лектор

МАКСИНА АЛЕКСАНДРА ГЕНРИХОВНА

Лекции по дисциплине «Физика и математика» в 1 семестре 2018-19 учебного года

Тематика лекций	
1	Теория вероятностей.
2	Математическая статистика.
3	Механические свойства веществ. Вязкость. Деформация.
4	Механические колебания и волны.
5	Электрическое поле. Проводники и диэлектрики. Электрический диполь.
6	Магнитное поле. Магнитные свойства веществ. Электромагнитная индукция.
7	Электромагнитные волны. Волновые свойства света.
8	Тепловое излучение. Элементы квантовой физики.
9	Ионизирующее излучение. Рентгеновское излучение. Радиоактивность.

Номер недели	Модуль	№ Занятия	Тема
1	**1. Высшая математика Математическая статистика**	1.1	Элементы математического анализа. Производная функции. Дифференциал функции.
2		1.2	Элементы математического анализа. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Решение дифференциальных уравнений.
3		1.3	**Контрольная работа № 1 «Математический анализ».** Математическая статистика №1. Лабораторная работа №1.
4		1.4	Математическая статистика №2
5		1.5	Математическая статистика №3
6		1.6	**Контроль по модулю 1**
7	**2. Реология Электричество**	2.1	Течение и вязкость жидкостей. Лабораторные работы №№ 7, 8
8		2.2	Механические свойства твердых тел. Лабораторная работа №11
9		2.3	Переменный ток. Импеданс цепи переменного тока. Лабораторная работа №18
10		2.4	Электрические импульсы. Импульсный ток. Лабораторная работа №20
11	**КОНТРОЛЬ ПО МОДУЛЮ 2**		
12	**3. Оптика**	3.1	Волновые свойства света: интерференция и дифракция. Лабораторная работа № 37
13		3.2	Поляризация света. Лабораторная работа №33
14		3.3	Геометрическая оптика. Линзы. Рефрактометрия. Лабораторная работа № 29
15		3.4	Оптическая микроскопия. Электронная микроскопия. Лабораторная работа №31
16	**КОНТРОЛЬ ПО МОДУЛЮ 3**		
17	**ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ ПО КУРСУ ЛЕКЦИЙ**		
18	**ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ ПО КУРСУ. ЗАЧЕТ**		

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. **СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.**

2. **ВЕРОЯТНОСТЬ. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.**

3. **СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ.**

4. **ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.**



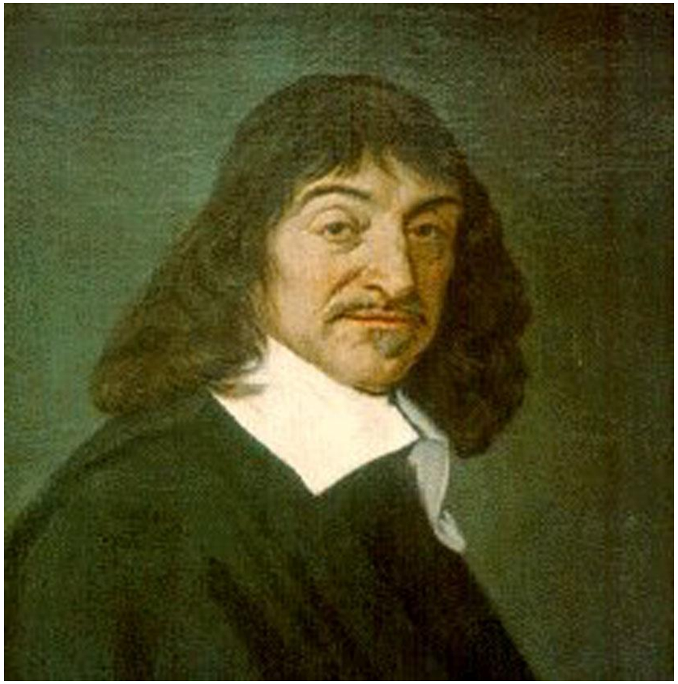

ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- **Теория вероятностей** – раздел математики, изучающий закономерности, присущие массовым случайным явлениям.
- **Предметом** теории вероятностей являются математические модели случайных явлений.
- **Цель** – осуществление прогноза в области случайных явлений.
- **Возникновение** – середина XVII века

Теория вероятностей возникла в середине 17 века. Первые работы по теории вероятностей появились в связи с подсчетом различных вероятностей в азартных играх.

Особая роль в развитии теории вероятностей сыграли работы Блеза Паскаля, Пьера Ферма и Христиана Гюйгенса.

Б.Паскаль



П. Ферма

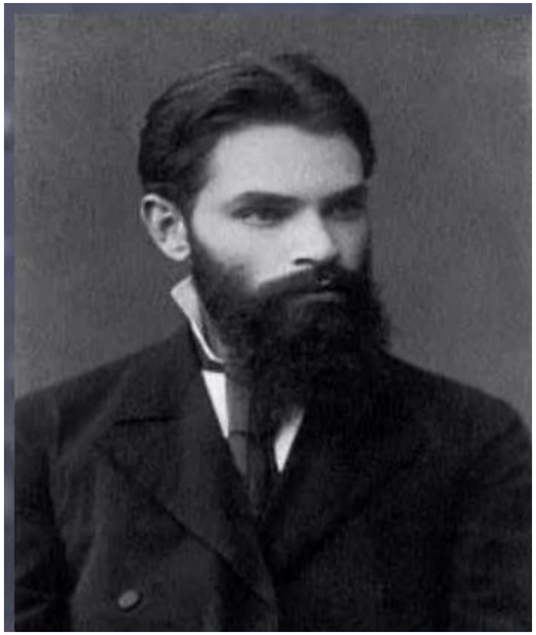
Х.Гюйгенс

РУССКИЙ ПЕРИОД В РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Особенно быстро теория вероятностей развивалась во второй половине XIX-XX вв

Фундаментальные открытия были сделаны математиками Санкт-Петербургской школы П.Л.Чебышевым (1821-1894), А.М. Ляпуновым (1857-1918), А.А.Марковым (1856-1922)

П.Л.Чебышев



А.М.Ляпунов

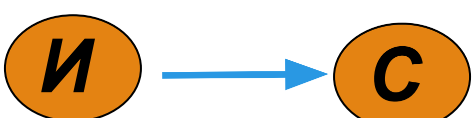
А.А.Марков

1. СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

СОБЫТИЕ (ЯВЛЕНИЕ)- результат испытания ***(осуществления определенной совокупности условий)***

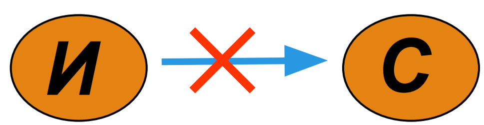
ДОСТОВЕРНОЕ

– событие, которое обязательно происходит при данном испытании



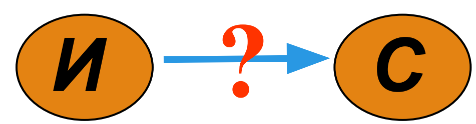
НЕВОЗМОЖНОЕ

– событие, которое заведомо не произойдет при осуществлении данной совокупности условий.



СЛУЧАЙНОЕ

– событие, которое может произойти, либо не произойти при условии осуществления данной совокупности условий.



ВИДЫ СОБЫТИЙ

Равновозможными называются такие события, возможность наступления которых в силу объективных причин должна быть одинакова.

Несовместные события - события, которые при выполнении опыта не могут произойти вместе.

Совместные события - независимые события, которые происходят одновременно (вместе).

Независимые события А и В - такие события, для которых появление события **А** не зависит от наступления события **В**.

Противоположные события– в данном испытании они несовместны, и одно из них обязательно происходит (событие А и $\bar{A}$).

2. ВЕРОЯТНОСТЬ

ВЕРОЯТНОСТЬ ***Р(А)*** – количественная характеристика возможности появления данного события

Классическое определение вероятности

Пусть есть ***n*** ***равновозможных несовместных*** событий, а появление (исход) какого-либо определенного события **А** происходит в ***m*** случаях, которые называются ***благоприятствующими*** этому событию.

Вероятность случайного события **-** это отношение числа ***m*** исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу ***n*** равновозможных несовместных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Такие условия выполняются только в искусственно организованных опытах, например, азартных играх.

Относительная частота события Р*
Статистическое определение вероятности

Для **неравновозможных** событий вероятность появления события оценивают иначе. Если в серии из ***n*** опытов событие **А** произошло в ***m*** из них, то ***относительной частотой*** **Р*(А)** некоторого события называют отношение числа опытов, в которых событие произошло, к общему числу проведенных опытов:

$$\frac{m}{n} = P^*(A)$$

С увеличением числа испытаний уменьшается колебание частоты события около постоянной величины. Поэтому можно дать еще одно определение вероятности.

Статистическая вероятность **-** предел, к которому стремится относительная частота события при неограниченном увеличении числа испытаний:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} = P(A)$$

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}$$ или $$P(A)=\frac{m}{n}$$

Поскольку $0 \le m \le n$ $\Rightarrow$ $0 \le P(A) \le 1$

СОБЫТИЕ

ДОСТОВЕРНОЕ

$И \rightarrow С$

$\boldsymbol{m = n}$

$\boldsymbol{P = 1}$

НЕВОЗМОЖНОЕ

$И \not\rightarrow С$

$\boldsymbol{m = 0}$

$\boldsymbol{P = 0}$

СЛУЧАЙНОЕ

$И \xrightarrow{?} С$

$\boldsymbol{0 < m < n}$

$\boldsymbol{0 < P < 1}$

Для того, чтобы упростить расчет вероятностей сложных событий, применяют теоремы сложения и умножения вероятностей

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A\ или\ B) = P(A) + P(B)$$

Полная группа (система) событий - это множество несовместных событий, одно из которых обязательно должно произойти (выпадение цифр от 1 до 6 на верхней грани игральной кости).

Из теоремы сложения вероятностей вытекает, в частности, ***условие нормировки:*** сумма вероятностей всех событий, образующих полную группу, равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$$

Сумма вероятностей двух противоположных несовместных событий равна единице.

А - появление герба при бросании монеты;

А - появления решки при бросании монеты,

событие «не А» -противоположное событие

$$P(\text{А или } \overline{\text{А}}) = \text{P}(\text{А}) + \text{P}(\overline{\text{А}}) = 1$$

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность совместного появления ***независимых*** событий равна произведению их вероятностей: $P(A \text{ и } B) = P(A)\cdot P(B)$

Вероятность такого события меньше вероятности каждого отдельного события.

Монету бросают 3 раза подряд. Какова вероятность, что решка выпадет все три раза.

Решение:

$$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Вероятность события ***B*** называется ***условной P(B/A)***, если она вычислена при условии, что событие ***A*** произошло. Условная вероятность вычисляется для ***зависимых*** событий.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого события при условии, что первое событие уже произошло:

$$P(AB)= P(A)*P(B/A)$$

Задача.

В ящике **26** билетов, из которых только **3** выигрышных. Найти вероятность того, что два взятые подряд билета окажутся выигрышными.

P(A)=3/26=0,115 – вероятность взять в первый раз выигрышный билет;

P(B/A)=2/25=0,08 – вероятность вторично достать выигрышный билет;

P(AB)=P(A)*P(B/A)=0,115*0,08=0,092

3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА (СВ) –величина, которая в результате опыта может принять то или иное (но только одно) значение (до опыта неизвестно, какое именно). Это величина, значение которой зависит от стечения случайных обстоятельств.

- расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия;
- число заболевших гриппом во время эпидемии;
- частота пульса пациента, пришедшего на прием к врачу;

X, **Y**, **Z** – обозначение случайной величины, *x*, *y*, *z* – значения случайной величины.

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

ДИСКРЕТНАЯ (ДСВ) **НЕПРЕРЫВНАЯ (НСВ)**

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

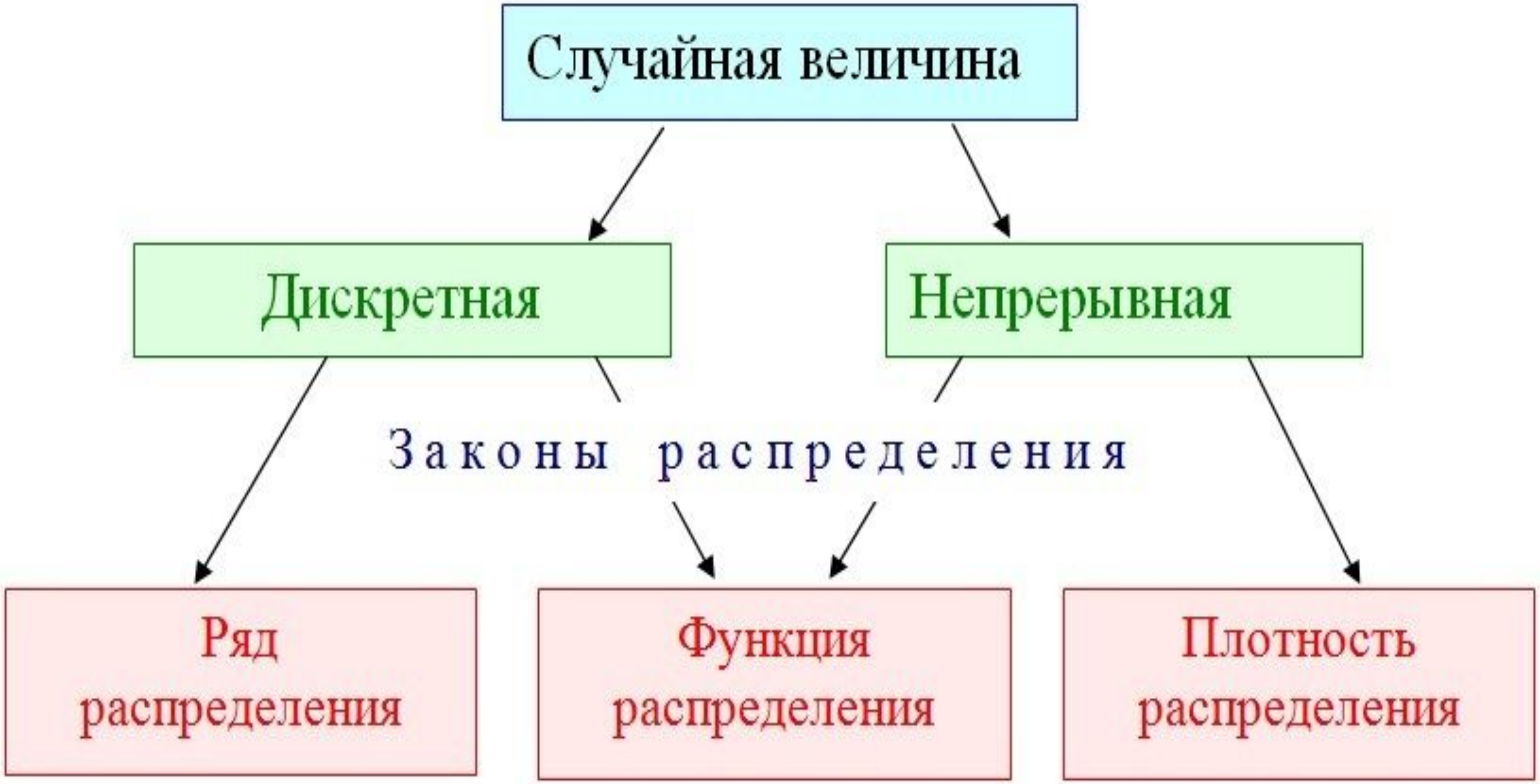
Дискретными случайными величинами *называются такие, которые принимают только отделённые друг от друга значения и могут быть заранее перечислены.* Например, количество пациентов, пришедших на прием к врачу; число мальчиков среди новорожденных за определенный промежуток времени.

Непрерывной случайной величиной *называется такая, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток* (интервал числовой оси). Интервал числовой оси может быть конечным или бесконечным.

Примером непрерывной случайной величины является изменение температуры, давления, частоты пульса пациента, регистрируемое на мониторе в палате интенсивной терапии в течение суток.

В отличие от *дискретных,* возможные значения непрерывных случайных величин нельзя заранее перечислить, так как они непрерывно заполняют некоторый промежуток.

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН



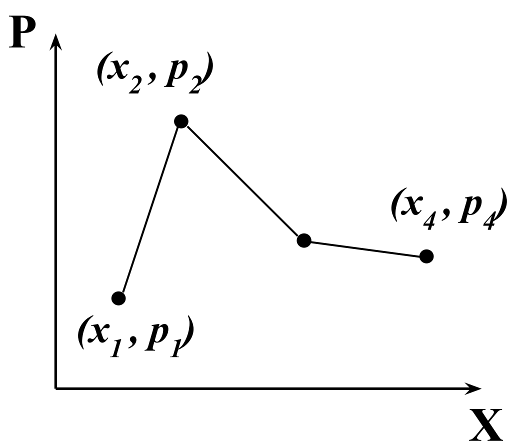
ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Дискретную случайную величину можно полностью описать с вероятностной точки зрения, если точно указать вероятность каждого значения, т. е. задать это распределение. Этим будет установлен ***ряд (закон) распределения*** случайной величины.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

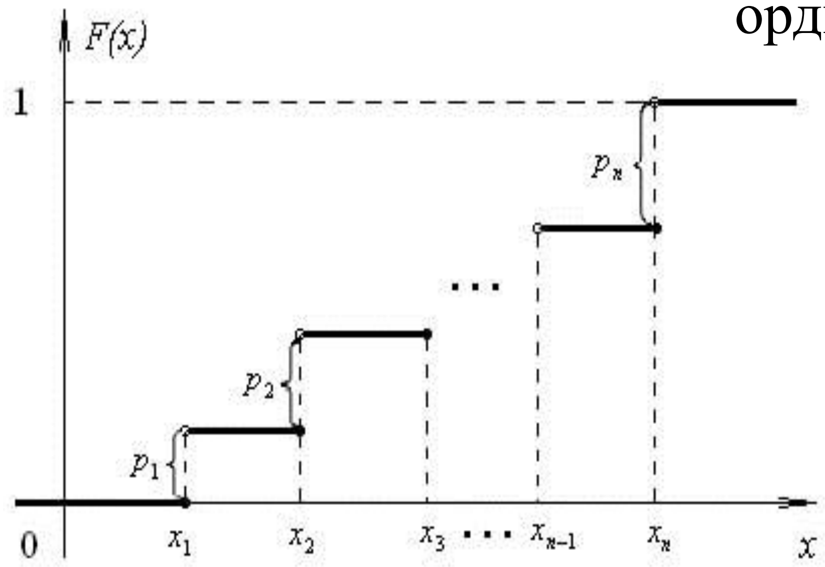
Такое распределение можно рассматривать как полную систему, поэтому справедливо ***условие нормировки:***

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$



Графическое представление ДСВ называется ***многоугольником распределения***

При этом все возможные значения случайной величины откладывают по оси абсцисс, а соответствующие вероятности - по оси ординат.



Функция распределения ДСВ

Для ДСВ можно построить ***интегральную функцию распределения F(X)***, которая изменяется в пределах от 0 до 1 и имеет смысл вероятности.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДСВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Сравнение математического ожидания и среднего значения:

X	x_1	x_2	…	x_k
m	m_1	m_2	…	m_k

m – число появлений данной величины

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$$

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n} =$$

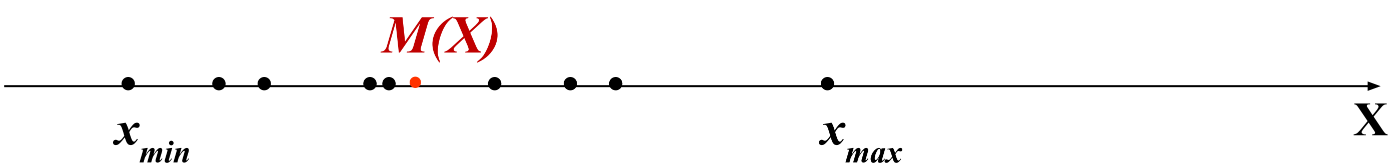
$$= x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_k p_k^*$$

Здесь p^*- относительная частота появления данного значения ДСВ

Если $n \to \infty$, то $p^* \approx p$

$$\overline{X} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = M(X)$$

Математическое ожидание примерно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.



$$x_{min} < M(X) < x_{max}$$

Математическое ожидание является ***характеристикой положения*** данного вида распределения ДСВ

ДИСПЕРСИЯ случайной величины характеризует разброс случайных величин от математического ожидания в данном распределении.

Дисперсия равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 \times p_1 + [x_2 - M(X)]^2 \times p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 \times p_n$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 \times p_i$$

Истинной мерой разброса случайной величины в данном распределении является **СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ** (стандартное отклонение)

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

НЕПРЕРЫВНАЯ СВ может принимать множество значений в некотором конечном или бесконечном промежутке числовой оси.

Задать ряд распределения (по аналогии с ДСВ) при этом невозможно, поскольку

$$P(X) = \frac{m}{n} = \frac{m}{\infty}$$

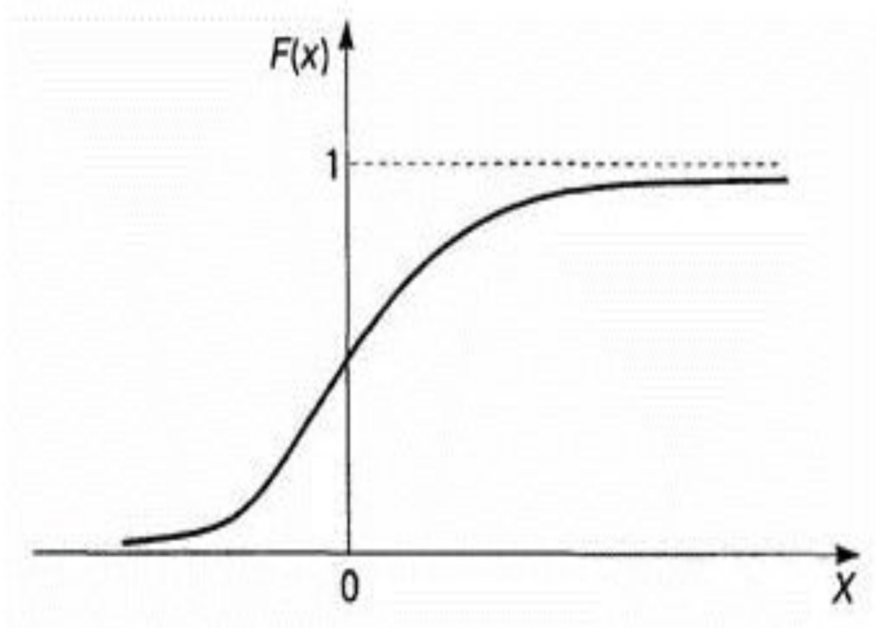
Поэтому НСВ задают ***интегральной функцией распределения F(X)*** или функцией ***плотности вероятности f(x)=F'(X)*** – дифференциальной функцией распределения.

Эти две функции – две формы ***аналитического задания*** закона распределения.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Функция **F(x)**, равная вероятности того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньше некоторого наперед заданного значения ***x***, называется ***функцией распределения данной случайной величины*** **:**

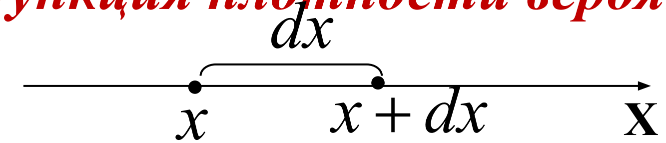
$$\mathbf{F(x)=P(X<\boldsymbol{x})}$$



$$0 < F(x) < 1$$

Функция распределения НСВ

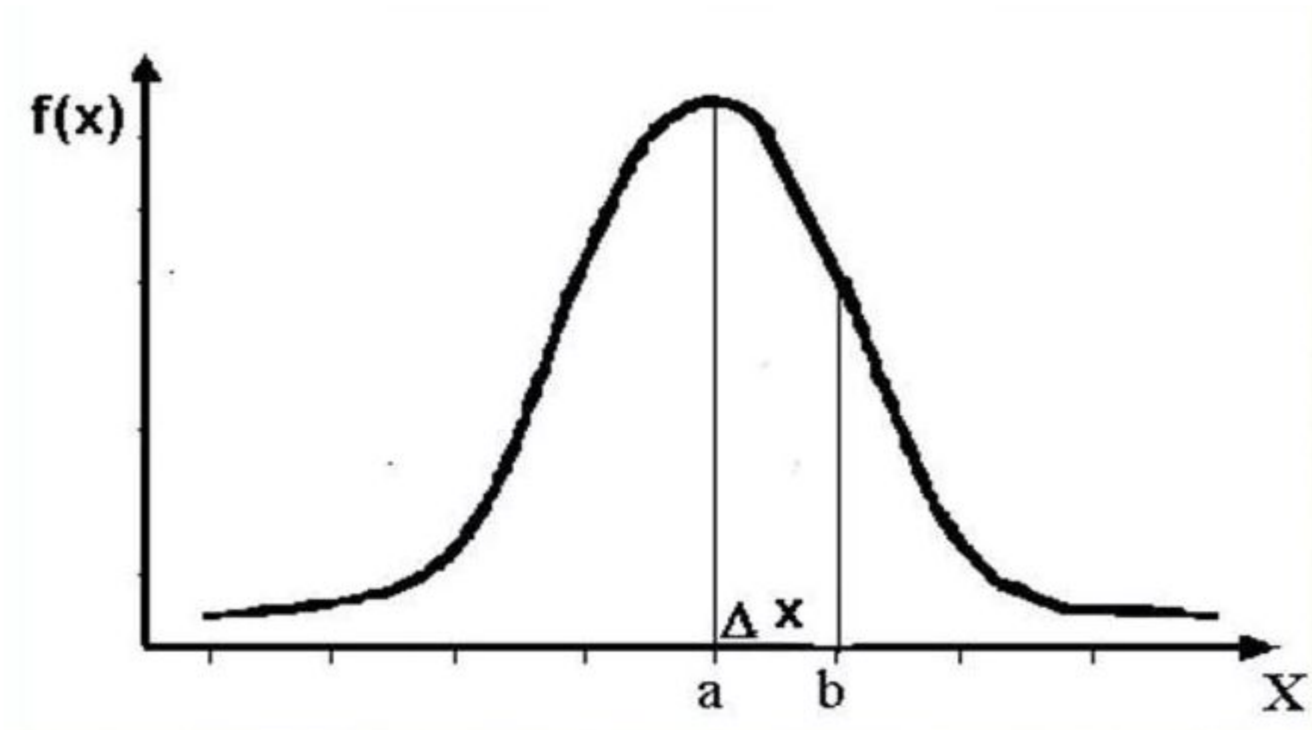
Функция плотности вероятности (плотность вероятности) f(x)



dx – ширина интервала

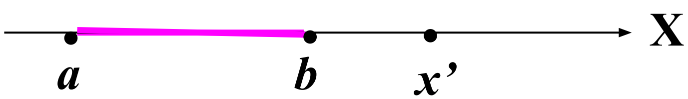
dp – вероятность того, что НСВ принимает значения из этого интервала

$$dp = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x) = \frac{dp}{dx}}$$



Функция плотности распределения вероятностей

Плотность вероятности показывает, как изменяется вероятность, отнесенная к интервалу НСВ, в зависимости от значения самой величины.



Вероятность того, что СВ ***X*** примет значения меньшие x':

$$F(x) = P(X < x')$$

Вероятность того, что СВ принимает какое-либо значение в интервале (***a; b***):

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ $F(X)=P(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

- ✔ **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ** $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
- ✔ **ДИСПЕРСИЯ** $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$
- ✔ **СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ** $\sigma = \sqrt{D(X)}$

Если функция плотности вероятности ***f(x)*** задана на участке (***a,b***), формулы имеют вид:

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx \qquad D(X) = \int_{a}^{b} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

	ДСВ	НСВ
ОПРЕДЕЛЕНИЕ	изолированные значения (или счетное множество значений).	может принимать все значения из некоторого промежутка.
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	Совокупность возможных значений и соответствующих им вероятностей.	Плотность вероятности и функция распределения
УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ	$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
ДИСПЕРСИЯ	$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 p_i$	$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$
СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ	$\sigma = \sqrt{D(X)}$	

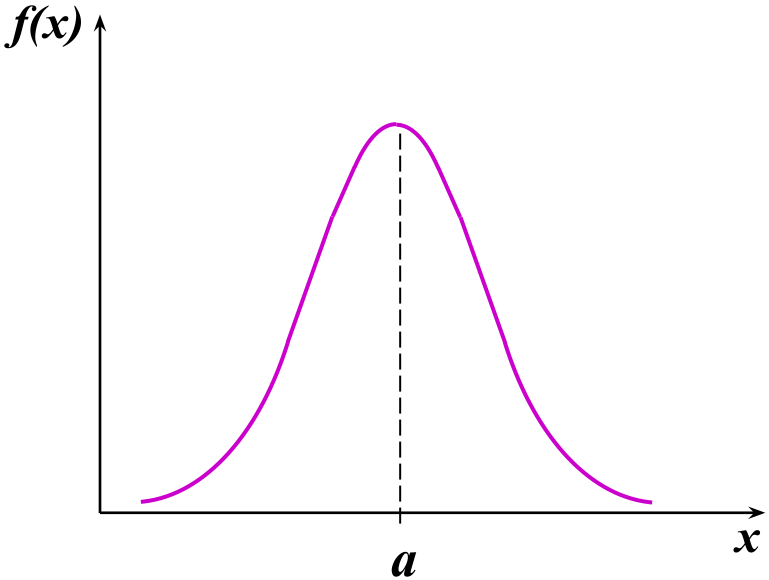
4. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

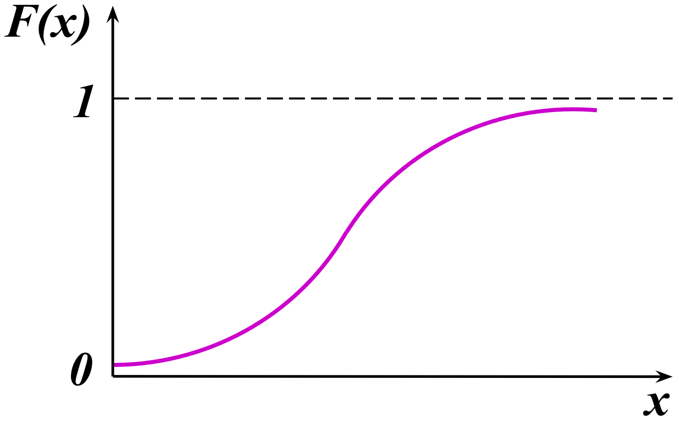
ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ случайной величины — это всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями ***случайной величины*** и соответствующими ***вероятностями***.

1. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Основные параметры нормального распределения: $a = M(X);\ \sigma(X)$

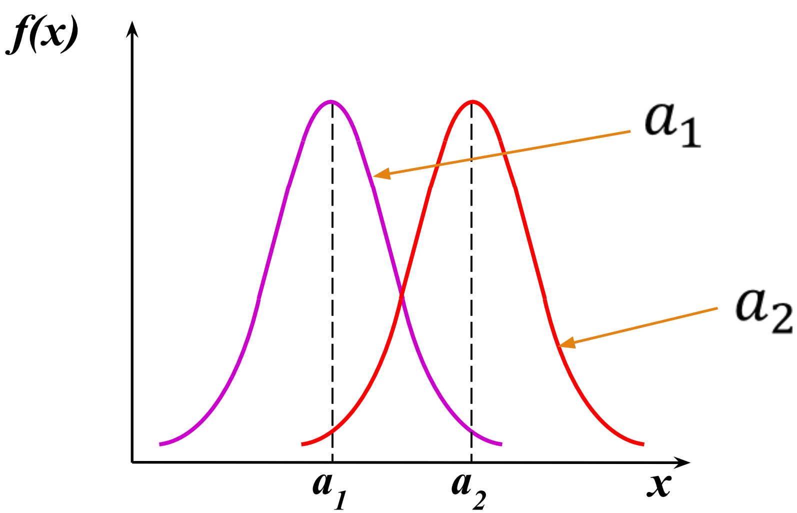




ОСОБЕННОСТИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Распределение является симметричным относительно перпендикуляра, проходящего через точку на оси абсцисс, соответствующую математическому ожиданию. Это означает, что случайные величины, равноотстоящие от математического ожидания имеют одинаковую вероятность появления в распределении.

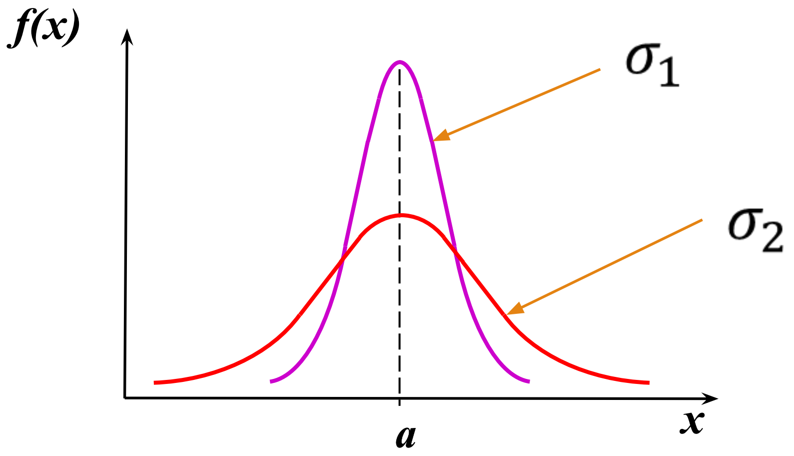
2. При изменении математического ожидания график нормального распределения смещается относительно оси абсцисс



$$a_2 > a_1$$

ОСОБЕННОСТИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

3. Изменение среднего квадратического отклонения влияет на форму «крыльев» распределения. Чем шире размах «крыльев» (больше разброс значений), тем шире размах «крыльев».



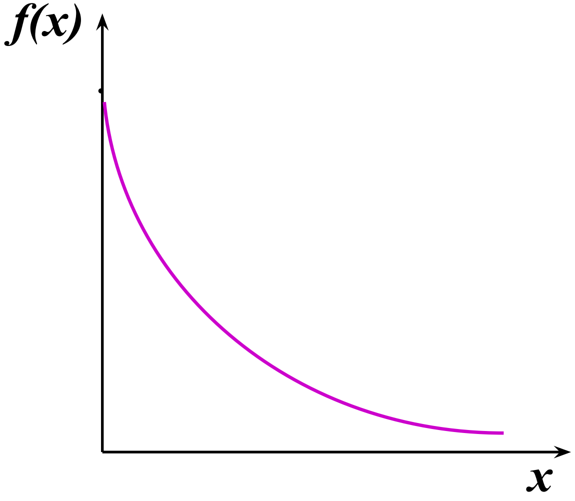
$\sigma_2 > \sigma_1$

4. Площадь под кривой нормального распределения нормирована на 1, следовательно, случайная величина, заданная нормальным законом, достоверно находится в диапазоне значений $[-\infty, +\infty]$.

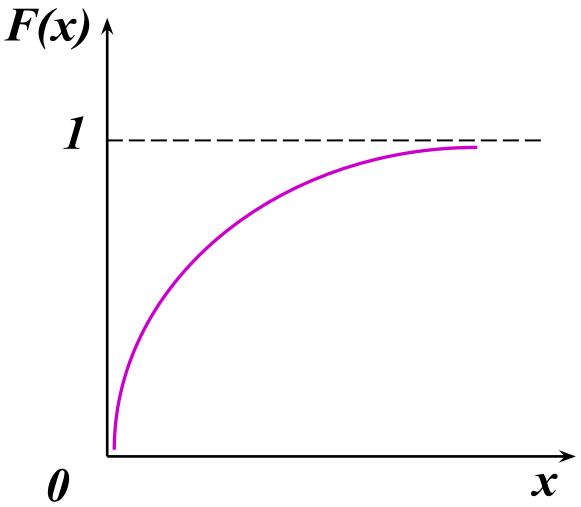
$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ (ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$



$$M(X) = \frac{1}{\alpha} \qquad \sigma = \frac{1}{\alpha}$$



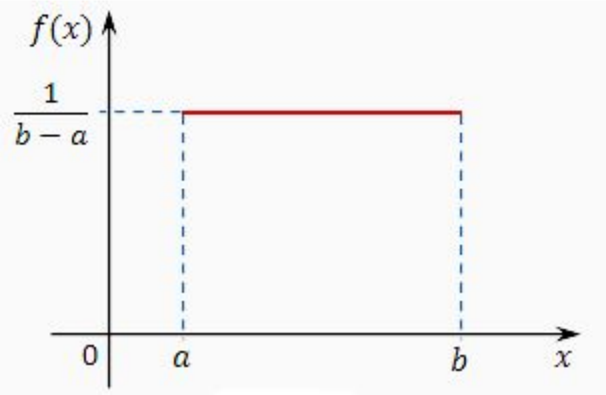
Пример экспоненциального распределения

Экспоненциальное распределение описывает, в частности, количественное распределение молекул в столбе воздуха в поле притяжения Земли.

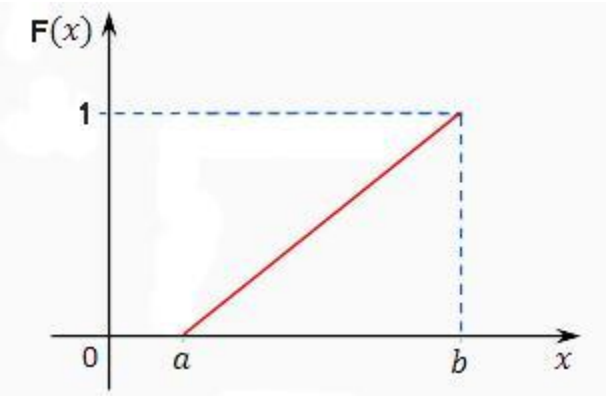
$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный закон* распределения (закон постоянной плотности) на отрезке [a; b], если на этом отрезке функция плотности вероятности случайной величины постоянна



$$M(X) = \frac{b+a}{2}; \sigma = \frac{a-b}{12}$$



Пример равномерного распределения: Ошибка измерения, которая может принимать любое значение между двумя целыми делениями прибора с постоянной плотностью вероятности.

«Теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый смысл, сведенной к исчислению»

Лаплас

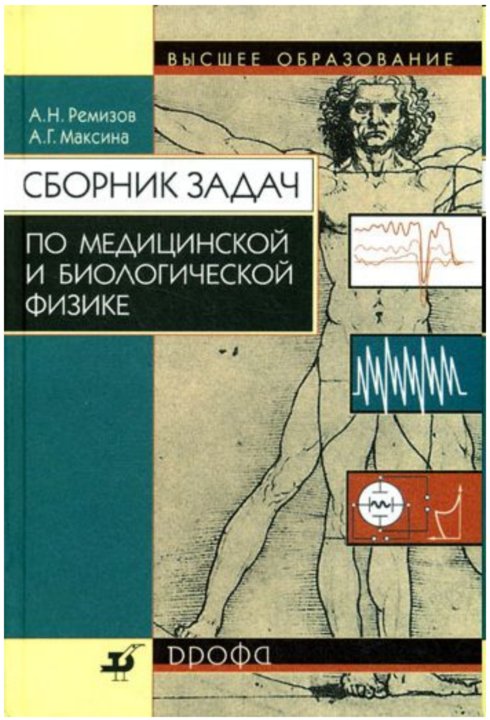
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Медицина – наука экспериментальная и носит вероятностный характер:

постановка диагноза по комплексу признаков, *воздействие лекарств* на пациента в зависимости от его состояния и индивидуальных особенностей и т.п. – зависят от стечения случайных обстоятельств, *являются событиями вероятностными*. Поэтому врачу необходимо знать основы теории вероятностей (ТВ), для выработки правильного подхода к лечебному процессу. ТВ является основой для математической статистики, которая используется для обработки экспериментальных данных в любой области знаний.


МЕДИЦИНСКАЯ И БИОЛОГИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
ДРОФА


ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
М.Е. Блохина
И.А. Эссаулова
Г.В. Мансурова
РУКОВОДСТВО К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ
ДРОФА


ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
А.Н. Ремизов
А.Г. Максина
СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ
ДРОФА

СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ