Однородная система линейных алгебраических уравнений
Фундаментальная система решений

- О п р е д е л е н и е 1. Однородной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящей из m уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad A \cdot \bar{x} = \bar{b}, \quad (1)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений
Фундаментальная система решений

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$ матрица системы

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} -$$ вектор–столбец неизвестных

Однородная система линейных алгебраических уравнений
Фундаментальная система решений

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, т. к. она всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение $\bar{x} = (0;\, 0;\, ...0)$. Если в системе $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$, $m = n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, ***b=0.***

Теорема1: Система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение только и только тогда , когда ранг ее матрицы $r(A) < n$.

В этом случае система имеет $k = n - r(A)$ свободных неизвестных, которые обозначают $c_1, \ldots, c_k$.

Однородная система линейных алгебраических уравнений
Фундаментальная система решений

Обозначим решение системы $x_1 = k_1, \quad x_2 = k_2, \ldots\ldots x_n = k_n$

виде строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots.k_n)$.

Теорема 2: Если $e_1 = (k_1, k_2, \ldots.k_n)$ - решение системы, то

$\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \ldots.\lambda k_n)$ - также решение этой системы.

Теорема 3: Если $e_1 = (k_1, k_2, \ldots.k_n)$ и $e_2 = (l_1, l_2, \ldots.l_n)$ - решения системы (1), то при любых $\lambda_1 \quad u \quad \lambda_2$

линейная комбинация $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ - также решение данной системы.

Фундаментальная система решений (ФСР)

Определение . Система линейно независимых решений $e_1, e_2, ...e_k$ называется ***фундаментальной,*** если каждое решение системы (1) является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, ...e_k$.

Теорема 4: Если ранг матрицы ***A*** ***r*** меньше числа переменных ***n,*** то всякая фундаментальная система решений системы (1) состоит из $n - r$ решений.

Фундаментальная система решений

Пример. Найти общее решение и ФСР однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Приведем систему к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса. Для этого записываем матрицу системы (в данном случае, так как система однородная, то ее правые части равны нулю, в этом случае столбец свободных коэффициентов можно не выписывать, так как при любых элементарных преобразованиях в правых частях будут получаться нули):

Ранг матрицы равен 2, свободные неизвестные, x_3, x_4.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & \frac{3}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 7c_1, x_4 = 7c_2$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{11}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5c_1 + 2c_2 \\ x_2 = -11c_1 - 3c_2 \\ x_3 = 7c_1 \\ x_4 = 7c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- При

$$c_1 = -\frac{2}{7}; c_2 = \frac{5}{7} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

- При

$$c_1 = \frac{1}{7}; c_2 = \frac{1}{7} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$