

Интеграл от функции комплексного переменного.



Выполнил: студент группы
НГ15-04, Ю.А. Пестерев
Преподаватель: В. М. Киселёв

Красноярск 2017

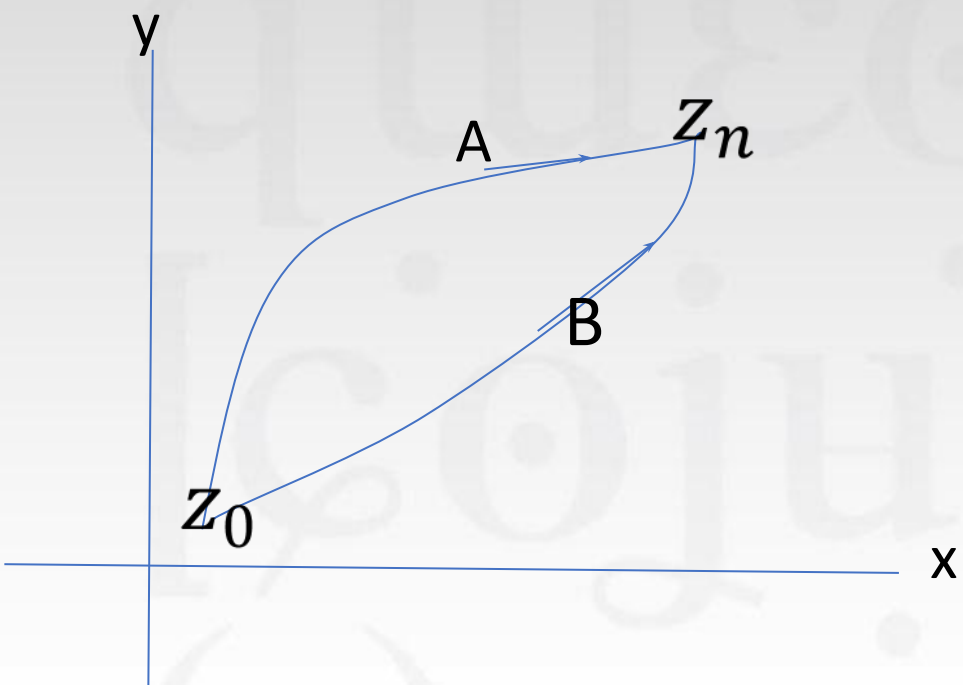
План



1. Теорема Коши(доказательство)
2. Многозначные функции
3. Примеры к многозначным функциям

$$I = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(z_k) \Delta z \equiv \int_{z_0}^{z_n} f(z) dz$$

$$\Delta z = \frac{z_n - z_0}{n}$$



z_0 и z_n – начальная и конечная точки кривой L в комплексной плоскости, вдоль которой производится интегрирование, n – число отрезков, на которые разбита эта кривая

Теорема Коши



Доказательство

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u + iv) d(x + iy) = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) = I_1 + iI_2.$$

$$\oint_C \mathbf{A} d\boldsymbol{\ell} = \oint_C (u \mathbf{e}_x - v \mathbf{e}_y) (dx \mathbf{e}_x - dy \mathbf{e}_y) = \oint_C (u dx - v dy) = I_1.$$

$\oint_C \mathbf{A} d\boldsymbol{\ell} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S}$ – теорема Стокса для
векторного поля \mathbf{A}

где Σ – произвольная
поверхность, натянутая
на контур C

$$\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{e}_z \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ - второе условие Коши-Римана}$$

$$\oint_C f(z) dz = \int_{z_0 A z_n} f(z) dz + \int_{z_n B z_0} f(z) dz = \int_{z_0 A z_n} f(z) dz - \int_{z_0 B z_n} f(z) dz = 0$$



$$\int_{z_0 A z_n} f(z) dz = \int_{z_0 B z_n} f(z) dz.$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

где $\Phi(z)$ – любая функция,
удовлетворяющая условию

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = f(z).$$

Многозначные функции



функция

$$w = \sqrt{z}$$

$$1. \quad w_1 = |z|e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad w_2 = |z|e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}$$

$$2. \quad |z|e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = |z|e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)} = w_2$$

$$3. \quad |z|e^{i(\frac{\varphi+2\pi}{2}+\pi)} = |z|e^{i\frac{\varphi}{2}}e^{i2\pi} = w_1$$

Функция

$$w = \ln z$$

$$\ln z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Примеры к многозначным функциям



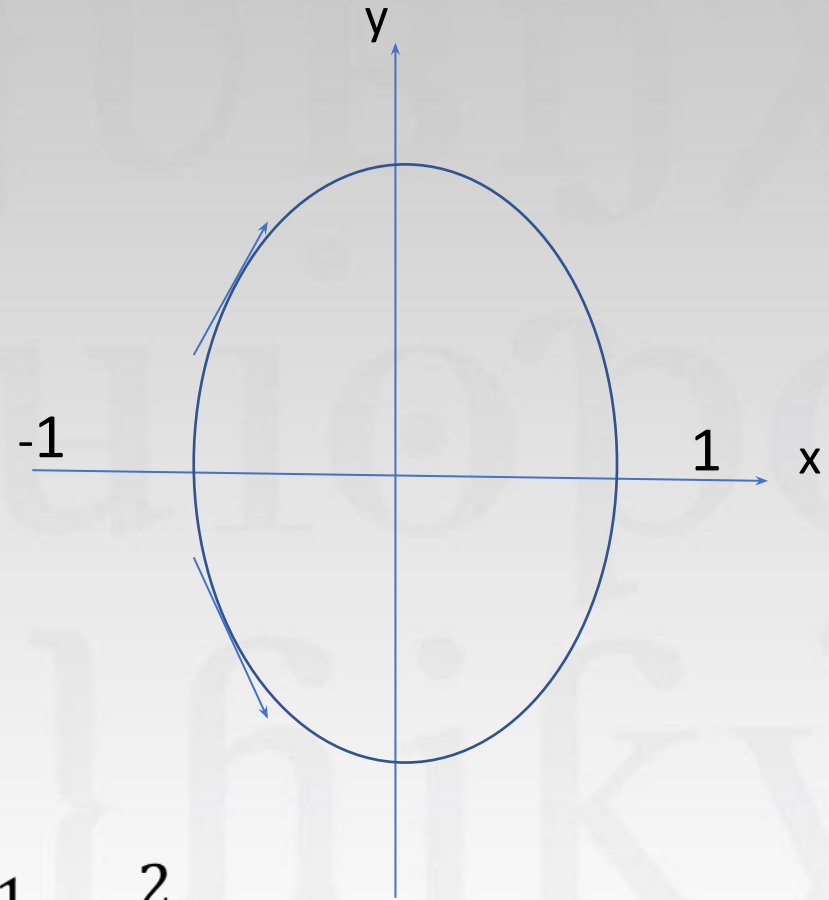
Найти интегралы по каждой из двух полуокружностей с центром в точке $z = 0$, идущих из $z = -1$ в $z = 1$ от функций:

A) $w = z^2$;

B) $w = 1/z$;

A) Функция $w = z^2$ аналитическая во всей плоскости (проверить!), поэтому результат интегрирования от пути не зависит и для обоих случаев

$$\int_{z=-1}^{z=1} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$



В) Функция $w = 1/z$ в точке $z = 0$ обращается в бесконечность (имеет полюс), поэтому результат интегрирования будет зависеть от направления обхода точки $z = 0$.



По верхней полуокружности:

$$\int_{z=-1}^{z=1} \frac{1}{z} dz = [\ln|z| - i\pi] \Big|_{-1}^1 = -i\pi.$$

Угол φ отсчитывается от оси OX против часовой стрелки.

По нижней полуокружности:

$$\int_{z=-1}^{z=1} \frac{1}{z} dz = [\ln|z| + i\pi] \Big|_{-1}^1 = i\pi.$$



Спасибо за внимание!