# Занятие 2

# Решение прикладных задач с использованием основных свойств вероятности

# Вопрос 1

# Повторение основных понятий теории вероятностей

# Стохастический эксперимент

- Определение 1. **Эксперимент**, результат которого нельзя предсказать заранее, называется **стохастическим** (случайным).
- Примеры: подбрасывание монеты, подбрасывание игральной кости, выбор карты из колоды, покупка лотерейного билета, сдача экзамена и т.д.

# Пространство элементарных событий

- Определение 2. Множество всех возможных далее неделимых и взаимно исключающих друг друга исходов стохастического эксперимента называется **пространством элементарных событий (исходов) (ПЭС).**
- Для эксперимента «подбрасывание монеты 1 раз» ПЭС={герб, цифра}.
- Для эксперимента «подбрасывание игральной кости» ПЭС={выпало 1 очко, выпало 2 очка, выпало 3 очка, выпало 4 очка, выпало 5 очков, выпало 6 очков}.
- В рассмотренных экспериментах ПЭС состоят из конечного числа элементов. В таких случаях событиям дается следующее определение.

# Событие

- Определение 3. **Событие** – это подмножество ПЭС, состоящее из таких исходов, которые благоприятствуют событию. Исход благоприятствует событию, если при его появлении рассматриваемое событие происходит.
- Эксперимент: «подбрасывание игральной кости».
- Событие А – выпадение четного числа очков.
- А={выпало 2 очка, выпало 4 очка, выпало 6 очков}.
- В эксперименте все исходы ПЭС являются равновозможными. В таких случаях, для нахождения вероятности события используют следующее определение.

# Вероятность

В основе общего определения вероятности события лежит экспериментальная характеристика – относительная частота:

$$P^* = \frac{k(A)}{N},$$

где $N$ – число проведенных экспериментов;

$k(A)$ – число тех из них, в которых произошло событие $A$.

При достаточно больших $N$ величина $P^*$ мало отличается от некоторого числа $P(A)$, которое и называется вероятностью события $A$. На практике это определение используется, если исходы равновозможные.

**Вероятностью** события А называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию $A$, к общему числу равновозможных элементарных событий: $P(A) = \frac{m}{n}$, где n - общее число равновозможных элементарных событий; m - число элементарных событий, благоприятствующих событию $A$.

# Вопрос 2
# Классификация событий и действия над событиями

# Классификация событий

- <u>Определение 5.</u> Событие, которое в результате эксперимента обязательно произойдет, называется **достоверным**. Например, выпадение целого числа очков при бросании игральной кости.
- <u>Определение 6.</u> Событие, которое в результате эксперимента никогда не произойдет, называется **невозможным**. Например, выпадение отрицательного числа очков при бросании игральной кости.
- <u>Определение 7.</u> Все остальные события называются **случайными** – в результате эксперимента они могут произойти, а могут и не произойти. Вероятности именно таких событий интересуют нас при решении задач по ТВ.

# Действия над событиями

- Определение 8. **Суммой двух событий *A* и *B*** называется событие *A*+*B*, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий *A* и *B* (или А, или В, или оба вместе).
- Определение 9. Произведением **двух событий *A* и *B*** называется событие , которое происходит тогда и только тогда, когда происходит и событие *A*, и событие *B*.
- Определение 10. Два события *A* и *B* называются **несовместными**, если эти события одновременно в одном эксперименте никогда не произойдут. Например, несовместными являются события: А – выпадение четного числа очков, В – выпадение тройки.
- Определение 11. Событие  называется противоположным событию *A*. Оно происходит тогда и только тогда, когда *A* не происходит. Например, если событие А – выпадение четного числа очков, то событие  – выпадение нечетного числа очков.

# Вопрос 3
# Свойства вероятности

# Свойства вероятности (1, 2)

1) $0 \le P(A) \le 1$, причем $P(A) = 0$ для невозможного события, $P(A) = 1$ для достоверного события.

2) Для двух несовместных событий А и В $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

А – выпадение четного числа очков, $A = \{2,4,6\}$, $P(A) = \dfrac{3}{6}$.

В – выпадение числа очков не больше 1, $B = \{1\}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$.

$A + B = \{1,2,4,6\}$, $P(A + B) = \dfrac{4}{6}$.

События А и В несовместные.

Проверим выполнение равенства $P(A + B) = P(A) + P(B)$:

$\dfrac{4}{6} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6}$ - верно!

# Свойства вероятности (3, 4)

3) Рассмотрим два события: $A$ и $B=\overline{A}$. Эти события несовместные, причем в эксперименте какое-то их них обязательно произойдет, т.е. $A+\overline{A}$ - это достоверное событие. Тогда $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$, отсюда получаем важное свойство: $P(A)=1-P(\overline{A})$.

4) для двух любых событий $A$ и $B$ $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

A – выпадение четного числа очков, $A=\{2,4,6\}$, $P(A)=\dfrac{3}{6}$.

B – выпадение числа очков кратное трем, $B=\{3,6\}$, $P(B)=\dfrac{2}{6}$.

$A+B=\{2,3,4,6\}$, $P(A+B)=\dfrac{4}{6}$.

События $A$ и $B$ совместные, $A\cdot B=\{6\}$, $P(A\cdot B)=\dfrac{1}{6}$.

Проверим выполнение равенства $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$:

$\dfrac{4}{6}=\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}-\dfrac{1}{6}$ - верно!

# Вопрос 4
# Основные теоремы теории вероятностей

# Условная вероятность

**Условная вероятность** события $A$, вычисленная при условии, что событие $B$ произошло обозначается $P(A|B)$, определяется по формуле:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ где } P(B) \neq 0.$$

Аналогично, если $P(A) \neq 0$, определяется условная вероятность события $B$ при условии $A$: $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

# Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B\,|\,A) = P(B)\cdot P(A\,|\,B).$$

События $A$ и $B$ называются **независимыми**, если выполнено равенство: $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$.

Замечание: на практике о независимости тех или иных событий часто судят исходя из интуитивных соображений и анализа условий опыта, считая независимыми события, «между которыми нет причинно-следственных связей».

# Пример 1

В коробке 4 белых, 3 синих и 2 черных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 1-ый шар будет белым, 2-ой – синим, 3-ий – черным?

Введем следующие события:

$A_1$ - первым вынули белый шар;

$A_2$ - вторым вынули синий шар;

$A_3$ - третьим вынули черный шар.

Тогда интересующее нас событие $A$ представляется в виде: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. По правилу умножения вероятностей

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}.$$

# Пример 2

Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Введем в рассмотрение следующие события:

$A$ – появление шестерки на первой кости;

$B$ – появление шестерки на второй кости.

Тогда $A+B$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одной шестерки при бросании костей. События A и B совместные, тогда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{36}.$$

Решим иначе:

$$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{36}.$$

# Задача 1

Задача 1.

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение:

A – чайник прослужит больше года, но меньше двух лет ($1 < t < 2$).
B – чайник прослужит больше года ($t > 1$), P(B)=0,93.
C – чайник прослужит больше двух лет ($t > 2$), P(C)=0,87.
D – чайник прослужит ровно два года ($t = 2$), P(D)=0.
B=A+D+C.
События A, D и C являются попарно несовместными, тогда
P(B)=P(A+D+C)=P(A)+P(D)+P(C).
Получаем уравнение: 0,93=P(A)+0,87;

P(A)=0,97-0,83=0,06.

Ответ: вероятность того, что чайник прослужит меньше двух лет, но больше года равна 0,06.

# Задача 2

<u>Задача 2.</u>

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение:

A – исправен **хотя бы один** из двух платежных автоматов, P(A)=?

$\overline{A}$ **-** ни один из двух автоматов не исправен;

A1 – не исправен первый автомат, P(A1)=0,05;

A2 – не исправен второй автомат, P(A2)=0,05.

$\overline{A} = A_1 \cdot A_2$.

Так как события A1 и A2 независимы, то

$P(\overline{A}) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$.

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

Ответ: вероятность того, что хотя бы один автомат исправен, равна 0,9975.

# Задача 3

Задача 3.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение:

$A$ – кофе останется в обоих автоматах;

$\overline{A}_1$ – в первом автомате закончится кофе, $P(\overline{A}_1)=0,25$;

$\overline{A}_2$ – во втором автомате закончится кофе, $P(\overline{A}_2)=0,25$.

Известно, что $P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = 0,15$.

$\overline{A}$ - кофе закончится хотя в одном автомате.

$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$. События $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ совместные, тогда

$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 + \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) + P(\overline{A}_2) - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = 0,25 + 0,25 - 0,15 = 0,35$.

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,35 = 0,65$.

Ответ: вероятность того, что к вечеру дня кофе останется в обоих автоматах равна 0,65.

# Задача 4

Задача 4.

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение:

А – команда выйдет в следующий круг соревнований (наберет хотя бы 4 очка в двух играх);

А1 – команда наберет 3 очка в первой игре **и** 1 очко во второй игре;

А2 – команда наберет 1 очка в первой игре **и** 3 очка во второй игре;

А3 – команда наберет 3 очка в первой игре **и** 3 очка во второй игре.

А=А1+А2+А3. Так события А1, А2, А3 попарно несовместны, то Р(А)=Р(А1)+Р(А2)+Р(А3).

$P(A_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$; $P(A_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$; $P(A_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$. Тогда Р(А)=0,08+0,08+0,16=0,32.

Ответ: команда выйдет в следующий круг соревнований с вероятностью 0,32.

Следующее занятие школы-семинара на тему: «Повторение испытаний в неизменных условиях и расчет вероятностей успеха (неудачи)»

Лектор: к.э.н., доцент

**Чудинова Ольга Сергеевна**

Дату и время можно уточнить по тел. 89128432428 или на нашей странице

https://vk.com/abiturient_fef_pm