Лекция 2

Пространственные и временные системы координат

2.1. Пространственные системы координат, используемые в СРНС

2.1.1 Геоцентрическая инерциальная система координат

Начало геоцентрической инерциальной системы координат $OX_0Y_0Z_0$ расположено в центре масс Земли (рис. 1). Плоскость X_0OY_0 в плоскости экватора Земли, причем ось OX_0 направлена в точку весеннего равноденствия - точку Весны или точку Овна γ (γ - астрономический знак созвездия Овна), которая лежит на линии пересечения плоскости экватора Земли и плоскости орбитального движения Земли вокруг Солнца (рис. 2). Ось OZ_0 дополняет прямоугольную систему координат до правой, т.е. направлена вдоль оси вращения Земли в сторону Северного полюса.

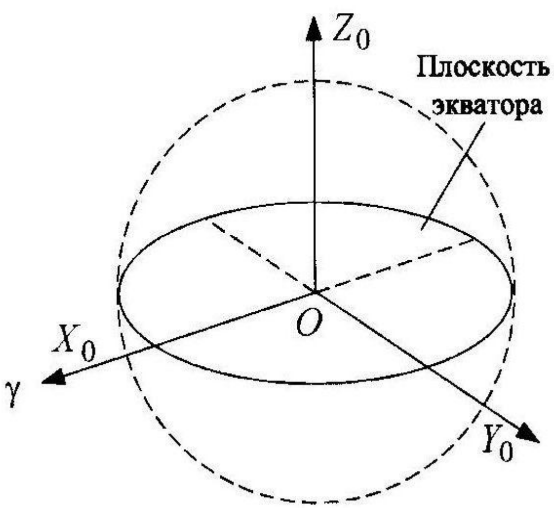

Рис. 2

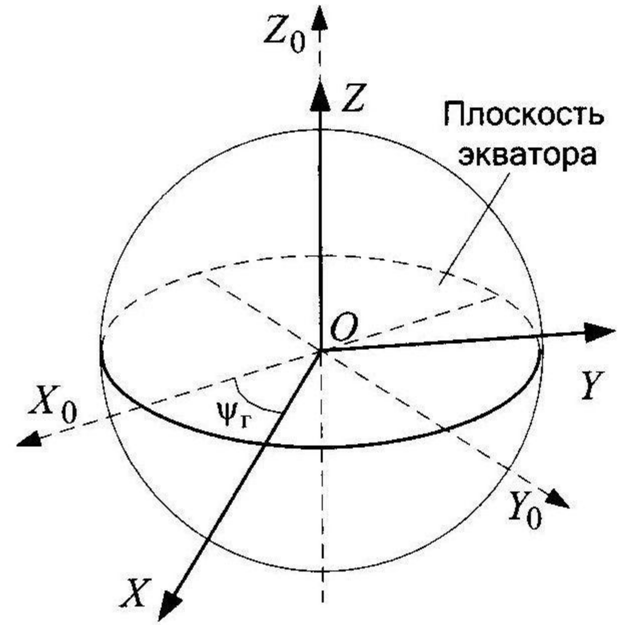

Рис. 3.

2.1.2 Геоцентрическая система координат, связанная с Землей

Центр этой СК совмещен с центром масс Земли, ось *OZ* совпадает с осью *OZ0* инерциальной системы координат $OX_0Y_0Z_0$ (т.е. направлена по оси вращения Земли в сторону Северного полюса), ось *OX* лежит в плоскости земного экватора и связана с Гринвичским меридианом *G*, ось *OY* дополняет систему координат до правой (рис. 3). Данная декартова система координат жестко связана с Землей и вращается вместе с ней относительно геоцентрической инерциальной системы координат $OX_0Y_0Z_0$ с угловой скоростью $\omega_з$ В СРНС ГЛОНАСС геоцентрическая подвижная система координат определена как ПЗ-90

Для геоцентрической системы координат, связанной с Землей, кроме декартовых {x, y, z} можно ввести сферические координаты {r, φ, λ} (рис. 4), где r — радиус точки с декартовыми координатами {x, y, z}, φ и λ, — соответственно геоцентрические широта и долгота этой точки, причем возрастание долготы λ определяется в направлении на восток от Гринвичского меридиана.

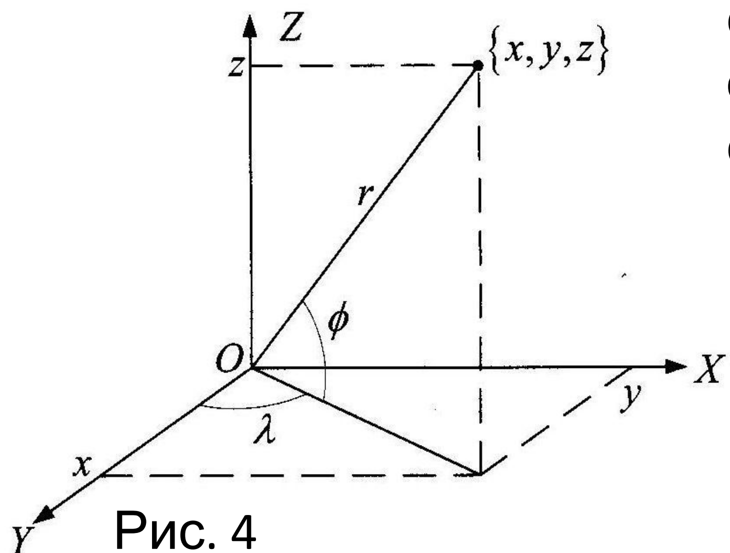

Рис. 4

Связь между декартовыми и сферическими координатами определяется соотношениями

$$x = r\cos(\varphi)\cos(\lambda)$$
$$y = r\cos(\varphi)\sin(\lambda) \qquad (1)$$
$$z = r\sin(\lambda)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$tg(\lambda) = y/x \qquad (2)$$
$$tg(\varphi) = z\Big/\sqrt{x^2 + y^2}$$

2.1.3 Геодезическая система координат

Поскольку Земля имеет форму эллипсоида, использование определенных выше сферических координат {r, φ, λ} для точек, находящихся на Земле и околоземном пространстве, не очень удобно. Поэтому вводят эллипсоидальную систему координат, которую часто называют геодезической.

В данной системе координат точка П задается координатами {*H, L, B*} (рис. 5), где *H* — геодезическая высота; *L* — геодезическая долгота; *B* — геодезическая широта.

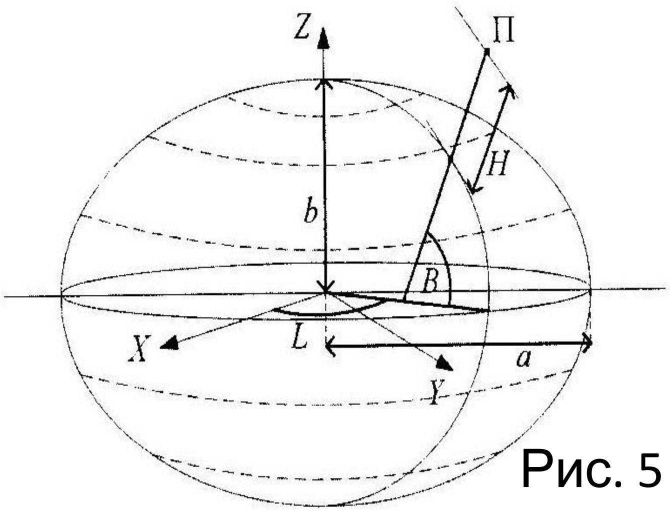

Рис. 5

- Геодезическая широта точки *П* определяется как угол между нормалью к поверхности эллипсоида и плоскостью экватора. Геодезическая долгота L точки *П* определяется как угол между плоскостью Гринвичского меридиана и плоскостью меридиана, проходящего через точку П (положительное направление счета долготы — от Гринвичского меридиана к востоку).

Геодезическая высота *H* определяется как расстояние по нормали от поверхности эллипсоида (которую называют местной вертикалью) до точки *П*.

В эллипсоидальной системе координат используется физическая модель Земли в виде эллипсоида (рис. 5) с большой полуосью *a*, лежащей в экваториальной плоскости, и малой полуосью *b* .

Основные параметры земного эллипсоида и некоторые геодезические константы приведены в Таблице.

Основные параметры земного эллипсоида и некоторые геодезические константы

Основные геодезические константы

Угловая скорость вращения Земли, рад/с	7292115×10^{-11}
Геоцентрическая константа гравитационного поля Земли с учетом атмосферы, $м^3/с^2$	$398600,44 \times 10^9$
Геоцентрическая константа гравитационного поля атмосферы Земли, $м^3/с^2$	$0,35 \times 10^9$
Скорость света, м/с	299 792 458
Коэффициент (C_{20}) при второй зональной гармонике Разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям	$1082,63 \times 10^{-6}$

Параметры общего земного эллипсоида

Большая полуось, м...	6 378 136
Знаменатель сжатия..	1 : 298,257
Гравитационное ускорение на экваторе Земли, мГал	978 032,8
Поправка к гравитационному ускорению на уровне моря, обусловленная влиянием земной атмосферы, мГал	- 0,9

2.1.4 Локальная декартова система координат

Декартову систему координат можно задавать в любой точке ***P*** Земли или околоземного пространства. При этом начало системы координат $О_Л$ определяется в точке ***P***. Плоскость $Х_ЛО_ЛУ_Л$ является касательной плоскостью к земному эллипсоиду, причем ось $О_ЛХ_Л$ ориентирована на север, а ось $О_ЛY_Л$ — на восток. Ось $О_ЛZ_Л$ совпадает с местной вертикалью, и при ее ориентации в зенит (вверх) получаем левостороннюю, а при ее ориентации в надир (вниз) — правостороннюю системы координат. На рис. 6 для примера приведена левосторонняя локальная декартова система

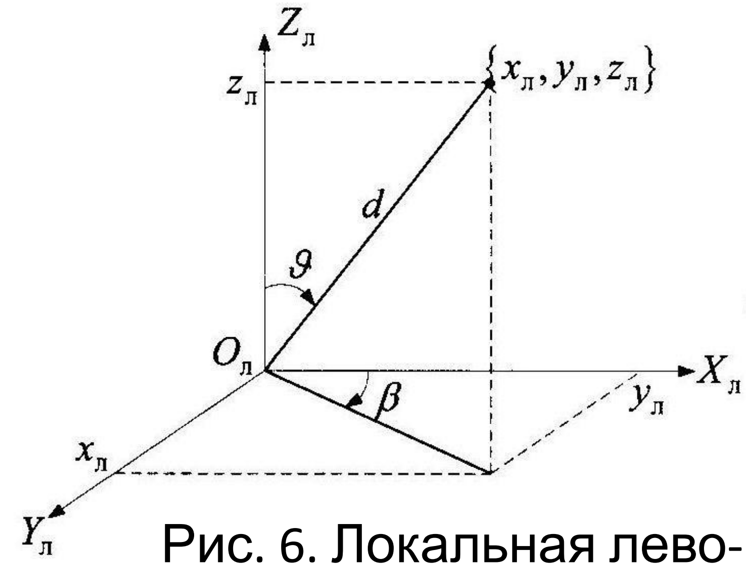

Рис. 6. Локальная левосторонняя система координат

Координаты точки в локальной системе координат могут задаваться декартовыми $\{x_л, y_л, z_л\}$ или сферическими $\{d, \beta, \theta\}$ координатами, где d — дальность, β —азимут, θ — зенитный угол.

2.1.5 Декартова система координат, связанная с подвижным объектом

При решении задач навигации летательных аппаратов (ЛА) часто используют декартову правостороннюю систему координат $OX_CY_CZ_C$, связанную с летательным аппаратом (рис. 7). Начало координат данной системы располагается в центре масс ЛА, ось OX_C направлена вдоль строительной оси к фюзеляжу, ось OY_C лежит в плоскости крыльев, а ось OZ_C направлена по нормали к плоскости X_COY_C. Положение ЛА в пространстве задается тремя углами: угол крена γ, угол тангажа β и угол рыскания α, которые характеризуют вращение ЛА относительно осей OX_C, OY_C и OZ_C соответственно.

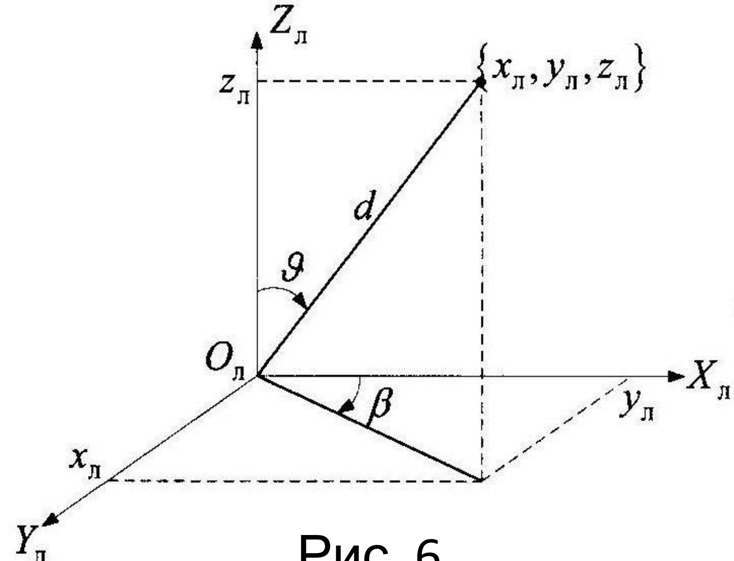

Рис. 6

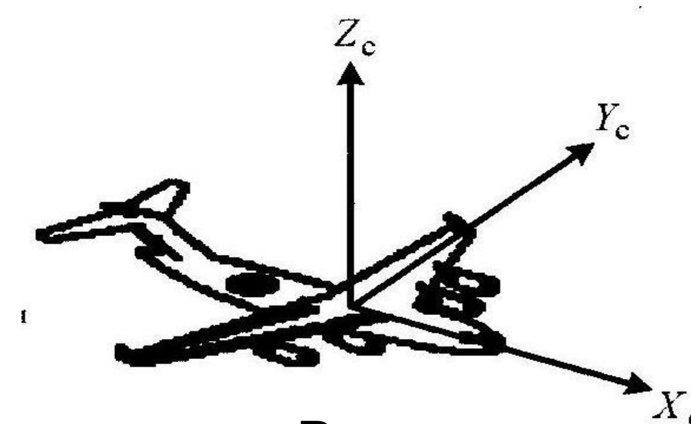

Рис. 7

2.1.6 Преобразование декартовых систем координат

Пусть имеем две декартовы правосторонние системы координат $OX_1Y_1Z_1$ и $OX_2Y_2Z_2$, начала которых совмещены, и задана некоторая точка ***P***, координаты которой в одной системе координат определяются вектором $\mathbf{x}_1 = |x_1, y_1, z_1|^T$, а в другой системе координат – вектором $\mathbf{x}_2 = |x_2, y_2, z_2|^T$

Преобразование вектора $\mathbf{x}_1$ в вектор $\mathbf{x}_2$ может быть описано выражением

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{U}_1^2 \mathbf{x}_2 \qquad (5)$$

где $\mathbf{U}_1^2$ - матрица преобразований, которая описывает три последовательных вращения системы координат $OX_1Y_1Z_1$ на угол α_1, относительно оси OX_1 (рис. 8)

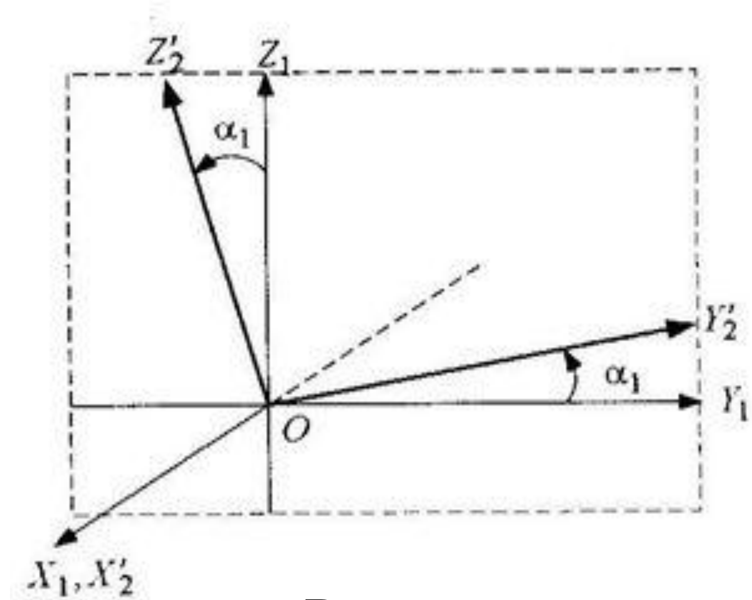

Рис. 8

на угол α_2 относительно оси OY_1, на угол α_3 относительно оси OZ_1 и которую иногда называют матрицей направляющих косинусов или матрицей вращений

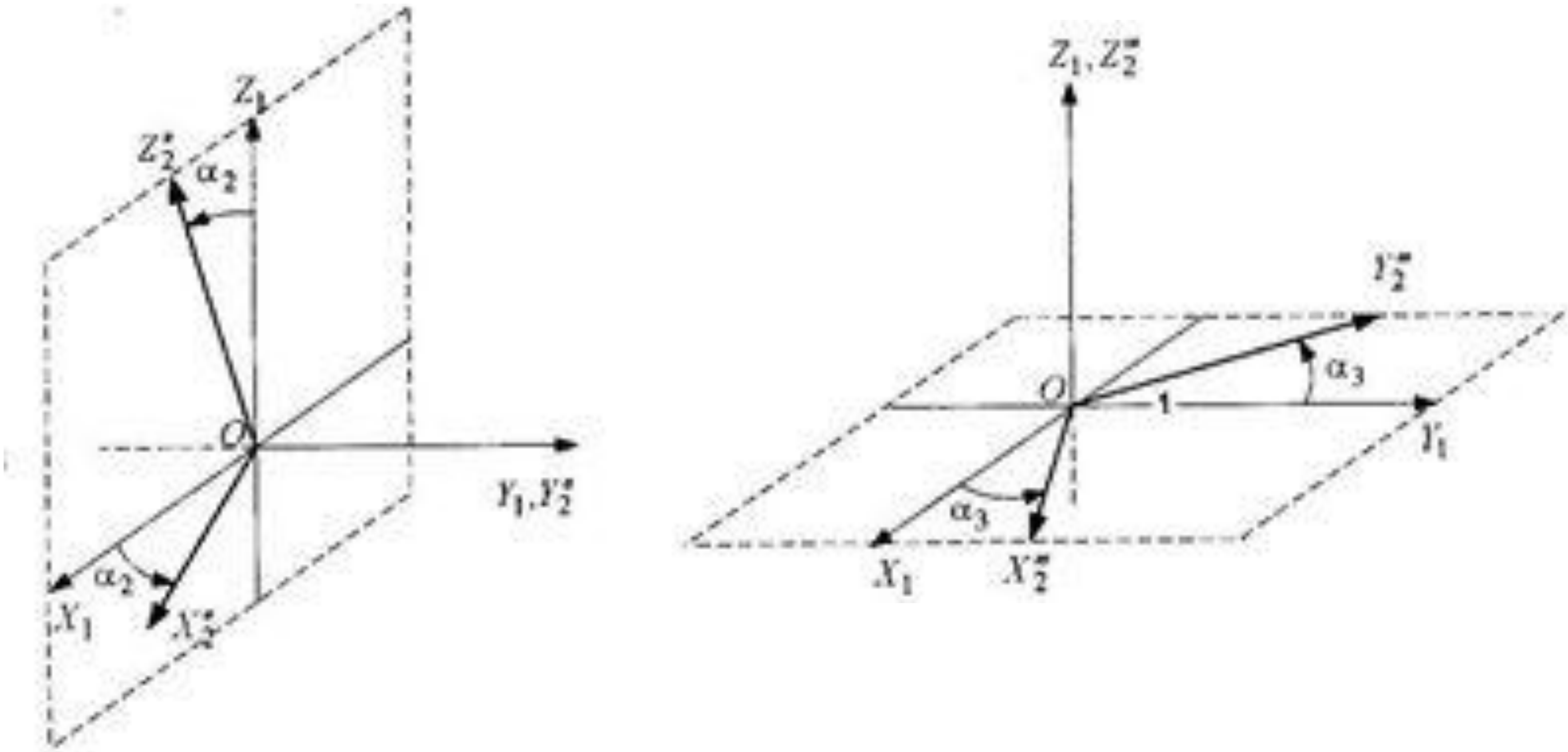

Рис. 8

Поэтому можно записать $\mathbf{U}_1^2 = \mathbf{U}_3(a_3)\mathbf{U}_2(a_2)\mathbf{U}_1(a_1)$, (6)

где $\mathbf{U}_1(\alpha_1)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1)\\ 0 & -\sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1)\end{vmatrix}$ $\quad\mathbf{U}_2(\alpha_2)=\begin{vmatrix}\cos(\alpha_2) & 0 & -\sin(\alpha_2)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2)\end{vmatrix}$ (7)

$$\mathrm{U}_3(\alpha_2)=\begin{vmatrix}\cos(\alpha_3) & \sin(\alpha_3) & 0\\ -\sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Для правосторонних систем координат углы вращения α_i положительны, если они соответствуют движению против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с положительно направления соответствующей оси на начало координат (рис. 8).

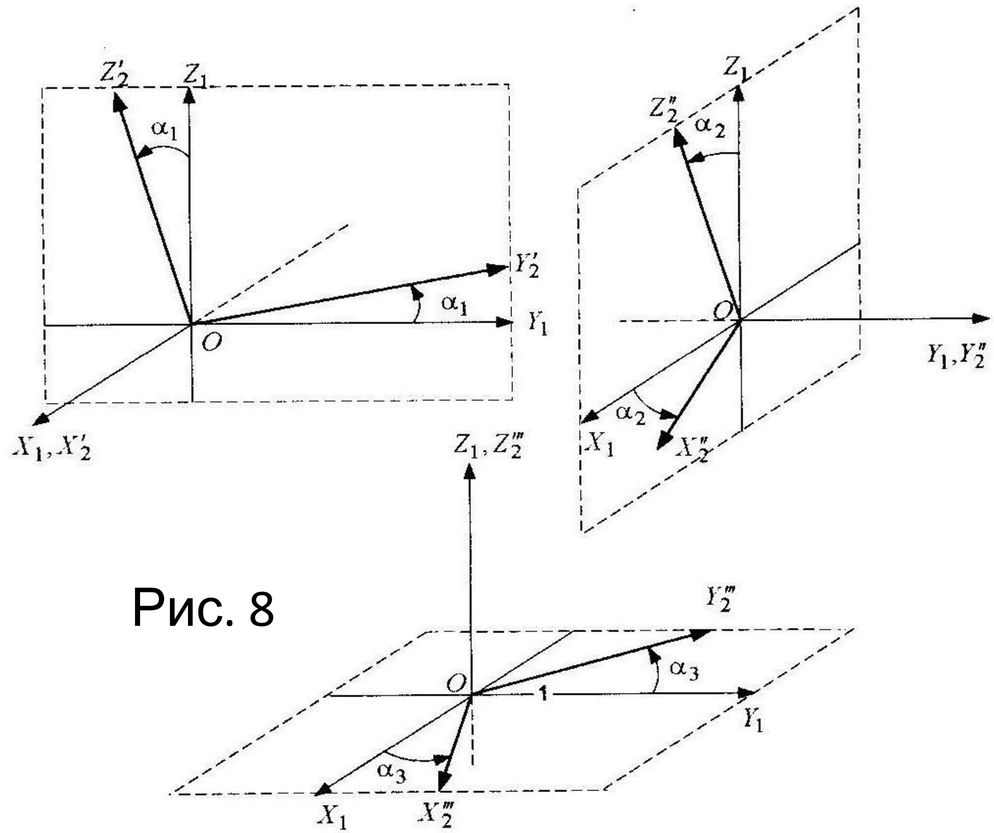

Рис. 8

Матрица вращений $\mathbf{U}_1^2$ обладает следующими свойствами

$$\left(\mathbf{U}_1^2\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{U}_1^2 = \mathbf{I}, \quad \det(\mathbf{U}_1^2) = 1, \tag{8}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Соотношения (8) справедливы и для матриц (7), описывающих вращение относительно одной из осей.
Если центры систем координат не совпадают, то преобразование вектора координат точки из одной системы в другую дается выражением $\mathbf{x}_2 = \mathbf{c} + \mu \mathbf{U}_1^2 \mathbf{x}_1$ (9)

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{c} + \mu \mathbf{U}_1^2 \mathbf{x}_1 \quad (9)$$

где **c** — вектор смещения начала координат $OX_lY_1Z_1$ относительно $OX_2Y_2Z_2$;
μ — скалярный фактор, отражающий возможное изменение длины единичного вектора при переходе из одной системы координат в другую.