



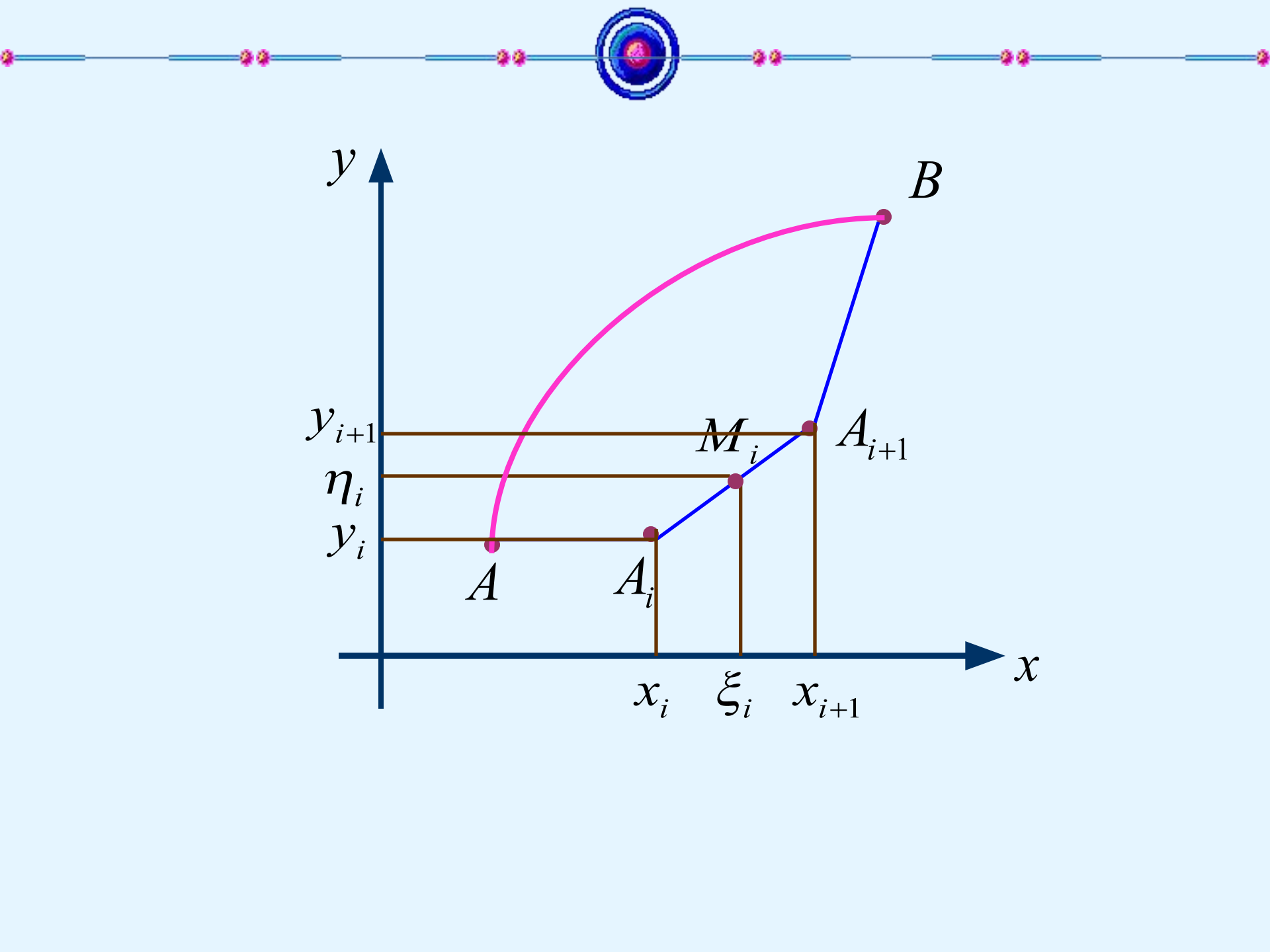
19.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2 РОДА

Рассмотрим произвольную функцию $f(x, y)$, заданную вдоль непрерывной плоской кривой AB .

Разобьем эту кривую на элементарные дуги $A_i A_{i+1}$ и соединим точки A_i ломаной.

На каждом участке ломаной выберем точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим значение функции в этой точке:

$$f(\xi_i, \eta_i) = f(M_i)$$



Сумму вида

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i$$

*где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ называют
интегральной суммой для функции
 $f(x, y)$ по кривой АВ.*

Если существует конечный предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшей из всех дуг μ , не зависящий от способа разбиения кривой АВ и выбора точек M_i , то он называется криволинейным интегралом второго рода от функции $f(x,y)$ по кривой АВ.

$$\lim_{\max \mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i = \int_{AB} f(x, y) dx$$

Аналогично можно определить интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i$$

Тогда

$$\lim_{\max \mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i = \int_{AB} f(x, y) dy$$



Если вдоль кривой AB определены две функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и существуют интегралы

$$\int_{AB} P(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_{AB} Q(x, y) dy$$

то их сумму называют криволинейным интегралом общего вида:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$



Сравним криволинейные интегралы 1 и 2 рода.


У криволинейных интегралов 1 рода в интегральной сумме стоит длина участка разбиения дуги:

$$\sigma_i = A_i A_{i+1}$$

У интегралов 2 рода в интегральной сумме стоит проекция этого участка на ось x или y :

$$\Delta x_i \quad \text{или} \quad \Delta y_i$$

Проекция зависит от направления кривой и меняет знак при смене направления:


$$\int_{AB} f(x, y) dx = - \int_{BA} f(x, y) dx$$

$$\int_{AB} f(x, y) dy = - \int_{BA} f(x, y) dy$$



Понятие криволинейного интеграла можно обобщить на пространственную кривую:

$$\int_{AB} f(x, y, z) dx \quad \int_{AB} f(x, y, z) dy \quad \int_{AB} f(x, y, z) dz$$

Тогда интеграл общего вида будет:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{AB} P(x, y, z) dx + \int_{AB} Q(x, y, z) dy + \int_{AB} R(x, y, z) dz \end{aligned}$$