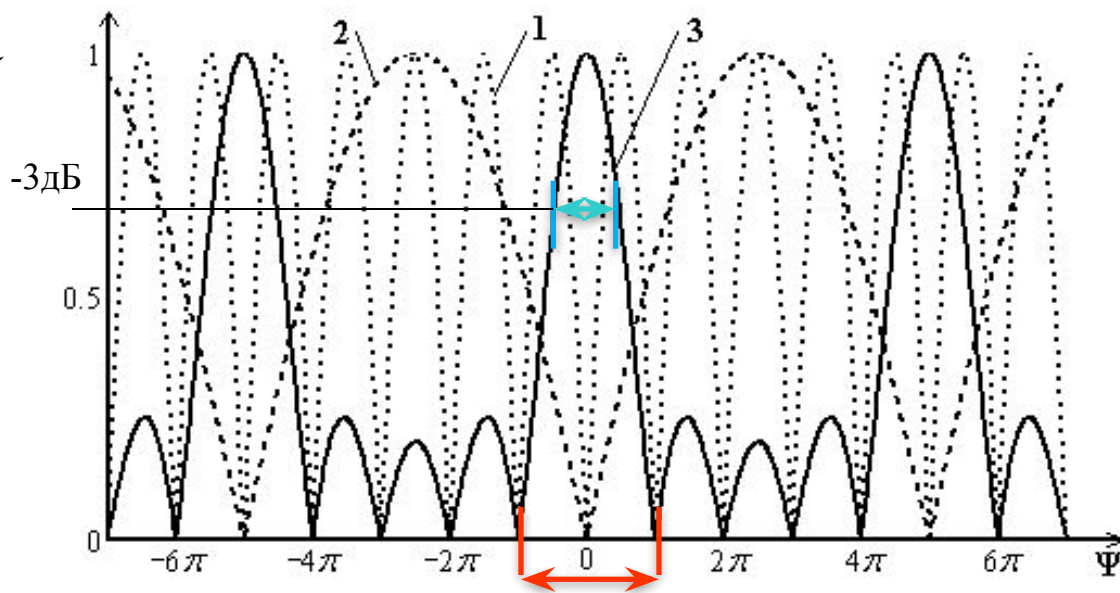
4. Ширину луча определяют по уровню ДН, равному -3 дБ относительно максимума (уровень половинной мощности)

$$(\Delta \varphi_{ar})_{0,5} = 2 \cdot \arcsin \left( \frac{0,451 \lambda}{dN \cos \varphi_0} \right)$$

Дифракционный максимум ДН

Главный максимум ДН

Дифракционный максимум ДН



Боковые лепестки ДН

**Ширина луча уменьшается при увеличении размера АР.**

**Ширина луча увеличивается при его отклонении от нормали.**



(1)  $\Psi = \pi \frac{d}{\lambda} N (\sin \varphi - \xi)$

(2)  $(\pi/2) \leq \varphi \leq (\pi/2)$  - область видимости для угла  $\varphi$

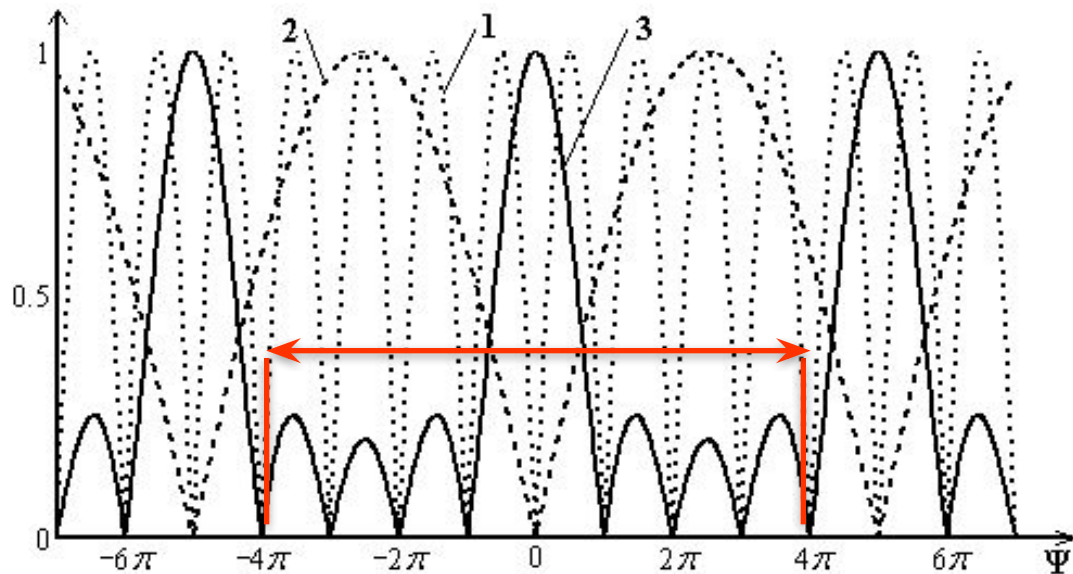
(3)  $-\pi \frac{d}{\lambda} N(1+\xi) \leq \Psi \leq \pi \frac{d}{\lambda} N(1-\xi)$  - область видимости для обобщенного угла  $\Psi$

В области видимости не должно быть дифракционных лепестков!

(4)  $-\pi(N-1) \leq \Psi \leq \pi(N-1)$

Сравнивая (4) с (3), получим два условия:

(5)  $\pi \frac{d}{\lambda} N(1-\xi) < (N-1)\pi, \quad -\pi \frac{d}{\lambda} N(1+\xi) > -(N-1)\pi.$



Эти неравенства эквивалентны одному неравенству  $\frac{d}{\lambda} \leq \frac{N-1}{N} \frac{1}{1+|\xi|}$  (6)

При  $\xi=0, d \leq \lambda$ . При сканировании во всем переднем полукруге ( $|\varphi_0| \leq \pi/2$ ) требование к межэлементному расстоянию становится более сильным ( $d \leq 0,5\lambda$ ).



Для борьбы с помехами принимаются меры к снижению уровня боковых лепестков ДН. Данную задачу решают, выбирая соответствующим образом весовые коэффициенты.

$$(1) \quad F(\varphi) = \sum_{n=1}^N w_n^* \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} d(n-1) \sin \varphi \right]$$

$20 \lg|F(\varphi)| = 10 \lg|F(\varphi)|^2$  – значение амплитудной ДН в логарифмическом масштабе (дБ – децибеллы).

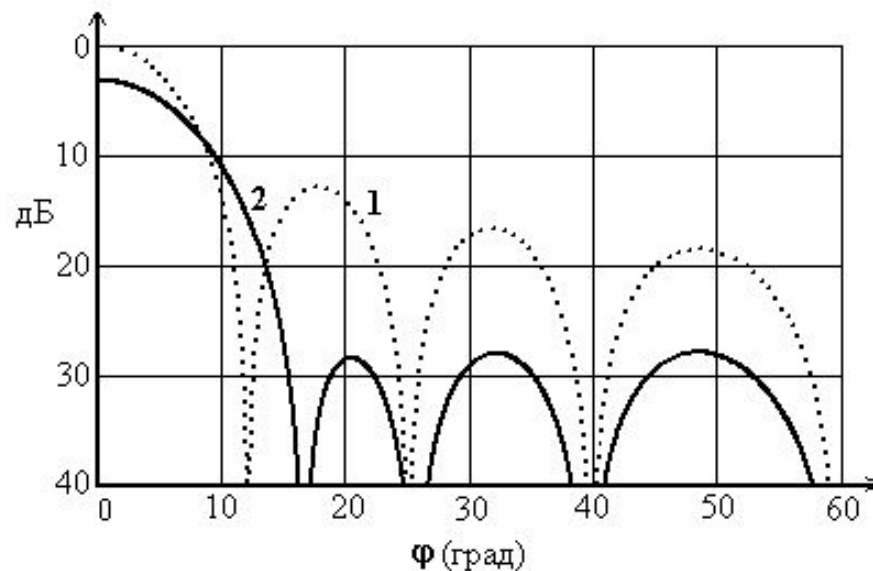
Рассмотрим два способа уменьшения уровней боковых лепестков ДН.

**1. Дольф-чебышевское распределение** весовых коэффициентов минимизирует уровень боковых лепестков при фиксированной ширине главного луча.

**Кривая 1** - ДН с равномерным распределением весовых коэффициентов.

**Кривая 2** - ДН для 9-элементной дольф-чебышевской АР с весовыми коэффициентами  $w_1=w_9=0,38$ ;  $w_2=w_8=0,53$ ;  $w_3=w_7=0,76$ ;  $w_4=w_6=0,94$ ;  $w_5=1$ .

Боковые лепестки уменьшаются, а главный луч расширяется. Характерным является то, что все боковые лепестки имеют один и тот же уровень.





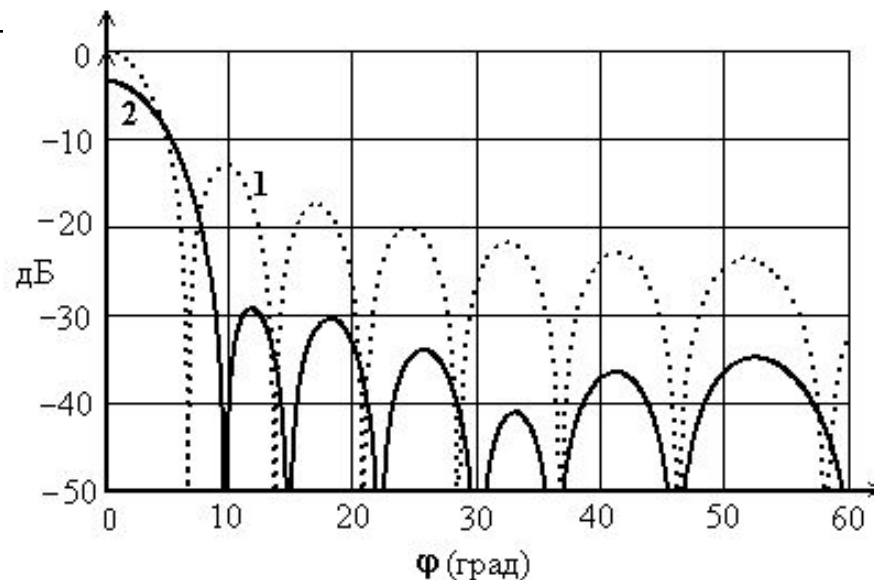
## 2. Распределение весовых коэффициентов Ямпольского минимизирует средний уровень боковых лепестков, получаемый интегрированием ДН по мощности (квадрат амплитудной ДН) в области боковых лепестков.

**Кривая 1** - ДН с равномерным распределением весовых коэффициентов.

**Кривая 2** - ДН для 16-элементной АР с весовыми коэффициентами, равными

$$w_1=w_{16}=0,245; w_2=w_{15}=0,371; w_3=w_{14}=0,508; \\ w_4=w_{13}=0,646; w_5=w_{12}=0,724; w_6=w_{11}=0,882; \\ w_7=w_{10}=0,959; w_8=w_9=1.$$

Уровни боковых лепестков уменьшаются, а главный луч становится шире.



**Общая закономерность заключается в том, что для уменьшения среднего уровня боковых лепестков модульные значения весовых коэффициентов следует выбирать так, чтобы они уменьшались к краям АР.**

### 3. Коэффициент направленного действия (КНД)

КНД показывает, во сколько раз больше (или меньше) излучает антенна в заданном направлении по сравнению с ненаправленной гипотетической антенной при условии одинаковой подводимой мощности.

Плотность потока мощности  $\Pi(\theta, \varphi) = k|F(\theta, \varphi)|^2$

$$\Pi_{cp} = \frac{k}{4\pi} \int_{4\pi} |F(\varphi, \theta)|^2 d\Omega \quad d\Omega = \cos \theta d\varphi d\theta$$

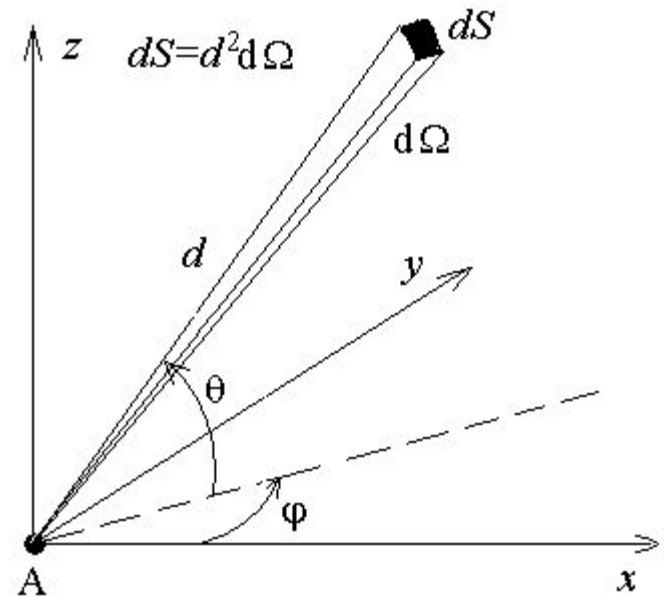
$$D(\varphi, \theta) = \frac{\Pi(\varphi, \theta)}{\Pi_{cp}} = \frac{4\pi |F(\varphi, \theta)|^2}{\int_{4\pi} |F(\varphi, \theta)|^2 d\Omega}$$

КНД

$$D(\varphi, \theta) = D_{\max} |F(\varphi, \theta)|^2$$

$$D_{\max} = \frac{4\pi |F(\varphi_0, \theta_0)|^2}{\int_{4\pi} |F(\varphi, \theta)|^2 d\Omega}$$

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_0^{0,5\pi} \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} |F(\varphi, \theta)|^2 \cos \theta d\varphi d\theta}$$



## Максимизация КНД.

Синтезируем ДН с максимальным КНД в выбранном направлении  $(\varphi_0, \theta_0)$ .

Имели 
$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^N w_n^* f_n(\varphi, \theta) \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} d(n-1) \sin \varphi \right]$$

В матричной форме 
$$F(\varphi, \theta) = \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi, \theta)$$

$S_n(\varphi, \theta) = f_n(\varphi, \theta) \exp[j2\pi d_\lambda (n-1) \sin \varphi]$  -  $n$ -ая компонента вектора  $\mathbf{S}$

КНД 
$$D(\varphi_0, \theta_0) = \frac{4\pi \left| \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0) \right|^2}{\int_0^{2\pi} \int_{-0.5\pi}^{0.5\pi} \left| \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi, \theta) \right|^2 \cos \theta d\varphi d\theta}$$

Учтем, что 
$$\left| \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi, \theta) \right|^2 = \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi, \theta) \mathbf{S}^H(\varphi, \theta) \mathbf{W}$$

КНД 
$$D(\varphi_0, \theta_0) = \frac{4\pi \left| \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0) \right|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W}}$$

Эрмитова матрица  $\mathbf{R}$  равна 
$$\mathbf{R} = \int_0^{2\pi} \int_{-0.5\pi}^{0.5\pi} \mathbf{S}(\varphi, \theta) \mathbf{S}^H(\varphi, \theta) \cos \theta d\varphi d\theta$$

1. Матрица  $\mathbf{R}$  является диагональной (т.е. отдельные элементы  $\Lambda P$  имеют ортонормированные парциальные ДН).

Условие ортонормированности удобно записать в виде  $\mathbf{R}_{pq} = 4\pi\delta_{pq}$

КНД 
$$D(\varphi_0, \theta_0) = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0) \mathbf{S}^H(\varphi_0, \theta_0) \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}$$

Задача – найти экстремум отношения двух квадратичных форм.

Вектор  $\mathbf{W}$  определен с точностью до комплексного множителя  $\alpha$ . Этот множитель можно подобрать так, чтобы выполнялось условие  $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{S}^H(\varphi_0, \theta_0) \mathbf{W}$

Тогда 
$$D(\varphi_0, \theta_0) = \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0)$$

Задача свелась к отысканию условного максимума. Применим метод Лагранжа.

$$L = \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0) - \mu [\mathbf{W}^H \mathbf{W} - \mathbf{S}^H(\varphi_0, \theta_0) \mathbf{W}]$$
 - функционал Лагранжа

$$L = \sum_{p=1}^N w_p^* S_p(\varphi_0, \theta_0) - \mu \left[ \sum_{p=1}^N w_p^* w_p - \sum_{p=1}^N w_p S_p^*(\varphi_0, \theta_0) \right]$$
  $\mu$  - неопределенный множитель Лагранжа



В качестве независимых переменных можно выбрать  $w_k, w_k^*$

$$\frac{dL}{dw_k^*} = S_k(\varphi_0, \theta_0) - \mu w_k = 0 \quad \Rightarrow \quad w_k = \mu^{-1} S_k(\varphi_0, \theta_0)$$

---

Множитель  $\mu=1 \quad \Rightarrow \quad w_k = S_k(\varphi_0, \theta_0)$

$$\frac{dL}{dw_k} = -\mu w_k^* + \mu S_k^*(\varphi_0, \theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_k^* = S_k^*(\varphi_0, \theta_0)$$

В матричной форме  $\mathbf{W} = \alpha \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0)$

ДН с максимальным КНД  $F(\varphi, \theta) = \alpha \mathbf{S}^H(\varphi_0, \theta_0) \mathbf{S}(\varphi, \theta)$

$$F(\varphi, \theta) = \alpha \sum_{n=1}^N f_n^*(\varphi_0, \theta_0) f_n(\varphi, \theta) \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} d(p-1)(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right]$$

Максимальный КНД в направлении  $(\varphi_0, \theta_0)$   $D(\varphi_0, \theta_0) = \sum_{n=1}^N |f_n(\varphi_0, \theta_0)|^2$



$$D_n(\varphi_0, \theta_0) = \frac{4\pi |f_n(\varphi_0, \theta_0)|^2}{2\pi \int_0^{0,5\pi} \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} |f_n(\varphi, \theta)|^2 \cos \theta d\varphi d\theta}$$

- КНД  $n$ -го элемента в направлении  $(\varphi_0, \theta_0)$

Из условия ортонормированности

$$D_n(\varphi_0, \theta_0) = |f_n(\varphi_0, \theta_0)|^2$$

$$D(\varphi_0, \theta_0) = \sum_{n=1}^N D_n(\varphi_0, \theta_0)$$

**Максимальный КНД АР есть сумма КНД отдельных элементов с ортогональными парциальными ДН.**

**2. Случай, когда матрица  $\mathbf{R}$  является недиагональной**

Имели, что КНД 
$$D(\varphi_0, \theta_0) = \frac{4\pi |\mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0)|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W}}$$

Условие нормировки для весового вектора  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} = \mathbf{S}^H(\varphi_0, \theta_0) \mathbf{W}$$

Тогда 
$$D(\varphi_0, \theta_0) = \mathbf{W}^H \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0)$$

Задача свелась к отысканию условного максимума. Применим метод Лагранжа.



$$L = \sum_{p=1}^N w_p S_p(\varphi_0, \theta_0) - \mu \left[ \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N w_p^* \mathbf{R}_{pq} w_q - \sum_{p=1}^N w_p S_p^*(\varphi_0, \theta_0) \right] - \text{функционал Лагранжа}$$

В качестве независимых переменных можно выбрать  $w_k, w_k^*$

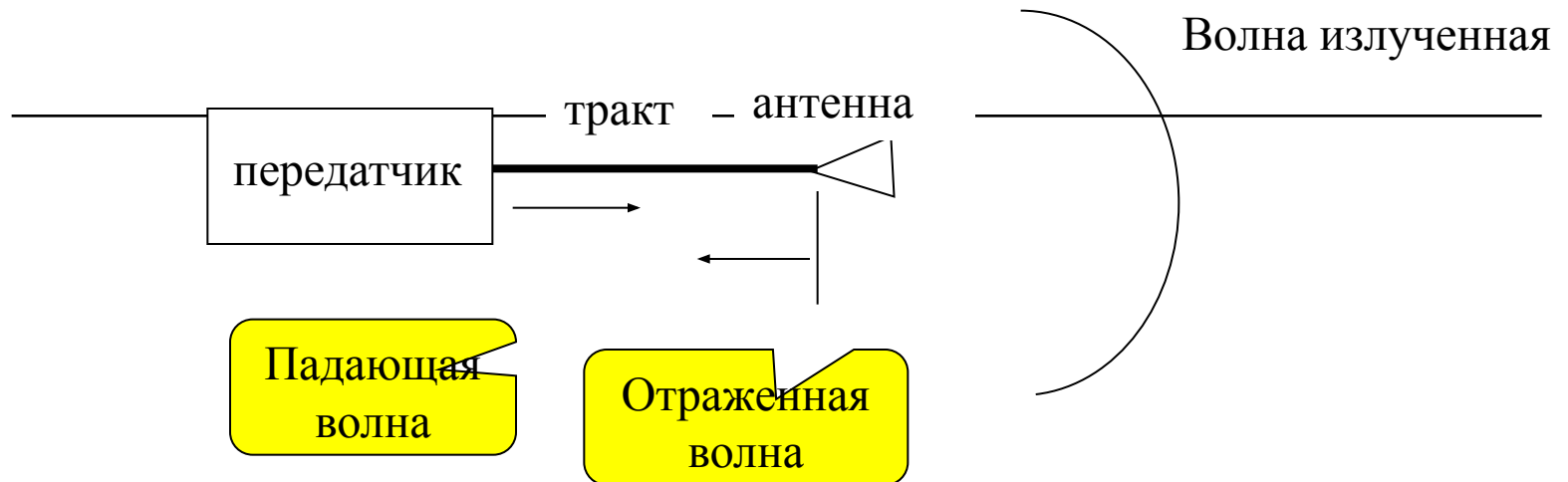
$$\frac{dL}{dw_k^*} = S_k(\varphi_0, \theta_0) - \mu \sum_{q=1}^N \mathbf{R}_{kq} w_q = 0 \Rightarrow \quad \mu \mathbf{R} \mathbf{W} = \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0)$$

Множитель  $\mu=1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W} = \alpha \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0)$

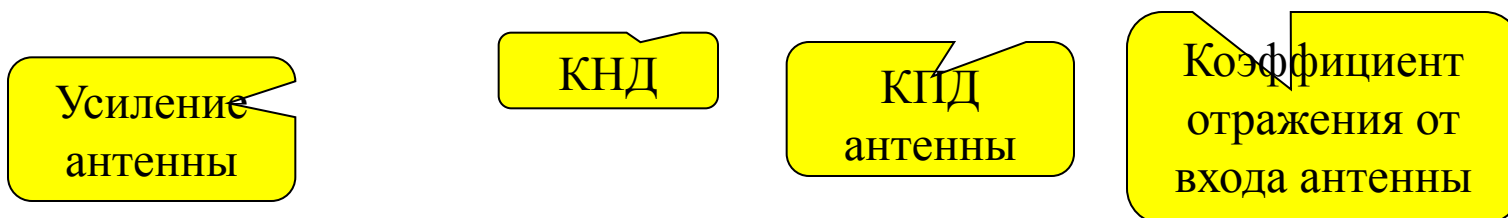
ДН с максимальным КНД  $F(\varphi, \theta) = \alpha \mathbf{S}^H(\varphi_0, \theta_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}(\varphi, \theta)$

Максимальный КНД в направлении  $(\varphi_0, \theta_0)$   $D(\varphi_0, \theta_0) = 4\pi \cdot \mathbf{S}^H(\varphi_0, \theta_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}(\varphi_0, \theta_0)$

## 4. Усиление антенны

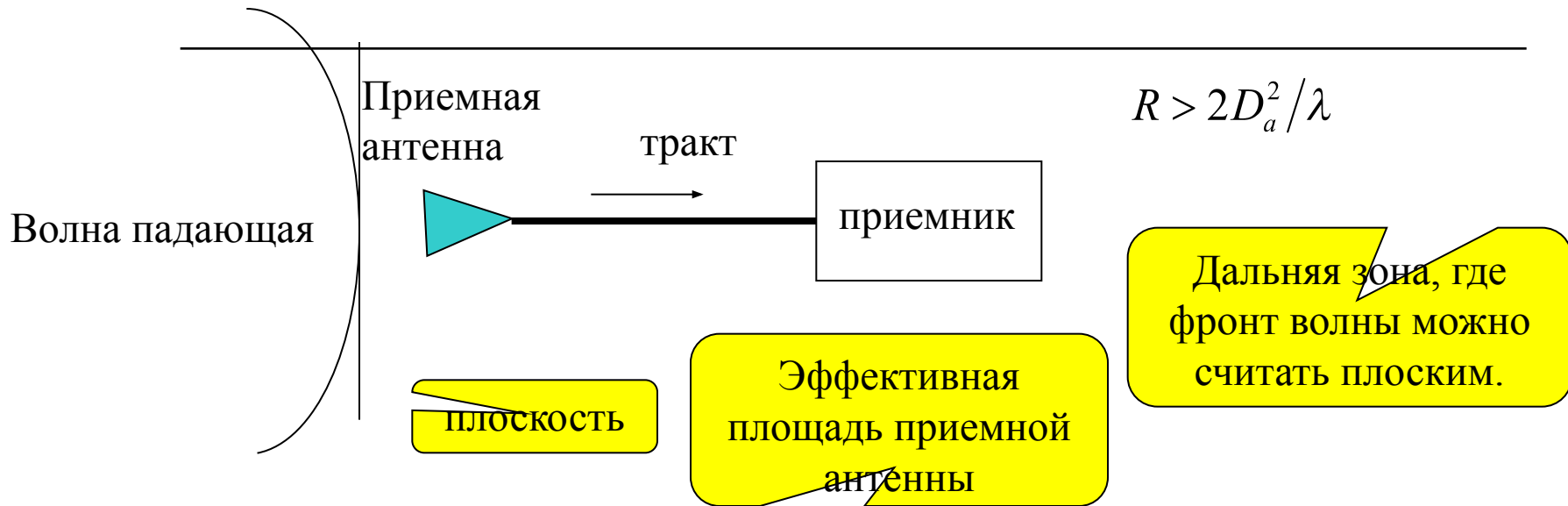


$$G(\theta, \varphi) = D(\theta, \varphi) \eta (1 - |\Gamma|^2),$$





## 5. Мощность принятого сигнала



$$\Pi \left( \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right) = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2}$$

$$S = \frac{G_r \lambda^2}{4\pi}$$

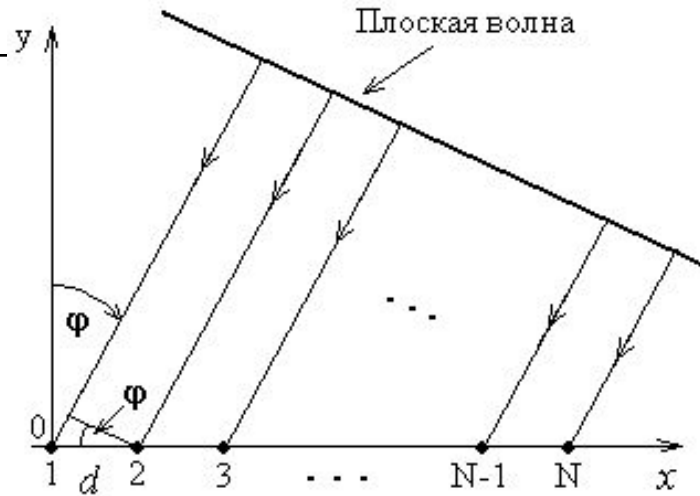
$$P_r(\text{Вт}) = \frac{P_t G_t S_r}{4\pi R^2} = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2}{(4\pi)^2 R^2}$$

## 6. Прием узкополосного сигнала антенной решеткой

Три эквивалентных способа представления действительного узкополосного сигнала

- (1)  $s(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$
- (2)  $s(t) = [a(t) \cos \theta(t)] \cos \omega_0 t - [a(t) \sin \theta(t)] \sin \omega_0 t$
- (3)  $s(t) = \text{Re}[S(t) \exp(j\omega_0 t)]; S(t) = a(t) \exp[j\theta(t)]$

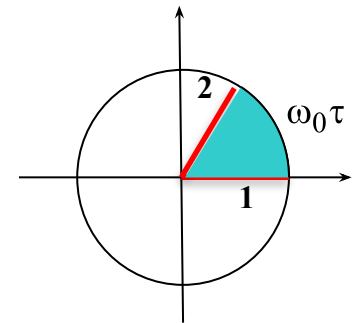
Максимальному размеру АР, равному  $L$ , соответствует максимальная задержка сигнала  $\tau_{\max} = L/c$ .



$(\Delta f)^{-1}$  - характерное время изменения комплексной амплитуды, обратно пропорциональное ширине спектра.

$\tau_{\max} \ll (\Delta f)^{-1}$  - условие, при котором комплексная амплитуда имеет одинаковое значение на всех элементах АР

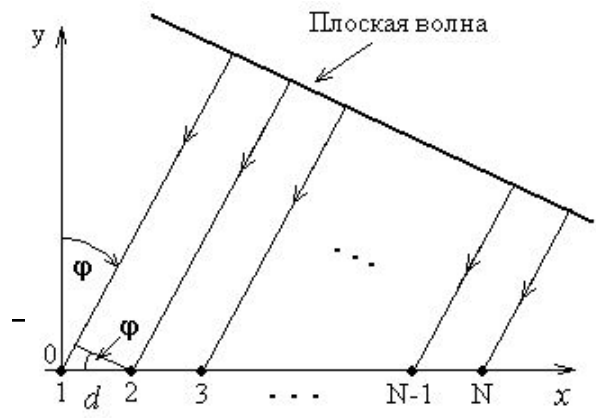
$L \ll c(\Delta f)^{-1}$  - ограничение на размер антенны.



Если сигнал имеет ширину спектра 10 МГц ( $\Delta f = 10^7$  Гц), то  $L \ll 30$  м.

Чтобы различать регулярную и случайную комплексные амплитуды, последнюю обозначим буквой  $X$ .

Вектор-столбец  $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_N)^T$  - набор случайных комплексных амплитуд  $X_n$  ( $n=1 \div N$ ) в элементах АР в один и тот же момент времени ( $(.)^T$  - транспонирование)



Многомерная гауссова плотность вероятности совокупности комплексных случайных величин  $X_n$

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{\pi^N \det \mathbf{M}} \exp(-\mathbf{X}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X})$$

$\mathbf{M} = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle$  - корреляционная матрица,  $(.)^H$  - эрмитовое сопряжение.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \langle X_1 X_1^* \rangle & \langle X_1 X_2^* \rangle & \boxtimes & \langle X_1 X_N^* \rangle \\ \langle X_2 X_1^* \rangle & \langle X_2 X_2^* \rangle & \boxtimes & \langle X_2 X_N^* \rangle \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \langle X_N X_1^* \rangle & \langle X_N X_2^* \rangle & \boxtimes & \langle X_N X_N^* \rangle \end{pmatrix} \quad (.)^* - \text{комплексное сопряжение}$$

- Диагональный элемент КМ - средняя мощность шума в соответствующем элементе АР
- Недиagonальные элементы - функции корреляции сигналов в двух разных антеннах.
- Симметричные относительно диагонали элементы матрицы - комплексно сопряжены.
- КМ является эрмитовой.

## Частные случаи представления КМ

1. Собственный шум AP

$$\mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

2. Внешний источник шума малого углового размера.

$$\mathbf{X} = b(t)\Phi \quad (\Phi - \text{вектор-фазор источника шума})$$

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle = \langle |b(t)|^2 \rangle \Phi\Phi^H$$

3. Несколько ( $J$ ) взаимно некоррелированных внешних источников шума малого углового размера.

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^J b_i(t)\Phi_i \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^J \langle |b_i(t)|^2 \rangle \Phi_i\Phi_i^H$$

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\varphi_i\right) \\ \boxtimes \\ \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}(N-1)d\sin\varphi_i\right] \end{pmatrix}$$

#### 4. Внешний источник шума с угловой протяженностью.

Плоская волна излучается источником с угловым размером  $d\phi$ .

$\zeta(\phi)d\phi$  - комплексная амплитуда сигнала в первом элементе AP, где функция  $\zeta(\phi)$  - угловая плотность комплексной амплитуды. Комплексная амплитуда сигнала от всего протяженного источника в элементе AP с номером  $n$  будет равна

$$X_n = \int \exp[j2\pi d_\lambda (n-1) \sin \phi] \zeta(\phi) d\phi \quad (\text{интеграл по протяженному источнику}) \quad d_\lambda = d/\lambda$$

Разные участки протяженного источника излучают статистически независимые комплексные амплитуды

$$\Rightarrow \langle \zeta(\phi) \zeta^*(\phi') \rangle = \sigma(\phi) \delta(\phi - \phi')$$

$\delta(\phi)$  -  $\delta$ -функция,  $\sigma(\phi)$  - угловая плотность мощности источника сигнала

Тогда 
$$\langle X_n X_m^* \rangle = \int \exp[j2\pi d_\lambda (n-m) \sin \phi] \sigma(\phi) d\phi$$

Протяженный источник с лапласовской плотностью вероятности углового распределения мощности

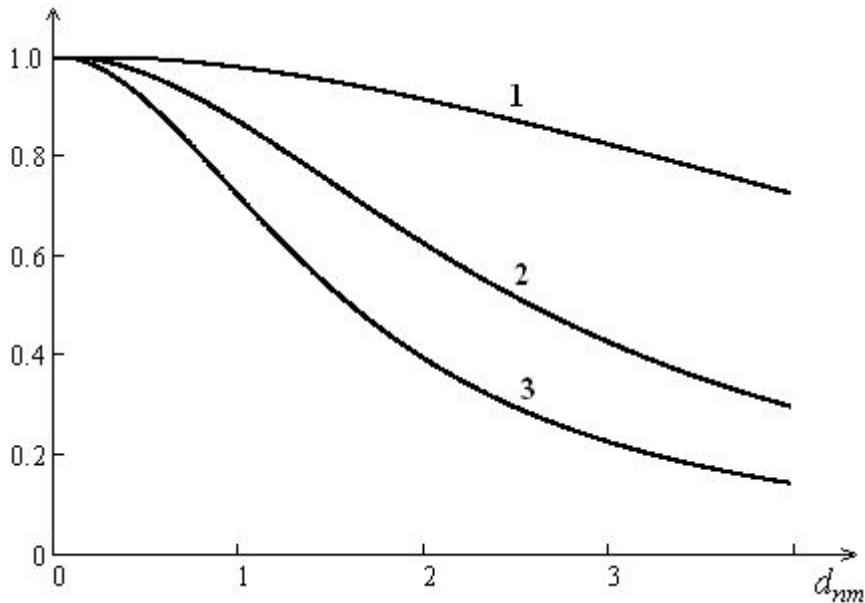
$$\sigma(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}\Delta\phi_s} \exp\left(-\sqrt{2} \frac{|\phi - \phi_0|}{\Delta\phi_s}\right)$$

$\phi_0$  - направление на центр источника,

$\Delta\phi_s$  - угловая ширина источника по уровню половинной мощности

Источник расположен в малой области углов ( $\phi \approx \sin \phi$ ),  
 угловая ширина источника мала ( $\Delta \phi_s \ll 2\pi$ )

$$\langle X_n X_m^* \rangle \approx \frac{1}{1 + 0.5 [2\pi d_\lambda \Delta \phi_s (n - m)]^2} \exp[j2\pi d_\lambda (n - m) \varphi_0]$$



Коэффициент корреляции для  
 лапласовского источника с  
 угловым размером  $2^\circ$ ,  
 $5^\circ$  и  $8^\circ$  (кривые 1, 2 и 3)

**Модуль коэффициента корреляции уменьшается при увеличении угловой ширины  $\Delta \phi_s$  источника и расстояния между  $n$ -ым и  $m$ -ым элементами АР**

## 7. ОСШ на выходе антенной решетки

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right) \\ \vdots \\ \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} (N-1) d \sin \varphi\right] \end{pmatrix}$$

Вектор сигнала

Вектор весовых коэффициентов

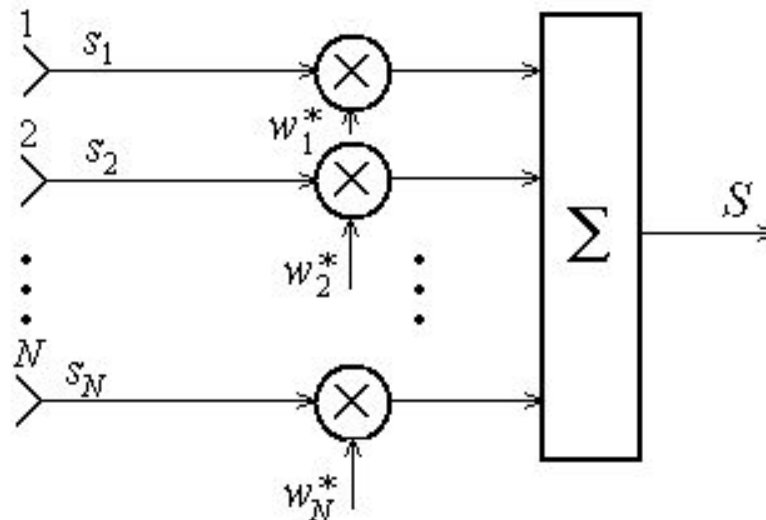
$$\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots, w_N)^T$$

$$S = a(S_1, S_2, \dots, S_n, \dots, S_N)^T$$

$$S = a \sum_{n=1}^N w_n^* S_n = a \mathbf{W}^H \mathbf{S}$$

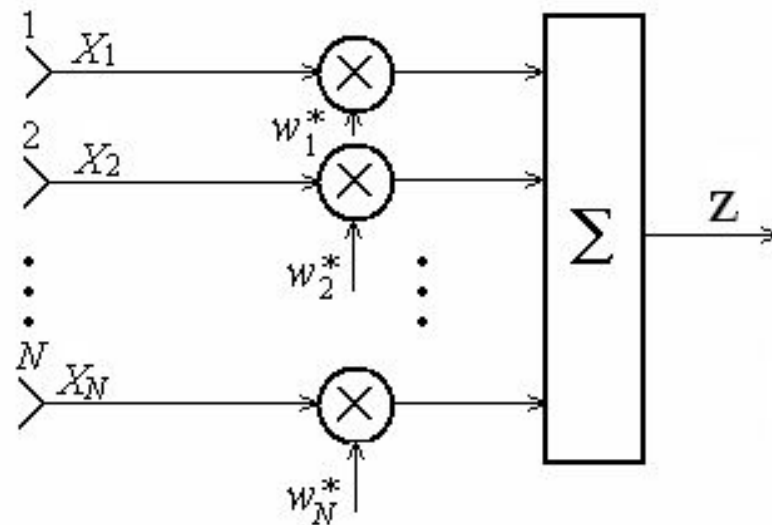
Амплитуда сигнала на выходе АР

Скалярное произведение векторов



$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_N)^T$$

$$Z = \sum_{n=1}^N w_n^* X_n = \mathbf{W}^H \mathbf{X}$$



$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N w_n^* w_m \langle X_n X_m^* \rangle = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N w_n^* M_{nm} w_m = \\ &= \mathbf{W}^H \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle \mathbf{W} = \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}! \end{aligned}$$

Средняя  
мощность шума  
на выходе АР

Корреляционная  
матрица (КМ) шума

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle$$

$$\eta = \frac{|a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}}$$

- отношение мощности сигнала к средней  
мощности шума на выходе АР (ОСШ)



# Максимизация ОСШ

1. Имеется только собственный шум приемных устройств. КМ  $\mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{I}$ .

$\eta = \frac{|a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2}{\sigma^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}$  - Отношение двух квадратичных форм не зависит от нормировки  $\mathbf{W}$ .  
 Поэтому вектор  $\mathbf{W}$  можно определить с точностью до скалярного комплексного множителя.

$\mathbf{W}^H \mathbf{W} = 1$  - нормировка весового вектора

$\eta = \frac{|a|^2}{\sigma^2} |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2$  - Оптимальный вектор -  $\mathbf{W}_0 = \gamma \mathbf{S}$

С учетом нормировки  $\mathbf{W}_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}^H \mathbf{S}}} \mathbf{S}$

Максимальное ОСШ

$$\eta_{\max} = \frac{|a|^2}{\sigma^2} (\mathbf{S}^H \mathbf{S}) = \frac{|a|^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N |S_n|^2 \quad \eta_{\max} = \frac{|a|^2}{\sigma^2} N$$



2. Имеются внешние шумовые помехи и собственный шум приемных устройств.

$$\eta = \frac{|a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}}$$

Введем вспомогательный вектор  $\mathbf{V}$ , такой, что  $\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-0.5} \mathbf{V}$ .

$$\eta = \frac{|a|^2 |\mathbf{V}^H \mathbf{M}^{-0.5} \mathbf{S}|^2}{\mathbf{V}^H \mathbf{V}}$$

Для максимального ОСШ, вектор  $\mathbf{V}$  должен быть параллелен вектору  $\mathbf{M}^{-0.5} \mathbf{S}$ .  
Следовательно

$$\mathbf{W} = \gamma \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \quad \mathbf{M}^{-1} \text{ – матрица, обратная по отношению к КМ шума,} \\ \gamma \text{ – произвольный скалярный множитель.}$$

**Оптимальный весовой вектор находится как произведение обратной корреляционной матрицы суммарного шума на вектора сигнала**

$$\eta_{\max} = |a|^2 \frac{|\mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}|^2}{\mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}} = |a|^2 \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}$$

Максимальное ОСШ



### 3. Максимизация ОСШ при фиксированной амплитуде полезного сигнала на выходе АР.

$$\eta = \frac{|a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}} \quad \text{Считаем } \mathbf{W}^H \mathbf{S} = 1.$$

Максимизация ОСШ эквивалентна минимизации средней выходной мощности

$$\min_{\mathbf{W}^H} \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W} \quad \text{при условии} \quad \mathbf{W}^H \mathbf{S} = 1$$

Функционал Лагранжа

$$L = \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W} - \mu (\mathbf{W}^H \mathbf{S} - 1) \quad L = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N w_p^* \mathbf{M}_{pq} w_q - \mu \left[ \sum_{p=1}^N w_p^* S_p - 1 \right]$$

$$\frac{dL}{dw_i^*} = \sum_{q=1}^N \mathbf{M}_{iq} w_q - \mu S_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \mathbf{W} = \mu \mathbf{S}$$

$$\mu = (\mathbf{S}^H \mathbf{M} \mathbf{S})^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W} = \frac{1}{(\mathbf{S}^H \mathbf{M} \mathbf{S})} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}$$

$$\eta_{\max} = \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}$$

Оптимальный  
вектор

Максимальное  
ОСШ



4. В системах связи полезный сигнал передается и принимается непрерывно.

Вектор входного процесса  $\mathbf{Y} = a\mathbf{S} + \mathbf{X}$  - вектор смеси шума и полезного сигнала.

Шум и сигнал некоррелированы между собой.

Полная КМ равна сумме КМ шума и сигнала

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M} + \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}\mathbf{S}^H$$

---

Весовой вектор

$$\mathbf{W}_0 = \gamma \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{S}$$

вместо

$$\mathbf{W} = \mu \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}$$

Как связаны векторы  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{W}_0$ ?

В соответствии с леммой об обращении матриц имеем

$$\mathbf{M}_0^{-1} = \left( \mathbf{M} + \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}\mathbf{S}^H \right)^{-1} = \mathbf{M}^{-1} - \frac{\langle |a|^2 \rangle \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}\mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1}}{1 + \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \gamma \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} - \gamma \frac{\langle |a|^2 \rangle \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}\mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}}{1 + \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}} = \gamma \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} - \gamma \frac{\langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}}{1 + \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} = \\ &= \gamma \left( \frac{1}{1 + \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}} \right) \mu \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} = \gamma \mu \left( \frac{1}{1 + \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}} \right) \mathbf{W} = \gamma' \mathbf{W} \end{aligned}$$

Новая константа

$$\gamma' = \gamma \mu (1 + \langle |a|^2 \rangle \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^{-1} \quad \text{не влияет на ОСШ}$$

**Наличие сигнальной компоненты в полной КМ не влияет на выходное ОСШ АР**



## 5. Протяженный источник

$\mathbf{W}^H \mathbf{M}_S \mathbf{W}$  - амплитуда сигнала на выходе АР,  $\mathbf{M}_S$  - КМ полезного сигнала

$$\text{ОСШ} \quad \eta = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{M}_S \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}}$$

---

Максимум отношения двух квадратичных форм достигается, когда вектор  $\mathbf{W}$  равен собственному вектору  $\mathbf{U}_1$  матрицы  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_S$ , соответствующему максимальному собственному числу  $\mu_1$

Вектор  $\mathbf{U}_1$  является собственным для обратной матрицы  $(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_S)^{-1} = (\mathbf{M}_S)^{-1} \mathbf{M}$ , но соответствующий теперь минимальному собственному числу  $1/\mu_1$ .

Если сигнал наблюдается на фоне собственного шума, то  $\mathbf{M}^{-1} = \sigma^{-2} \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_S = \sigma^{-2} \mathbf{M}_S$ . Следовательно, оптимальным весовым вектором является собственный вектор сигнальной КМ  $\mathbf{M}_S$ , соответствующий максимальному собственному числу  $\lambda_1$ .



## 8. Оценка корреляционной матрицы шума

В случае гауссова шума максимально правдоподобная оценка КМ шума по  $L$  статистически независимым выборкам входного процесса имеет вид \_\_\_\_\_

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbf{X}(j) \mathbf{X}^H(j)$$

$\mathbf{X}(j)$  –  $N$ -мерный вектор комплексных амплитуд шума в  $j$ -ый момент времени,  
 $N$  – число элементов АР.

$$\hat{\mathbf{M}}_{pp} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L |x_p(j)|^2$$

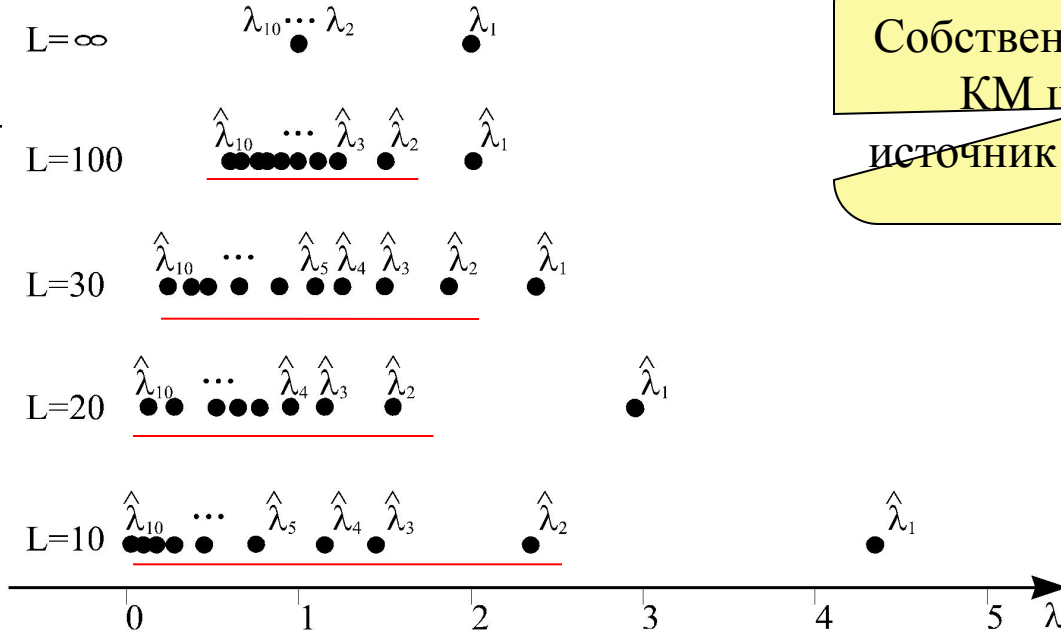
$$\hat{\mathbf{M}}_{pq} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L x_p(j) x_q^*(j)$$

Оценочная КМ обладает следующими основными свойствами:

1. Является эрмитовой и состоятельной, так что  $\lim_{L \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$
2. При  $L \geq N$  имеет  $N$  положительных случайных собственных чисел.
3. При  $L < N$  имеет  $L$  положительных случайных собственных чисел, неравных нулю, и  $N-L$  нулевых собственных чисел. В этом случае матрица является вырожденной и не имеет обратной матрицы.

При конечном числе выборок  $L$  наблюдается разброс шумовых собственных чисел, появляются собственные числа, близкие к нулю.

$N=10$



Собственные числа точной КМ шума  $\mathbf{M}$  (один источник шумовой помехи)

Разброс шумовых собственных чисел выборочной КМ

Модифицированная максимально правдоподобная оценка КМ для нестационарных входных процессов

$$\hat{\mathbf{M}}(L) = \frac{(1-\alpha)}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \alpha^{L-l} \mathbf{X}(L-l) \mathbf{X}^H(L-l), \quad (0 < \alpha < 1)$$

Весовые множители придают больший вес последним выборкам входного процесса

## 9. Свойства прямой и обратной корреляционных матриц

Собственные числа  $\lambda_j$  и собственные векторы  $\mathbf{U}_j$  матрицы  $\mathbf{M}$  находятся из решения характеристического уравнения степени  $N$  и системы  $N$  линейных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \psi_N(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}) = \lambda^N - \beta_1 \lambda^{N-1} - \beta_2 \lambda^{N-2} - \dots - \beta_N = 0, \\ \mathbf{M} \mathbf{U}_j &= \lambda_j \mathbf{U}_j \quad (j=1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

В  $N$ -мерном векторном пространстве сигналов собственные векторы  $\mathbf{U}_j$  ( $j=1 \div N$ ) образуют ортонормированный базис. В этом базисе, матрица  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$(2) \quad \mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H, \quad \mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N) \quad \text{- унитарная матрица}$$

$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$  - диагональная матрица, составленная из собственных чисел  $\lambda_j$ .

$\mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$  - проекционная матрица или матрица-проектор на подпространство вектора  $\mathbf{U}_j$

$$(\mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H) \mathbf{A} = (\mathbf{U}_j^H \mathbf{A}) \mathbf{U}_j$$

$$(3) \quad \mathbf{I} = \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \quad \text{- представление единичной матрицы}$$





$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H.$$

Представление обратной КМ в виде разложения по проекционным матрицам.

Два примера.

### 1. Один внешний источник шума

$$\mathbf{M} = \sigma^2 (\mathbf{I} + \nu \Phi \Phi^H) \quad \nu = \langle |b(t)|^2 \rangle / \sigma^2 \quad \Phi^H \Phi = N \quad \text{- плоские волны}$$

$$\mathbf{M}\Phi = \sigma^2 (1 + \nu N) \Phi \quad \lambda_1 = \sigma^2 (1 + \nu N) \quad \mathbf{U}_1 = \Phi / \sqrt{N}$$

$\lambda_2 = \sigma^2$  - имеет кратность  $N-1$

Учитывая, что  $\mathbf{M} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$ ,  $\mathbf{I} = \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$  получим

$$\mathbf{M} = \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) + \lambda_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H.$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) + \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H$$

Представление прямой и обратной КМ в виде разложений по проекционным матрицам

2. Входной шум создается собственным шумом с мощностью  $\sigma^2$  в каждом элементе AP и двумя некоррелированными дискретными источниками

$$(1) \quad \mathbf{M} = \sigma^2 \left[ \mathbf{I} + v_1 \Phi_1 \Phi_1^H + v_2 \Phi_2 \Phi_2^H \right] \quad v_j = \langle |b_j(t)|^2 \rangle / \sigma^2$$

$$(2) \quad \lambda_{1,2} = \sigma^2 \left[ 1 + N \frac{v_1 + v_2}{2} \pm N \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)^2}{4} + v_1 v_2 |g_{12}|^2} \right]$$

$$|g_{12}|^2 = \frac{\sin^2[(2\pi/\lambda)dN(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)]}{N^2 \sin^2[(2\pi/\lambda)d(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)]}$$

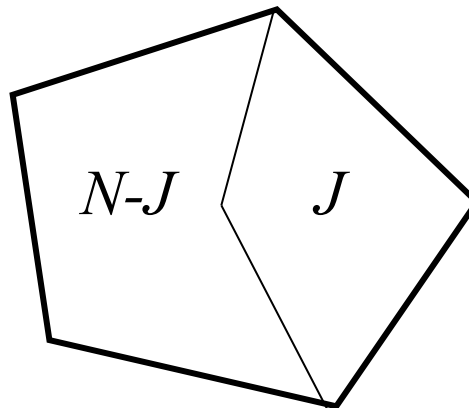
$$(3) \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H) + \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H$$

Обобщение на случай произвольного числа  $J$  ( $J < N$ ) источников некоррелированных сигналов с линейно независимыми векторами  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_J$

$$(1) \quad \mathbf{M} = \sigma^2 \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right) + \sum_{j=1}^J \lambda_j \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$$

$$(2) \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right) + \sum_{j=1}^J \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$$

Подпространство  
собственного шума



$N$ -мерное пространство  
разбивается на два  
подпространства

Подпространство внешних  
источников шума

## Другой метод представления обратной КМ

Метод основан на свойствах характеристического и минимального многочленов КМ

Характеристический многочлен: \_\_\_\_\_

$$(1) \quad \psi_N(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}) = \lambda^N - \beta_1 \lambda^{N-1} - \beta_2 \lambda^{N-2} - \dots - \beta_N$$

**Теорема Гамильтона – Кэли:** произвольная матрица  $\mathbf{M}$  удовлетворяет своему характеристическому многочлену, то есть  $\psi_N(\mathbf{M}) = [\mathbf{0}]$  или

$$(2) \quad \mathbf{M}^N - \beta_1 \mathbf{M}^{N-1} - \beta_2 \mathbf{M}^{N-2} - \dots - \beta_N \mathbf{I} = [\mathbf{0}]$$

Если КМ  $\mathbf{M}$  имеет кратные собственные числа, то существует минимальный многочлен, который также является аннулирующим для КМ  $\mathbf{M}$ .

Он является делителем характеристического многочлена, имеет наименьшую степень и единичный коэффициент при старшем члене.

Покажем, что КМ  $\mathbf{M}$  имеет минимальный многочлен и его степень связана с числом внешних источников шума. Считаем, что  $\sigma^2=1$ , волновые фронты являются плоскими

1. Один источник шума ( $J=1$ )  $\mathbf{M}^2 = \beta_1 \mathbf{M} + \beta_2 \mathbf{I}$

Подставим  $\mathbf{M} = \mathbf{I} + \nu \Phi \Phi^H$

$$(\mathbf{I} + \nu \Phi \Phi^H)^2 = \beta_1 \mathbf{I} + \beta_1 \nu \Phi \Phi^H + \beta_2 \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{I} + \nu \Phi \Phi^H)^2 = \mathbf{I} + 2\nu \Phi \Phi^H + \nu^2 \Phi \Phi^H \Phi \Phi^H = \mathbf{I} + 2\nu \Phi \Phi^H + \nu^2 N \Phi \Phi^H$$

$$\mathbf{I} + 2\nu \Phi \Phi^H + \nu^2 N \Phi \Phi^H = \beta_1 \mathbf{I} + \beta_1 \nu \Phi \Phi^H + \beta_2 \mathbf{I}$$

$$\beta_1 = 2 + \nu N, \quad \beta_2 = -(1 + \nu N)$$

$$\psi_2(\lambda) = \lambda^2 - \beta_1 \lambda - \beta_2$$

$$\lambda_1 = 1 + \nu N \quad \lambda_2 = 1$$

Многочлен второй степени является минимальным многочленом КМ  $\mathbf{M}$

Корни минимального многочлена являются собственными числами КМ  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}^{-1} = c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{M}$$

Обратную КМ можно представить в виде линейной комбинации матриц  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{M}$

$$c_0 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{2 + \nu N}{1 + \nu N}; \quad c_1 = \frac{1}{\beta_2} = -\frac{1}{1 + \nu N}$$

2. Два некоррелированных источников шума ( $J=2$ ).

Линейно независимыми являются первые три матрицы  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}^2$ , то есть

$$\mathbf{M}^3 = \beta_1 \mathbf{M}^2 + \beta_2 \mathbf{M} + \beta_3 \mathbf{I}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \nu_1 \Phi_1 \Phi_1^H + \nu_2 \Phi_2 \Phi_2^H$$

$$\left[ \begin{array}{l} \beta_1 = 3 + (\nu_1 + \nu_2)N \\ \beta_2 = -[3 + 2(\nu_1 + \nu_2)N + \nu_1 \nu_2 N^2 (1 - |g_{12}|^2)] \\ \beta_3 = 1 + (\nu_1 + \nu_2)N + \nu_1 \nu_2 N^2 (1 - |g_{12}|^2) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{M}^{-1} = c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{M} + c_2 \mathbf{M}^2 \quad c_0 = -\frac{\beta_2}{\beta_3}, \quad c_1 = -\frac{\beta_1}{\beta_3}, \quad c_2 = \frac{1}{\beta_3}$$

### 3. Произвольное число $J$ некоррелированных источников

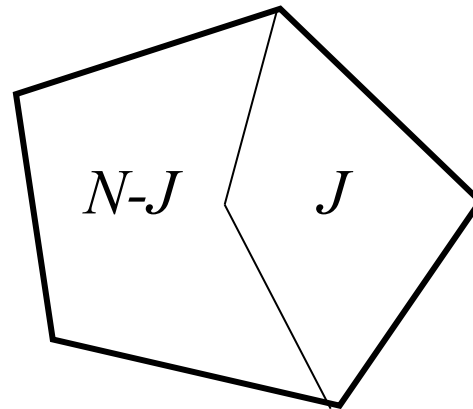
---

$$\psi(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^N \psi(\lambda_i) \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H$$

$$\mathbf{M}^{-1} = c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{M} + c_2 \mathbf{M}^2 + \dots + c_{K-1} \mathbf{M}^{K-1}$$

Число  $K$  неравных между собой собственных чисел удовлетворяет условию  $K \leq J+1$ .

В подпространстве собственного шума имеется одно собственное число кратности  $N-J$ .



Число неравных между собой собственных чисел меньше или равно  $J$

## Лекции 4-5. Методы оптимальной пространственной обработки сигналов в антенных решетках

- При оптимальной обработке считается, что вектор полезного сигнала  $\mathbf{S}$  и корреляционная матрица  $\mathbf{M}$  собственного шума и внешних помех известны точно.
- На практике это условие обычно не выполняется.
- Исследование методов определения оптимального весового вектора  $\mathbf{W}$  имеет большое значение для изучения адаптивных методов обработки сигналов, когда КМ шума  $\mathbf{M}$  оценивается с помощью конечного числа выборок шума.
- Методы определения оптимального весового вектора  $\mathbf{W}$  отличаются выбором базисных векторов в  $N$ -мерном сигнальном пространстве.
- Будем рассматривать четыре базисные системы векторов, состоящие из:
  - а) собственных векторов КМ шума  $\mathbf{M}$ ;
  - б) векторов полезного сигнала и внешних источников шума;
  - в) степенных векторов;
  - г) суммарно-разностных весовых векторов.





# 1. Метод собственных векторов КМ шума

---

$$\mathbf{W} = \gamma \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \quad \leftarrow$$

$$\mathbf{W} = \gamma \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} (\mathbf{U}_j^H \mathbf{S}) \mathbf{U}_j.$$

$$\eta_{\max} = \sum_{j=1}^N \frac{|a|^2}{\lambda_j} |\mathbf{U}_j^H \mathbf{S}|^2$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H.$$

$$\eta_{\max} = |a|^2 \mathbf{S}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}$$

**Каждое слагаемое представляет собой долю ОСШ, соответствующую отдельному собственному вектору.**

## 1. Сигнал наблюдается на фоне собственного шума AP.

$$(1) \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$$

- представление единичной матрицы для произвольной ортонормированной системы векторов  $\mathbf{U}_j$  ( $j=1 \div N$ ).
- систему векторов выберем так, чтобы вектор  $\mathbf{U}_1$  совпадал по направлению с вектором сигнала  $\mathbf{S}$ .

$$(2) \quad \mathbf{U}_1 = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1/2} \mathbf{S}$$



$$(3) \quad \eta_{\max} = \sum_{j=1}^N \frac{|a|^2}{\lambda_j} \left| \mathbf{U}_j^H \mathbf{S} \right|^2 \quad \lambda_j = \sigma^2$$

$$(4) \quad \eta_{\max} = \frac{|a|^2}{\sigma^2} (\mathbf{S}^H \mathbf{S})$$

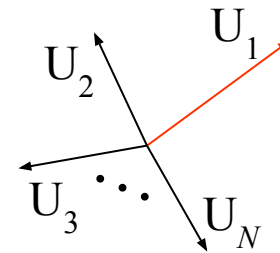
## 2. Сигнал наблюдается на фоне собственного шума AP и одного внешнего источника шума.

$$(1) \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) + \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H$$

$$(2) \quad \mathbf{W} = \gamma \left[ \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) \mathbf{S} + \frac{1}{\lambda_1} (\mathbf{U}_1^H \mathbf{S}) \mathbf{U}_1 \right]$$

$$(3) \quad \eta_{\max} = \frac{|a|^2}{\sigma^2} \mathbf{S}^H (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) \mathbf{S} + \frac{|a|^2}{\lambda_1} |\mathbf{U}_1^H \mathbf{S}|^2$$

$$(4) \quad \eta = \frac{|a|^2 |\mathbf{S}^H \mathbf{S}|^2}{\sigma^2 \mathbf{S}^H (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) \mathbf{S} + \lambda_1 |\mathbf{U}_1^H \mathbf{S}|^2}$$



ОСШ при  
оптимальной  
обработке сигнала

ОСШ при  
согласованной  
обработке сигнала



$$(1) \mathbf{Y}_{\text{вблх}} = \mathbf{S}_{\text{вблх}} + \mathbf{X}_{\text{вблх}} = \mathbf{W}^H (a\mathbf{S} + \mathbf{X}) = \mathbf{W}^H \mathbf{Y} \quad \mathbf{Y} = a\mathbf{S} + \mathbf{X}$$

$$(2) \mathbf{W} = \gamma \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} (\mathbf{U}_j^H \mathbf{S}) \mathbf{U}_j. \quad Y_{\text{вблх}} = \gamma \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} (\mathbf{S}^H \mathbf{U}_j) (\mathbf{U}_j^H \mathbf{Y})$$

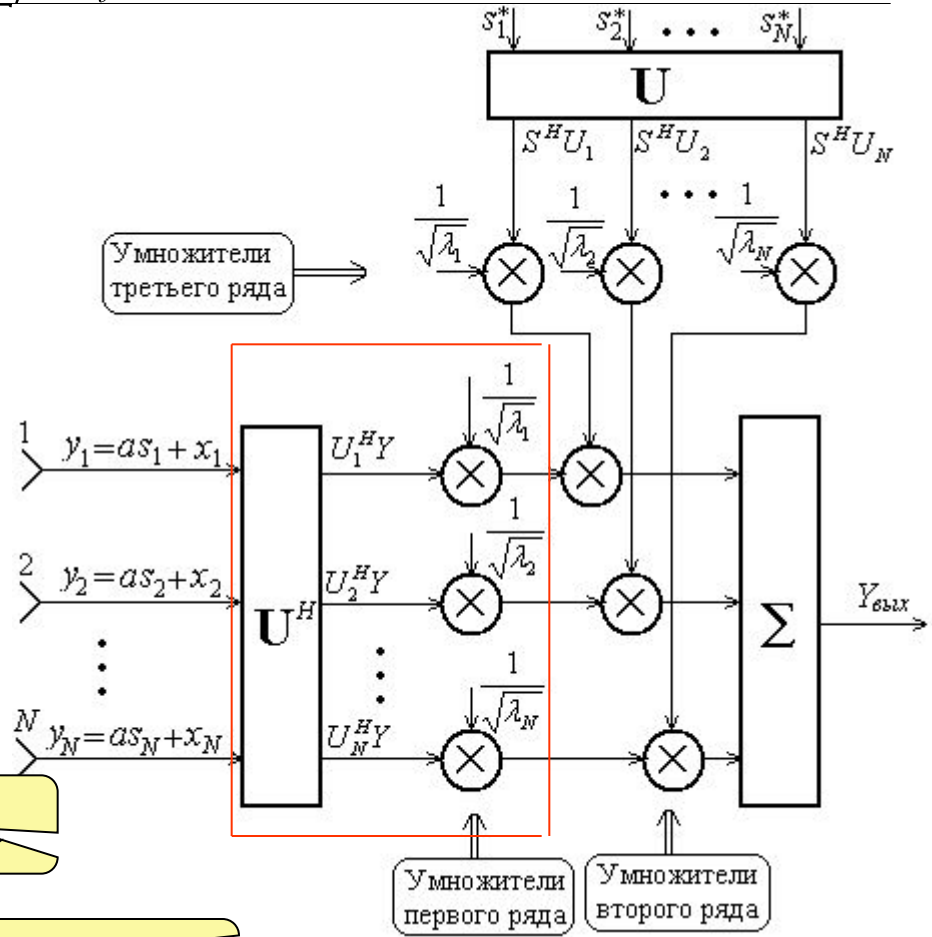
$$(3) \left\langle \left( \mathbf{U}_j^H \mathbf{X} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \right) \left( \mathbf{U}_i^H \mathbf{X} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^H \right\rangle =$$

$$= \mathbf{U}_j^H \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle \mathbf{U}_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_j \lambda_i}} =$$

$$= \mathbf{U}_j^H \left( \sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right) \mathbf{U}_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_j \lambda_i}} = \delta_{ji}$$

Декоррелятор шума

“Обеляющий” фильтр



### 3. Сигнал наблюдается на фоне собственного шума AP и J внешних источников шума.

Мощности внешних источников являются достаточно большими.

При этом первые J собственных чисел значительно превосходят значение мощности собственного шума.

$$(1) \quad \mathbf{W} = \gamma \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} (\mathbf{U}_j^H \mathbf{S}) \mathbf{U}_j.$$

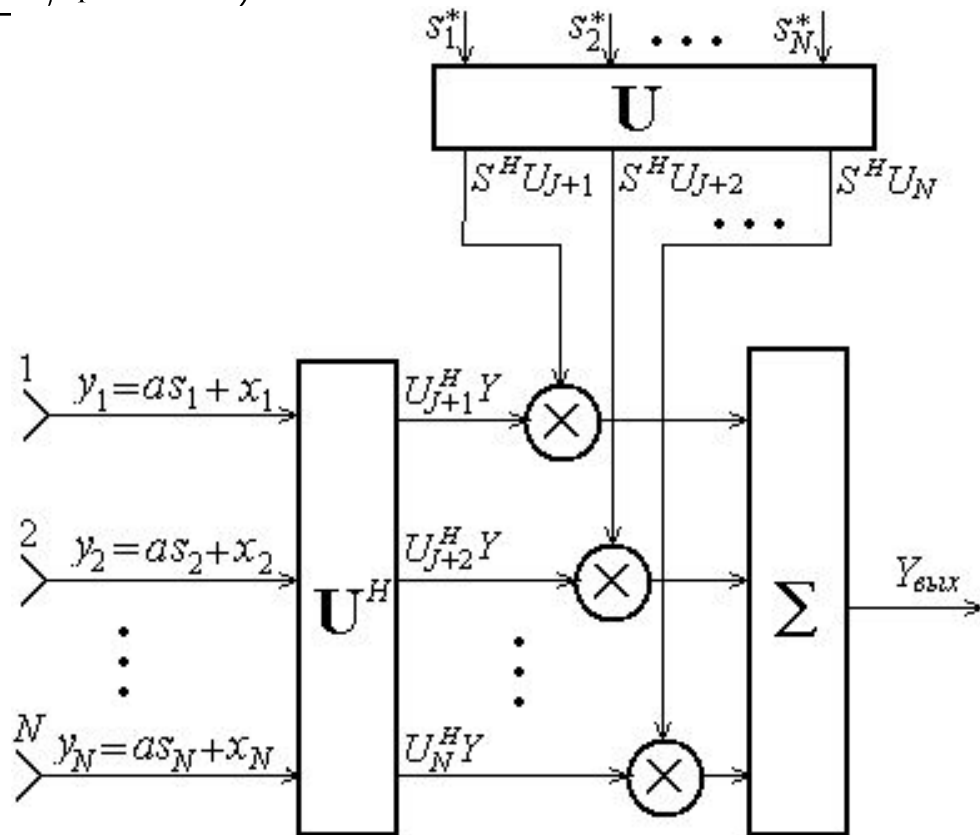
$$(2) \quad \mathbf{W} \approx \gamma \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=J+1}^N (\mathbf{U}_j^H \mathbf{S}) \mathbf{U}_j = \gamma \frac{1}{\sigma^2} \left( \sum_{j=J+1}^N \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right) \mathbf{S} = \gamma \frac{1}{\sigma^2} \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right) \mathbf{S}$$

$$(3) \quad Y_{\text{вых}} \approx \sum_{j=J+1}^N (\mathbf{S}^H \mathbf{U}_j) (\mathbf{U}_j^H \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^H \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right) \mathbf{Y}$$

Считаем,  
что  $\gamma/\sigma^2=1$ .

$$(4) \quad \eta_{\text{max}} \approx \frac{|a|^2}{\sigma^2} \sum_{j=J+1}^N |\mathbf{U}_j^H \mathbf{S}|^2 = \frac{|a|^2}{\sigma^2} \mathbf{S}^H \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right) \mathbf{S}$$

$$Y_{\text{вых}} \approx \sum_{j=J+1}^N (\mathbf{S}^H \mathbf{U}_j) (\mathbf{U}_j^H \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^H \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^J \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \right) \mathbf{Y}$$

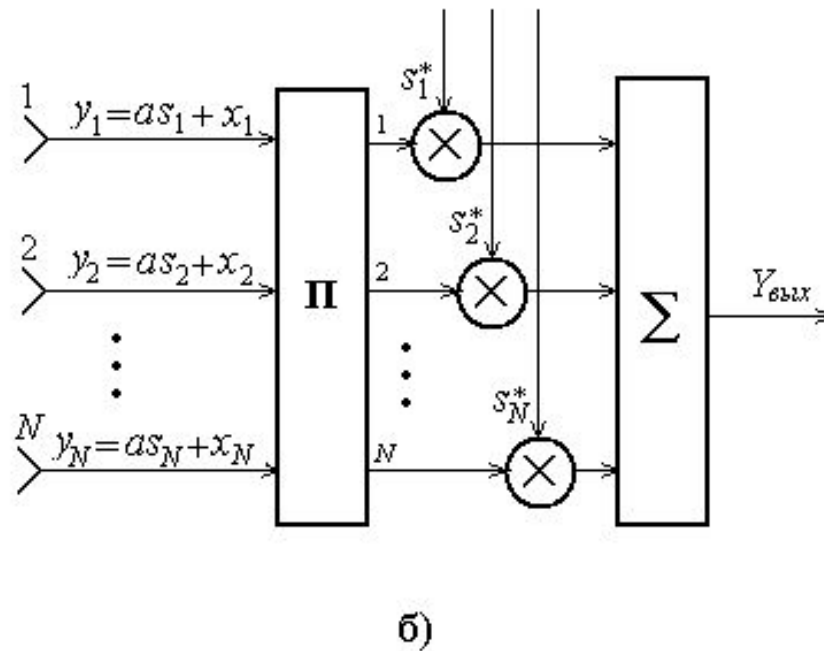
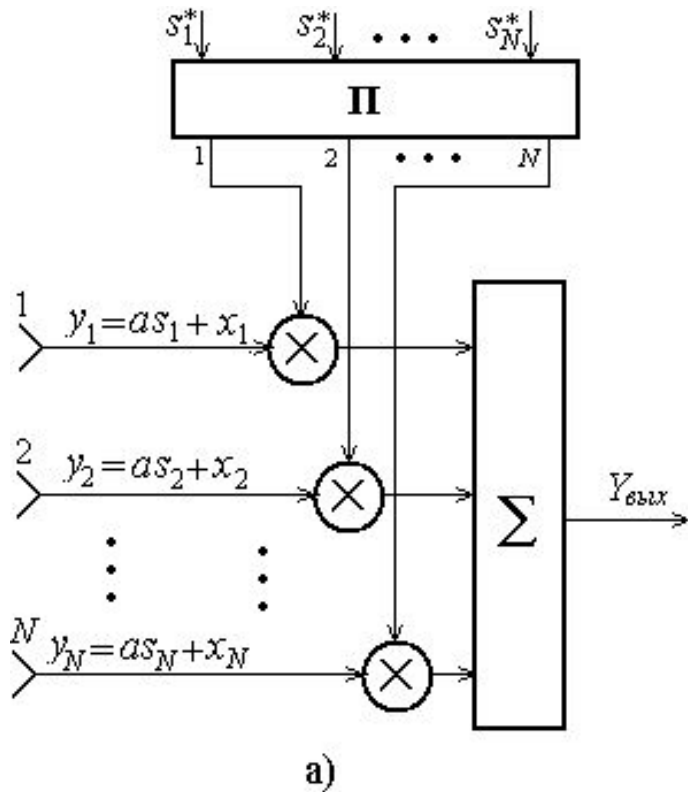


Данная обработка сигнала проще, так как не требует знания собственных чисел, а преобразователь  $\mathbf{U}^H$  имеет меньшее число выходов.

$$\sum_{j=J+1}^N (\mathbf{S}^H \mathbf{U}_j)(\mathbf{U}_j^H \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^H \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right) \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{I} - \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$$

Матрица проектирования на подпространство собственного шума



## 2. Метод векторов полезного сигнала и внешних источников шума

$$(1) \mathbf{M} = \sum_{i=1}^J \langle |b_i(t)|^2 \rangle \Phi_i \Phi_i^H + \sigma^2 \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{M}\mathbf{W} = \gamma \mathbf{S}$$

$$(2) \left( \sum_{i=1}^J \langle |b_i(t)|^2 \rangle \Phi_i \Phi_i^H + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{W} = \gamma \mathbf{S}$$

Разделим обе части равенства на  $\sigma^2$  и положим, что  $\gamma/\sigma^2=1$ . Получим, что

$$(3) \left( \sum_{i=1}^J v_i \Phi_i \Phi_i^H + \mathbf{I} \right) \mathbf{W} = \mathbf{S} \quad v_i = \langle |b_i(t)|^2 \rangle / \sigma^2 \quad - \text{отношение мощности внешнего шума к мощности собственного шума в элементе AP}$$

$$(4) \mathbf{W} = \mathbf{S} - \sum_{i=1}^J v_i x_i \Phi_i \quad x_i = \Phi_i^H \mathbf{W} \quad (i = 1, \dots, J)$$

$$(5) x_j = \Phi_j^H \left( \mathbf{S} - \sum_{i=1}^J v_i x_i \Phi_i \right), \quad (j = 1, \dots, J)$$

$$(6) \sum_{i=1}^J (\delta_{ij} + v_i \Phi_j^H \Phi_i) x_i = \Phi_j^H \mathbf{S}, \quad (j = 1, \dots, J)$$

Система  $J$  линейных уравнений для определения  $x_j$





$$\sum_{i=1}^J (\delta_{ij} + v_i \Phi_j^H \Phi_i) x_i = \Phi_j^H \mathbf{S}, \quad (j = 1, \dots, J) \quad (1)$$

Для анализа полученного результата рассмотрим частные случаи

1) Имеется один внешний источник шума с параметрами  $v_1$  и  $\Phi_1$ .

$$\mathbf{W} = \mathbf{S} - v_1 x_1 \Phi_1 \quad (1 + v_1 N) x_1 = \Phi_1^H \mathbf{S} \quad (2)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{S} - \frac{v_1 \Phi_1^H \mathbf{S}}{1 + v_1 N} \Phi_1 \quad (3)$$

При  $v_1 \rightarrow \infty$ , весовой вектор AP слабо зависит от  $v_1$ .

Пренебрегая этой зависимостью, получаем приближенное выражение

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{S} - \frac{\Phi_1^H \mathbf{S}}{N} \Phi_1 = \left( \mathbf{I} - \frac{\Phi_1 \Phi_1^H}{N} \right) \mathbf{S} \quad (4)$$

2) Векторы  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_J$  внешних источников ортогональны, т.е.

$$(1) \quad \Phi_i^H \Phi_j = \begin{cases} 0; & (i \neq j) \\ N; & (i = j) \end{cases}$$


---

$$(2) \quad x_i = \frac{\Phi_i^H \mathbf{S}}{1 + v_i N}, \quad (i = 1 \div J)$$

$$(3) \quad \mathbf{W} = \mathbf{S} - \sum_{i=1}^J \frac{v_i \Phi_i^H \mathbf{S}}{1 + v_i N} \Phi_i$$

При больших мощностях внешних источников ( $v_j \rightarrow \infty$ ), весовой вектор AP слабо зависит от  $v_j$ . Пренебрегая этой зависимостью, получаем приближенное выражение

$$(4) \quad \mathbf{W} \approx \mathbf{S} - \sum_{i=1}^J \frac{\Phi_i^H \mathbf{S}}{\Phi_i^H \Phi_i} \Phi_i = \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^J \frac{\Phi_i \Phi_i^H}{N} \right) \mathbf{S} = \prod_{i=1}^J \left( \mathbf{I} - \frac{\Phi_i \Phi_i^H}{N} \right) \mathbf{S}$$

3) Другое простое решение получается тогда, когда векторы внешних источников шума  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_J$  ортогональны вектору полезного сигнала  $\mathbf{S}$ , т.е.

$$\Phi_i^H \mathbf{S} = 0 \quad \text{для всех } i.$$

$$\sum_{i=1}^J (\delta_{ij} + \nu_i \Phi_j^H \Phi_i) x_i = \Phi_j^H \mathbf{S}, \quad (j = 1, \dots, J)$$

Система уравнений имеет нулевое решение, т.е.  $x_i = 0$  для всех  $i$ .

Тогда  $\mathbf{W} = \mathbf{S}$

Оптимальная обработка совпадает с согласованной обработкой.

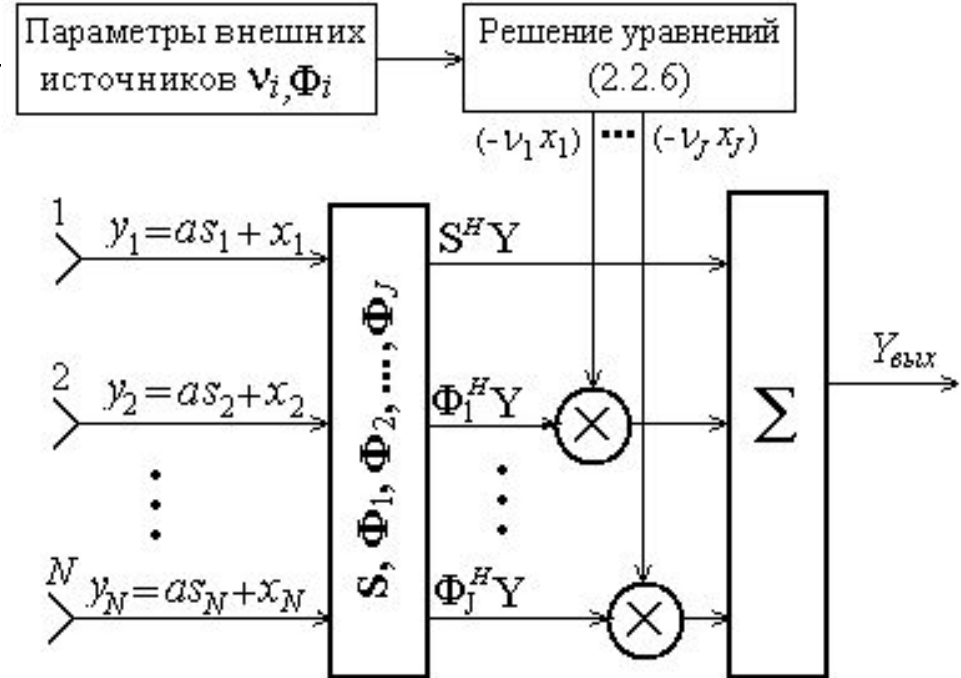
Это объясняется тем, что внешние источники шума не влияют на прием полезного сигнала, так как в направлениях на эти источники формируются нули ДН



$$\sum_{i=1}^J (\delta_{ij} + v_i \Phi_j^H \Phi_i) x_i = \Phi_j^H \mathbf{S}, \quad (j=1, \dots, J)$$



$$Y_{\text{вых}} = \mathbf{S}^H \mathbf{Y} - \sum_{i=1}^J v_i x_i \Phi_i^H \mathbf{Y}$$



В важном случае, когда  $J \ll N$ , обработка сигналов в существенно упрощается. Вместо решения системы уравнений размерности  $N$ , необходимо решить систему уравнений размерности  $J$ . Это упрощение обусловлено наличием априорных данных о числе внешних источников шума и их параметрах  $v_i, \Phi_i$ .

### 3. Метод степенных векторов

$$(1) \quad \mathbf{M}^{-1} = c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{M} + c_2 \mathbf{M}^2 + \dots + c_{K-1} \mathbf{M}^{K-1} \longrightarrow \mathbf{W} = \gamma \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}$$

Ранее мы установили, что число  $K$  линейно независимых степенных матриц равно степени минимального многочлена матрицы  $\mathbf{M}$  и при этом  $K \leq J+1$ , где  $J$  - число внешних источников шума.

$$(2) \quad \mathbf{W} = c_0 \mathbf{S} + c_1 \mathbf{M} \mathbf{S} + c_2 \mathbf{M}^2 \mathbf{S} + \dots + c_{K-1} \mathbf{M}^{K-1} \mathbf{S}$$

Выясним, чем определяется число линейно независимых векторов степенного базиса.

$$(3) \quad \mathbf{M} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \longrightarrow \psi(\lambda) \longrightarrow \psi(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^N \psi(\lambda_i) \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H$$

$$(4) \quad \psi(\mathbf{M}) \mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \psi(\lambda_i) (\mathbf{U}_i^H \mathbf{S}) \mathbf{U}_i$$

$$\psi(\mathbf{M}) \mathbf{S} = 0$$

Посмотрим, в каких случаях этот вектор будет нулевым.

$$(1) \quad \psi(\mathbf{M})\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\psi(\lambda_i)}_{\psi(\lambda_i)} (\underbrace{\mathbf{U}_i^H \mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i^H \mathbf{S}}) \mathbf{U}_i = 0$$

$$\psi(\lambda_i) = 0$$

$$\mathbf{U}_i^H \mathbf{S} = 0$$

Условие выполняется, когда собственные числа матрицы  $\mathbf{M}$  являются корнями многочлена  $\psi(\lambda)$ , т.е.  $\psi(\lambda)$  является минимальным многочленом матрицы  $\mathbf{M}$

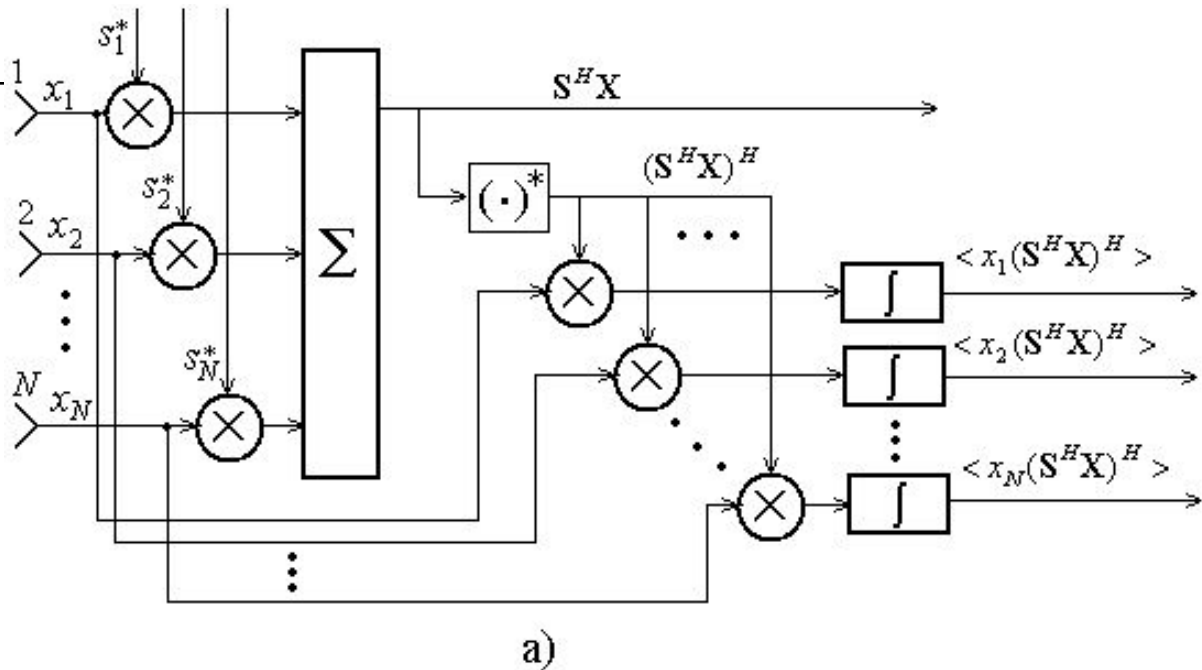
Условие выполняется, если вектор  $\mathbf{S}$  имеет нулевые проекции на некоторые собственные векторы.

- Чтобы выполнялось условие (1), достаточно, чтобы многочлен  $\psi(\lambda)$  имел корнями только те собственные числа, которые отвечают подпространствам с ненулевыми проекциями вектора  $\mathbf{S}$ .
- В этом случае мы получим многочлен, который будет делителем минимального многочлена и иметь степень  $K_0 \leq K \leq J+1$ .
- Этот многочлен называется минимальным аннулирующим вектор  $\mathbf{S}$  многочленом.

Рассмотрим вариант обработки с двумя степенными векторами  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{MS}$ , т.е. представим весовой вектор в виде

$$(1) \quad \mathbf{W} = c_0 \mathbf{S} + c_1 \mathbf{MS}$$

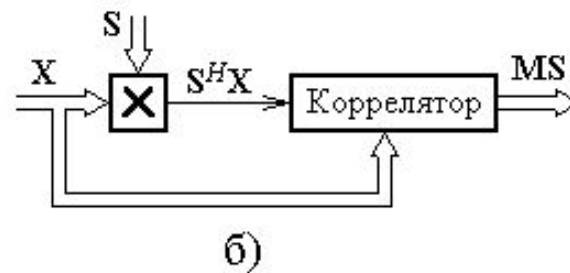
$$\begin{aligned} \mathbf{MS} &= \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle \mathbf{S} = \\ &= \langle \mathbf{X}(\mathbf{X}^H \mathbf{S}) \rangle = \\ &= \langle \mathbf{X}(\mathbf{S}^H \mathbf{X})^H \rangle \end{aligned}$$



Вектор  $\mathbf{MS}$  является корреляционным вектором

$$(2) \quad \langle x_j(\mathbf{S}^H \mathbf{X})^H \rangle, j = (1 \div N)$$

$$\mathbf{S}^H \mathbf{X} = \sum_k s_k^* x_k$$





В случае одного внешнего источника шума степенной базис из векторов  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{MS}$  является полным.

$$(1) \quad \mathbf{W} = c_0 \mathbf{S} + c_1 \mathbf{MS}$$

$$(2) \quad \mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{I} + \langle |b(t)|^2 \rangle \Phi \Phi^H = \sigma^2 (\mathbf{I} + \nu \Phi \Phi^H)$$

$$(3) \quad \mathbf{MS} = \sigma^2 [\mathbf{S} + \nu (\Phi^H \mathbf{S}) \Phi]$$

Вектор  $\mathbf{MS}$  становится параллельным вектору  $\mathbf{S}$  в трех случаях:

1 - внешний источник шума отсутствует ( $\nu=0$ );

2 - вектор полезного сигнала  $\mathbf{S}$  ортогонален вектору источника шума  $\Phi$  ( $\Phi^H \mathbf{S}=0$ );

3 - вектор  $\mathbf{S}$  равен вектору источника шума  $\Phi$ .

При параллельности векторов  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{MS}$  базис, состоящий из этих двух векторов, вырождается в базис, состоящий только из одного вектора  $\mathbf{S}$ .



## Пример использования двух базисных векторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{MS}$

Возможность уменьшения числа базисных векторов должна учитываться системой обработки сигнала, что можно сделать, применяя базисные векторы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{MS}$ .

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{F}_0 = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-0.5} \mathbf{S}, & \text{Условие ортогональности векторов } \mathbf{F}_0 \text{ и } \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_1 = \mathbf{M}\mathbf{F}_0 - \alpha_0 \mathbf{F}_0, & \mathbf{F}_0^H \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_0^H \mathbf{M}\mathbf{F}_0 - \alpha_0 = 0 \longrightarrow \alpha_0 = \mathbf{F}_0^H \mathbf{M}\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}_1^H \mathbf{F}_1)^{-0.5} \mathbf{F}_1, \end{cases}$$

$$(2) \quad \mathbf{W} = c_0 \mathbf{F}_0 + c_1 \mathbf{F}_1 \longrightarrow \eta = \frac{|S_{\text{вых}}|^2}{\langle |X_{\text{вых}}|^2 \rangle} = \frac{|a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}}$$

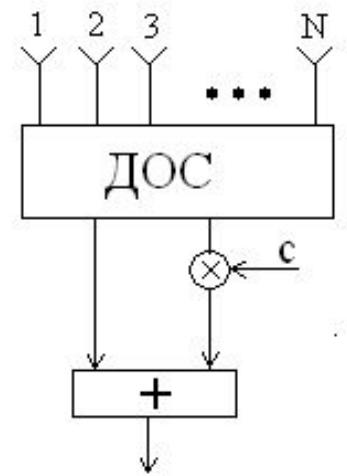
$$\langle |X_{\text{вых}}|^2 \rangle = \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W} = (c_0 \mathbf{F}_0 + c_1 \mathbf{F}_1)^H \mathbf{M} (c_0 \mathbf{F}_0 + c_1 \mathbf{F}_1)$$

$$(3) \quad \eta = \frac{|a|^2 c_0^2 |\mathbf{F}_0^H \mathbf{S}|^2}{c_0^2 \mathbf{F}_0^H \mathbf{M} \mathbf{F}_0 + 2c_0 c_1 \mathbf{F}_0^H \mathbf{M} \mathbf{F}_1 + c_1^2 \mathbf{F}_1^H \mathbf{M} \mathbf{F}_1}$$

ОСШ не зависит от нормировки вектора  $\mathbf{W}$ . Поэтому  $\mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + c\mathbf{F}_1$ !

- Обработка сигнала сводится к суммированию входных сигналов AP с весовыми векторами  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{F}_1$ .
- Вектор  $\mathbf{F}_0$  обеспечивает когерентное накопление полезного сигнала.
- Вектор  $\mathbf{F}_1$  в силу его ортогональности подавляет полезный сигнал и обеспечивает прием шума.
- Такая обработка сигнала интерпретируется, как формирование двух ортогональных ДН с помощью диаграммообразующей схемы (ДОС).
- Сигналы с выходов ДОС суммируются с действительным весом коэффициентом  $c$ .

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + c\mathbf{F}_1$$



$$(1) \quad \mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + c\mathbf{F}_1 \quad c = -(\mathbf{F}_0^H \mathbf{M} \mathbf{F}_1) / (\mathbf{F}_1^H \mathbf{M} \mathbf{F}_1)$$

$$(2) \quad \mathbf{F}_0^H \mathbf{M} \mathbf{F}_1 = \langle (\mathbf{F}_0^H \mathbf{X})(\mathbf{F}_1^H \mathbf{X})^H \rangle$$

Функция корреляции шумов, взятых с двух выходов ДОС

$$(3) \quad \mathbf{F}_1^H \mathbf{M} \mathbf{F}_1 = \langle |\mathbf{F}_1^H \mathbf{X}|^2 \rangle$$

Средняя мощность шума на выходе ДОС с весовым вектором  $\mathbf{F}_1$

Вычисление векторов  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{F}_1$ , коэффициента  $c$  и весовая обработка сигналов с помощью вектора  $\mathbf{W}$  реализуются с помощью простых операций сложения и умножения. При этом не требуется оценивание и обращение КМ шума, вычисление собственных чисел и векторов этой матрицы, знание параметров внешних источников шума.



$$(1) \quad \mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + c\mathbf{F}_1 \quad c = -(\mathbf{F}_0^H \mathbf{M} \mathbf{F}_1) / (\mathbf{F}_1^H \mathbf{M} \mathbf{F}_1)$$

Весовой вектор (1) является оптимальным в ситуациях, когда КМ шума имеет два отличных друг от друга собственных числа с кратностью одного  $N_1$  и другого  $N_2$ , при условии  $N_1 + N_2 = N$ .

**Пример 1.** На входе АР имеется собственный шум и шум одного внешнего источника. КМ имеет одно собственное число кратности  $N-1$ , связанное с подпространством собственного шума, и другое простое собственное число, связанное с одномерным подпространством внешнего источника шума.

**Пример 2.** На входе АР имеются  $J$  ( $2 \leq J \leq N-1$ ) ортогональных источников шума одинаковой мощности и собственный шум. Условие ортогональности – ортогональность векторов  $\Phi_i$  источников шума ( $i=1, 2, \dots, N-1$ ).

КМ шума имеет одно собственное число кратности  $N-J$ , связанное с подпространством собственного шума, и другое собственное число кратности  $J$ , связанное с подпространством внешних источников шума.

## Обобщение на случай произвольного числа базисных векторов

Полученный результат обобщим на большее число базисных степенных векторов  $\mathbf{S}, \mathbf{MS}, \mathbf{M}^2\mathbf{S}, \dots, \mathbf{M}^{K-1}\mathbf{S}$ .

Ортогонализация и нормировка базисных векторов выполняется по следующей схеме:

$$(1) \quad \mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + \sum_{n=1}^{K-1} c_n \mathbf{F}_n$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0 = \mathbf{S} / \sqrt{N}, \\ \mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}_1^H \mathbf{F}_1)^{-0.5} \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{M}\mathbf{F}_0 - \alpha_0 \mathbf{F}_0, \\ \mathbf{F}_2 = (\mathbf{F}_2^H \mathbf{F}_2)^{-0.5} \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}\mathbf{F}_1 - \alpha_1 \mathbf{F}_1 - \beta_0 \mathbf{F}_0, \\ \dots \\ \mathbf{F}_n = (\mathbf{F}_n^H \mathbf{F}_n)^{-0.5} \mathbf{F}_n, \quad \mathbf{F}_n = \mathbf{M}\mathbf{F}_{n-1} - \alpha_{n-1} \mathbf{F}_{n-1} - \beta_{n-2} \mathbf{F}_{n-2}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \mathbf{F}_0^H \mathbf{M}\mathbf{F}_0 \\ \alpha_1 = \mathbf{F}_1^H \mathbf{M}\mathbf{F}_1 \\ \alpha_{n-1} = \mathbf{F}_{n-1}^H \mathbf{M}\mathbf{F}_{n-1} \\ \beta_0 = \mathbf{F}_0^H \mathbf{M}\mathbf{F}_1 \\ \beta_{n-2} = \mathbf{F}_{n-2}^H \mathbf{M}\mathbf{F}_{n-1} \end{array} \right.$$

Особенность процедуры ортогонализации и нормировки базисных векторов заключается в том, что каждый вектор с индексом  $n \geq 2$  формируется с использованием только двух предыдущих векторов.



$$\mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + \sum_{n=1}^{K-1} c_n \mathbf{F}_n \quad (1)$$

Как определить коэффициенты  $c_n$ ?

Введем в рассмотрение матрицу  $\mathbf{F}=(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_{K-1})$ , составленную из ортонормированных векторов-столбцов, и вектор  $\mathbf{C}$  с компонентами  $c_n$ .

Тогда (1) принимает вид:

$$(2) \quad \mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}\mathbf{C}$$

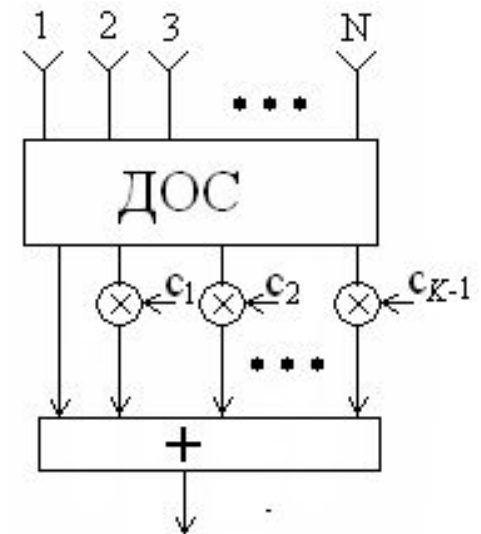
$$(3) \quad \mathbf{M}\mathbf{W} = \gamma\mathbf{S} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{M}\mathbf{F}_0 + \mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{C} = \gamma\mathbf{S}$$

Умножим уравнение (3) слева на матрицу  $\mathbf{F}^H$  и учтем, что в силу ортогональности базисных векторов  $\mathbf{F}^H\mathbf{S}=0$ . Тогда получим матричное уравнение для вектора  $\mathbf{C}$

$$(4) \quad \mathbf{F}^H\mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{C} = -\mathbf{F}^H\mathbf{M}\mathbf{F}_0$$

Матрица  $\mathbf{F}^H\mathbf{M}\mathbf{F}$  является КМ шумов на вспомогательных выходах ДОС.

Каждый компонент вектора  $\mathbf{F}^H\mathbf{M}\mathbf{F}_0$  дает величину взаимной корреляции шумов, взятых с основного и соответствующего вспомогательного выхода ДОС.



$$\mathbf{F}^H \mathbf{MFC} = -\mathbf{F}^H \mathbf{MF}_0$$

$$\mathbf{F}^H \mathbf{MF} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \boxtimes & 0 & \boxtimes & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \boxtimes & 0 & \boxtimes & 0 \\ \hline 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \boxtimes & 0 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \beta_j & \boxtimes & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_j & \alpha_{j+1} & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \beta_{K-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{K-2} & \alpha_{K-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}^H \mathbf{MF}_0 = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxtimes \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица размерности  
(K-1)×(K-1)

Вектор размерности (K-1)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = \beta_0 \\ \beta_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \beta_2 c_3 = 0 \\ \beta_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + \beta_3 c_4 = 0 \\ \boxtimes \\ \beta_{K-2} c_{K-2} + \alpha_{K-1} c_{K-1} = 0 \end{pmatrix}$$

Система уравнений в  
развернутом виде

## Коэффициенты разложения $c_j$ можно получить в явном виде

$$(1) \quad \mathbf{F}^H \mathbf{MFC} = -\mathbf{F}^H \mathbf{MF}_0$$

$$(2) \quad D_{K-1-j}^{(j+1)} = \alpha_{j+1} D_{K-2-j}^{(j+2)} - \beta_{j+1}^2 D_{K-3-j}^{(j+3)}$$

$$(3) \quad c_1 = -\beta_0 \frac{D_{K-2}^{(2)}}{D_{K-1}^{(1)}}$$

$$c_1 = -\frac{\beta_0}{\alpha_1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_2 - \frac{\beta_2^2}{\alpha_{K-2} - \frac{\beta_{K-2}^2}{\alpha_{K-1}}}}}$$

$$(4) \quad c_2 = -\frac{\beta_1}{\alpha_2 - \frac{\beta_2^2}{\alpha_{K-2} - \frac{\beta_{K-2}^2}{\alpha_{K-1}}}}$$

$$(5) \quad \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = -\beta_0 \quad \longrightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{\beta_1} (\beta_0 + \alpha_1 c_1)$$

$$(6) \quad c_j = -\frac{1}{\beta_{j-1}} (\beta_{j-2} c_{j-2} + \alpha_{j-1} c_{j-1}), \quad (j = 3, 4, \dots, K-1).$$

$$\mathbf{F}^H \mathbf{MF} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \boxtimes & 0 & \boxtimes & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \boxtimes & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \boxtimes & 0 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \beta_j & \boxtimes & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_j & \alpha_{j+1} & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \beta_{K-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{K-2} & \alpha_{K-1} \end{pmatrix}$$

$$D_{K-1-j}^{(j+1)}$$

Обозначим:

$\eta_0$  - ОСШ на основном выходе ДОС (согласованная обработка),

$\eta_{\max}$  - ОСШ на выходе всей системы (оптимальная обработка).

Выигрыш в ОСШ равен

$$(1) \quad \frac{\eta_{\max}}{\eta_0} = \frac{1}{1 - \frac{\rho_{0,1}^2}{1 - \frac{\rho_{1,2}^2}{\ddots \frac{1 - \rho_{K-2,K-1}^2}}}}$$

Коэффициент корреляции шумов в соседних  $j$ -ом и  $(j+1)$ -ом вспомогательных выходах ДОС

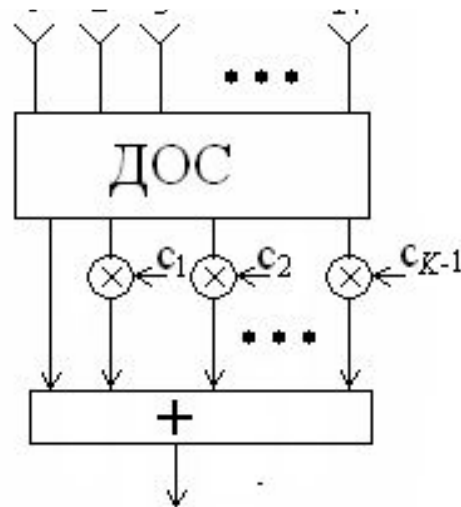
$$(2) \quad \rho_{j,j+1} = \frac{\beta_j}{\sqrt{\alpha_j \alpha_{j+1}}} = \frac{\mathbf{F}_j^H \mathbf{M} \mathbf{F}_{j+1}}{\sqrt{\mathbf{F}_j^H \mathbf{M} \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{F}_{j+1}^H \mathbf{M} \mathbf{F}_{j+1}}}$$



На практике число вспомогательных выходов ДОС можно выбрать меньше размера базиса для уменьшения вычислительной сложности алгоритма обработки сигнала. Соответствующая обработка называется квазиоптимальной.

Оценим эффективность оптимальной и квазиоптимальной обработки с разным числом вспомогательных выходов ДОС.

$$(1) \quad \frac{\eta_{\max}}{\eta_0} = \frac{1}{1 - \frac{\rho_{0,1}^2}{1 - \frac{\rho_{1,2}^2}{\ddots \frac{1 - \rho_{K-2,K-1}^2}}}}$$



Рассмотрим 16-элементную ( $N=16$ ) и 27-элементную ( $N=27$ ) линейные АР с периодом  $d=0.5\lambda$ .

В области вне главного луча ДН основного канала ДОС зададим  $J$  источников шума. Угловая координата каждого из них - случайная величина, равномерно распределенная в указанной области углов.

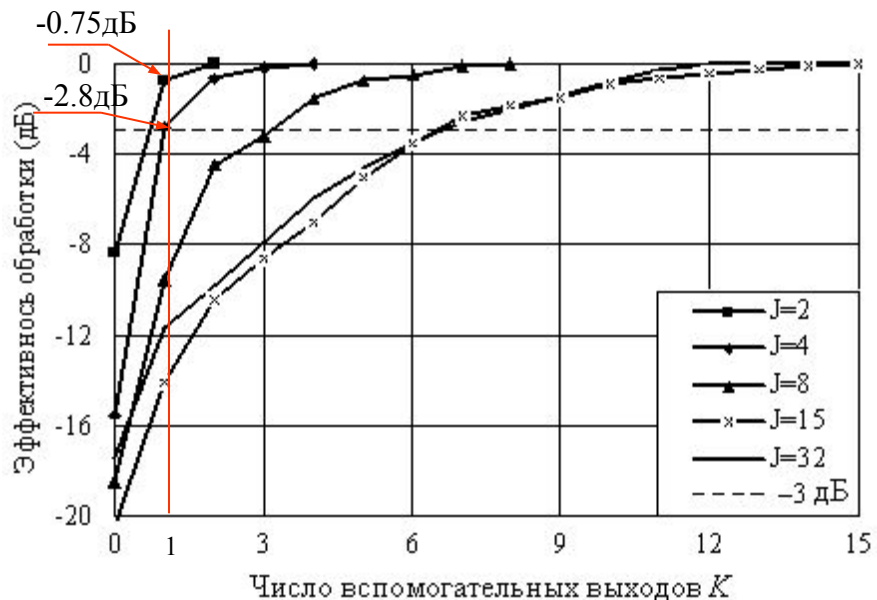
Максимальное число вспомогательных выходов ДОС равно числу  $J$  источников.

Мощность собственного шума считаем единичной, а мощности источников  $v_i = v = 100$ .

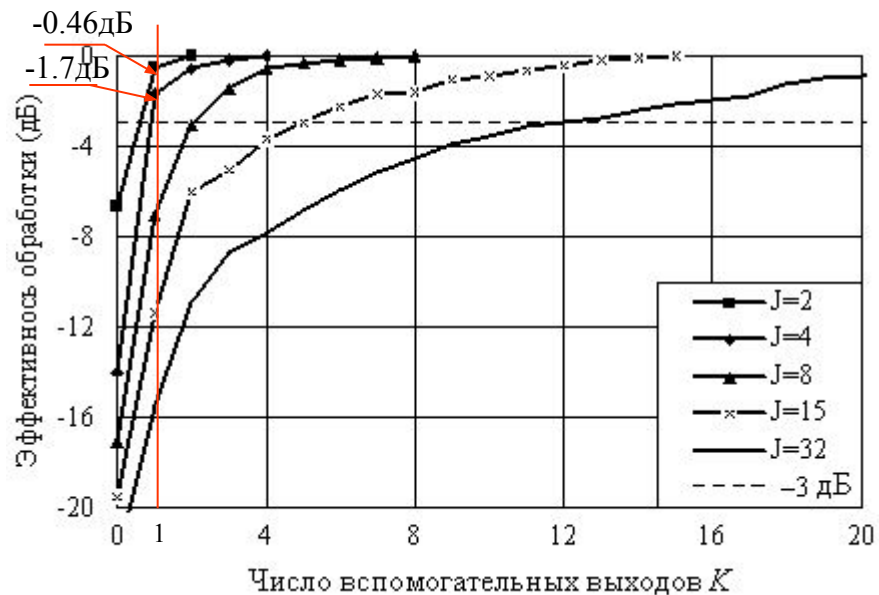
Средняя эффективность оптимальной обработки

Потери в ОСШ при квазиоптимальной обработке.

Число элементов AP	Число источников шума				
	2	4	8	15	32
16	15,9	15,4	13,7	10,1	2,1
27	26,9	26,0	23,7	22,2	15,8



$N=16$



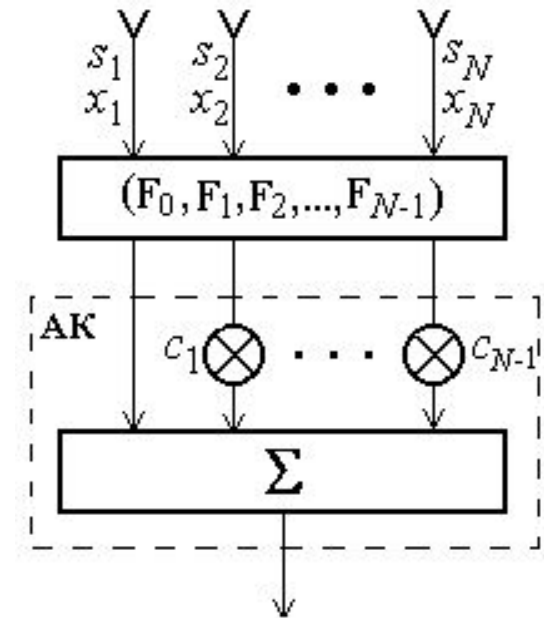
$N=27$

## 4. Метод суммарно-разностных весовых векторов

$$(1) \quad \mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}\mathbf{C} \longrightarrow \eta = \frac{|S_{\text{вых}}|^2}{\langle |X_{\text{вых}}|^2 \rangle} = \frac{|a|^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}}$$

$$(2) \quad \eta = \frac{|a|^2 |\mathbf{F}_0^H \mathbf{S}|^2}{(\mathbf{F}_0^H + \mathbf{F}\mathbf{C})^H \mathbf{M} (\mathbf{F}_0^H + \mathbf{F}\mathbf{C})}$$

- Матрицу  $\mathbf{F}=(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N-1})$  в (1) можно составить из любого другого набора линейно независимых векторов-столбцов из подпространства, ортогонального вектору полезного сигнала  $\mathbf{F}_0$ .
- Эти векторы не обязательно взаимно ортогональны.
- Максимальное их число равно  $N-1$ , хотя на практике может использоваться меньше.



Автокомпенсатор,  
обеспечивающий минимум  
выходной мощности шума.

# Формирование разностных весовых векторов

Ограничимся случаем линейной эквидистантной АР.

Источник полезного сигнала находится в направлении  $\phi_0$ .

Компоненты вектора  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{S}/\sqrt{N}$  даются выражением

$$(1) \quad S_n(\phi_0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) d \sin \phi_0 \right]; \quad n = (1 \div N)$$

Имеем, что

Из  $N$  элементов АР выберем два произвольных элемента с номерами  $n$  и  $m$ .

Зададим весовые коэффициенты так, чтобы выполнялись условия:

$$(2) \quad w_n^* S_n(\phi_0) + w_m^* S_m(\phi_0) = 0 \quad |w_n|^2 + |w_m|^2 = 1$$

$$(3) \quad w_n^* = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad w_m^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (m-n) d \sin \phi_0 \right]$$

Общее число разностных выходов равно  $0.5N(N-1)$ , но число линейно независимых вариантов равно  $N-1$ .

Пример матрицы

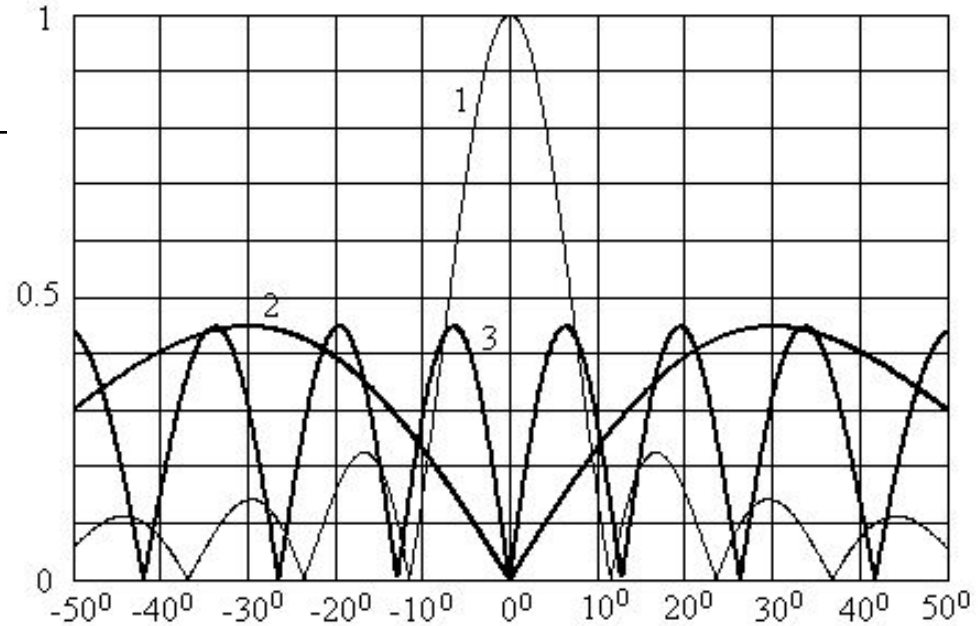
$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N-1})$ :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxtimes & 0 & 0 \\ -a^* & 1 & \boxtimes & 0 & 0 \\ 0 & -a^* & \boxtimes & 0 & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^* \end{pmatrix}; \quad a = \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \phi_0 \right]$$

Каждому столбцу этой матрицы, используемому как весовой вектор  $AP$ , соответствует ДН с нулем в угловом направлении  $\phi_0$ .

Полезный сигнал не проходит на разностные выходы ДОС.

Формируя линейные комбинации столбцов этой матрицы, получим разностные выходы ДОС с различными характеристиками.



1 – ДН суммарного канала;

2 – ДН разностного канала ( $n=1, m=3$ );

3 – ДН разностного канала ( $n=1, m=10$ )

- Если полезный сигнал приходит не только с углового направления  $\phi_0$ , а наблюдается и в некоторой окрестности этого угла, к формированию разностных выходов ДЭС предъявляются более жесткие требования, чтобы дополнительно ослабить полезный сигнал на этих выходах.
- В противном случае адаптивный компенсатор АК искажает полезный сигнал.
- В качестве дополнительного ограничения потребуем, чтобы производная ДН разностного выхода также была равна нулю в направлении  $\phi_0$ .
- Из  $N$  элементов АР выберем три произвольных элемента с номерами  $n$ ,  $m$  и  $k$ .
- Зададим весовые коэффициенты таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$(1) \quad \begin{aligned} & w_n^* S_n(\phi_0) + w_m^* S_m(\phi_0) + w_k^* S_k(\phi_0) = 0, \\ & \left( w_n^* \frac{dS_n(\phi)}{d\phi} + w_m^* \frac{dS_m(\phi)}{d\phi} + w_k^* \frac{dS_k(\phi)}{d\phi} \right) \Big|_{\phi=\phi_0} = 0. \end{aligned}$$

$$(2) \quad S_n(\phi_0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) d \sin \phi_0 \right]; \quad n = (1 \div N)$$



(1)

$$w_n^* S_n(\varphi_0) + w_m^* S_m(\varphi_0) + w_k^* S_k(\varphi_0) = 0,$$

---

$$(n-1)w_n^* S_n(\varphi_0) + (m-1)w_m^* S_m(\varphi_0) + (k-1)w_k^* S_k(\varphi_0) = 0.$$

---

Один из коэффициентов можно выбрать произвольно, например,  $w_n = 1$ .

Другие два коэффициента найдем решая совместно два уравнения.

Затем нормируем весовые коэффициенты.

В результате получим

$$(2) \quad \begin{aligned} w_n^* &= \frac{k-m}{\sqrt{(k-m)^2 + (n-k)^2 + (m-n)^2}}, \\ w_m^* &= \frac{n-k}{\sqrt{(k-m)^2 + (n-k)^2 + (m-n)^2}} \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} (m-n) d \sin \varphi_0\right], \\ w_k^* &= \frac{m-n}{\sqrt{(k-m)^2 + (n-k)^2 + (m-n)^2}} \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} (k-n) d \sin \varphi_0\right]. \end{aligned}$$

Для примера рассмотрим базис, который получается, когда выбраны три элемента с номерами  $m=n-1$ ,  $k=n+1$ , а  $n$  принимает произвольное значение в интервале от 2 до  $N-1$ .



$$w_n^* = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

(1)

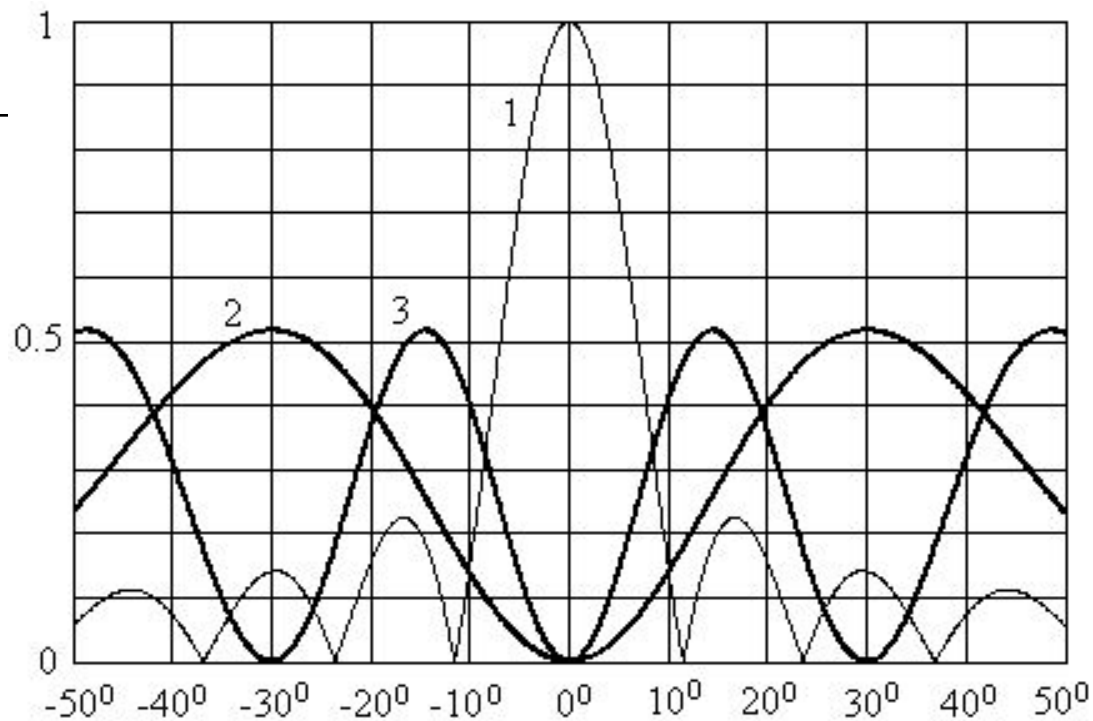
$$w_{n-1}^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_0\right],$$

$$w_{n+1}^* = -\frac{1}{\sqrt{6}} \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_0\right], \quad n = 2, 3, \dots, N-1.$$

(2)

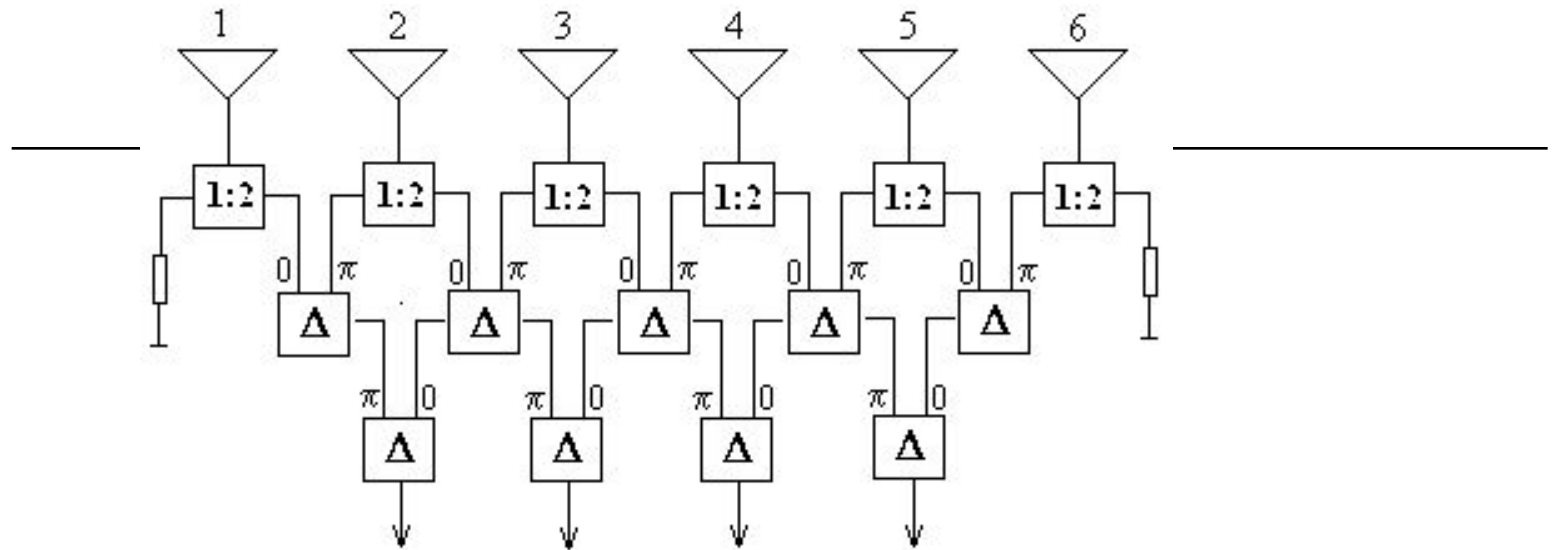
$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -a & 0 & \boxtimes & 0 & 0 \\ 2 & -a & \boxtimes & 0 & 0 \\ -a^* & 2 & \boxtimes & 0 & 0 \\ 0 & -a^* & \boxtimes & a & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a^* & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^* \end{pmatrix}, \quad a = \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_0\right].$$





ДН основного выхода (кривая 1) и двух разностных выходов при  $n=3, m=1, k=5$  и  $n=5, m=1, k=9$  (кривые 2 и 3, соответственно)

## Пример схемы для аналоговой ДОС



Пример представлен для  $\phi_0=0$  и  $N=6$ .

Сигналы с элементов АР подаются на делители мощности 1:2, а затем на разностные устройства  $\Delta$  первого уровня, которые формируют разностные ДН с нулем в направлении  $\phi_0=0$ .

Разностные устройства  $\Delta$  второго уровня формируют разностные ДН с нулем и нулевой первой производной в направлении  $\phi_0=0$ .

Синфазный и противофазный входы разностных устройств помечены индексами 0 и  $\pi$ .



Рассмотрим другой метод формирования разностных выходов ДОС.

Сначала поставим задачу сформировать разностные выходы ДОС с нулевыми значениями в направлении прихода полезного сигнала.

Для этого построим матрицу проектирования на подпространство, ортогональное вектору  $\mathbf{F}_0$ , которую можно записать в виде

$$(1) \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}_0 \mathbf{F}_0^H$$

Столбцы этой матрицы - векторы, принадлежащие подпространству, ортогональному вектору  $\mathbf{F}_0$ .

Число этих векторов равно  $N$ , а размерность подпространства равна  $N-1$ .

Следовательно, число линейно независимых столбцов в матрице равно  $N-1$ .

Их можно выбрать, как базисные векторы для формирования разностных выходов ДОС.

Образуя линейные комбинации базисных векторов получаем весовые векторы разностных выходов ДОС, образующие ДН с нулями в направлении полезного сигнала.

Введем дополнительное ограничение – равенство нулю первой производной ДН в направлении  $\phi_0$  прихода полезного сигнала.

$$(1) \quad F(\varphi) = \sum_{n=1}^N w_n^* \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} d(n-1) \sin \varphi \right]$$

$$(2) \quad \left. \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = j \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \varphi_0 \sum_{n=1}^N w_n^* (n-1) \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} d(n-1) \sin \varphi_0 \right] = 0$$

Отсюда ясно, что вектор весовых коэффициентов должен быть ортогонален вектору с компонентами  $(n-1)S_n(\varphi_0)$ , где  $S_n(\varphi_0)$  - компоненты вектора  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{S}/\sqrt{N}$ .

Вводя диагональную матрицу  $\mathbf{\Lambda}$  с элементами  $\Lambda_{nn}=(n-1)$ , этот вектор запишем, как  $\mathbf{\Lambda F}_0$ . Оба ограничения будут выполняться, если вектор весовых коэффициентов ортогонален одновременно векторам  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{\Lambda F}_0$ .

В общем случае эти векторы не ортогональны, поэтому выполним их ортогонализацию и нормировку. В результате получим пару ортонормированных векторов  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{F}'_0$ .



$$\mathbf{F}'_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{F}_0^H \Lambda^2 \mathbf{F}_0 - (\mathbf{F}_0^H \Lambda \mathbf{F}_0)^2}} [\Lambda - (\mathbf{F}_0^H \Lambda \mathbf{F}_0) \mathbf{I}] \mathbf{F}_0$$

$$(\mathbf{F}'_0)_n = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(N-1)(N+1)}} \left[ (n-1) - \frac{1}{2}(N-1) \right] S_n S_n(\varphi_0); \quad n = (1 \div N)$$

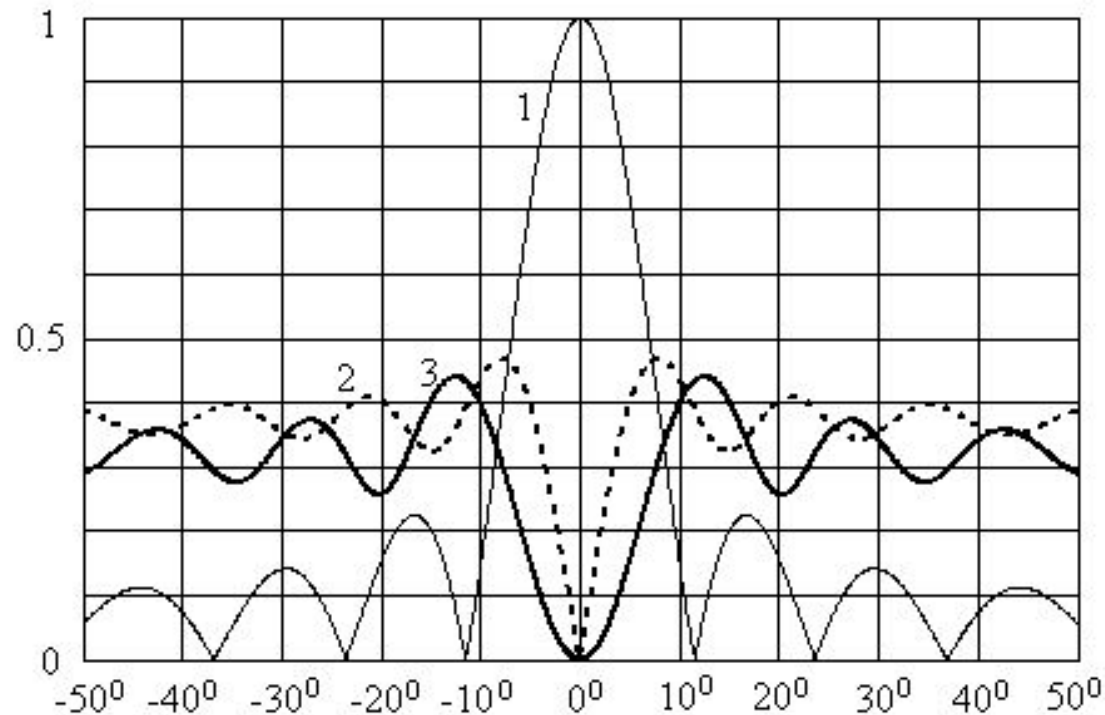
$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}_0 \mathbf{F}_0^H - \mathbf{F}'_0 \mathbf{F}'_0{}^H$$

Столбцы матрицы – векторы из подпространства, ортогонального векторам  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{F}'_0$ .

Число этих векторов –  $N$ , а размерность подпространства –  $(N-2)$ .

Поэтому, число линейно независимых столбцов в матрице  $\mathbf{\Pi}$  равно  $N-2$ .

Столбцы можно считать базисными векторами, формирующими разностные выходы ДОС



ДН основного выхода (1) и разностных выходов с одним и двумя ограничениями (2) и (3)