Уравнения движения твердого тела

Твердое тело – это тело, расстояния между точками которого не меняется.

Твердое тело – механическая система с 6 степенями свободы ⇒

для описания его движения требуется 6 скалярных уравнений или 2 векторных уравнения:

$$\begin{cases} m\dfrac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} & \text{– теорема о движении центра масс} \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(e)} & \text{– уравнение моментов} \end{cases}$$

$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}$ – а) относительно неподвижного начала или центра масс;
б) относительно подвижного начала с $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C$.

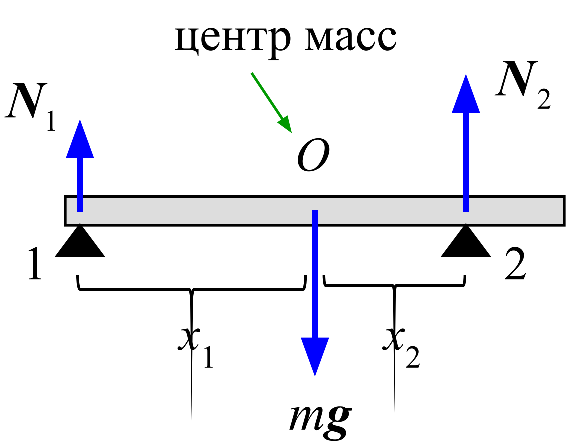
Равновесие твердого тела

Условия равновесия:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{F}^{(e)} = 0 \\ \boldsymbol{M}^{(e)} = 0 \end{cases}}$$

$\boldsymbol{M}^{(\mathrm{e})} = 0$ относительно любого начала

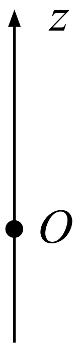
Равновесие балки



$$\begin{cases} N_1 + N_2 - mg = 0 \\ -N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} mg \qquad N_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} mg$$

Уравнение моментов относительно неподвижной оси



z – неподвижная ось (ось моментов)

Уравнение моментов $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$

При проецировании на ось z

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = M_z}$$

– уравнение моментов относительно неподвижной оси

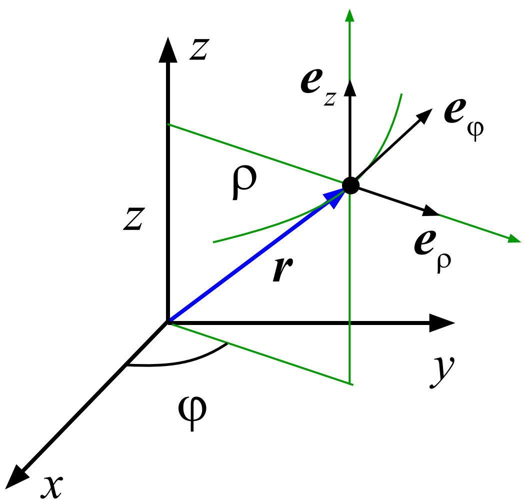
В цилиндрической системе координат

$$L_z = \rho m v_\varphi \qquad M_z = \rho F_\varphi$$

Уравнение моментов относительно неподвижной оси

Цилиндрическая система координат

(ρ, φ, z) – координаты в цилиндрический системе координат



$\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ – локальные координатные орты (направлены в сторону увеличения соответствующей координаты)

$$x = \rho\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi$$

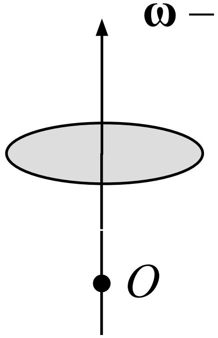
$$z = z$$

$$M_z = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})_z = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ F_\rho & F_\varphi & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{M_z = \rho F_\varphi}$$

Уравнение динамики вращательного движения

ω – ось моментов



$$\left.\begin{aligned} L_z &= \sum \rho_i m_i v_i \\ v_i &= \omega\rho_i \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad L_z = \omega \sum m_i \rho_i^2 \quad \Longrightarrow$$

$$I_z = \sum m_i \rho_i^2$$

– *момент инерции* (характеризует инерционные свойства тела относительно данной оси вращения)

$$L_z = I_z \omega$$

$\Longrightarrow$ (из уравнения моментов относительно неподвижной оси)

$$\boxed{\frac{d}{dt}(I_z\omega) = M_z}$$

– *уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси*

M_z – момент внешних сил относительно оси вращения

Уравнение динамики вращательного движения

Работа, совершаемая моментом силы

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = \mathbf{F}(d\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}) = d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = M_z d\varphi \Rightarrow$$

$$dA = M_z d\varphi$$

Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega r_i)^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2 \Rightarrow$$

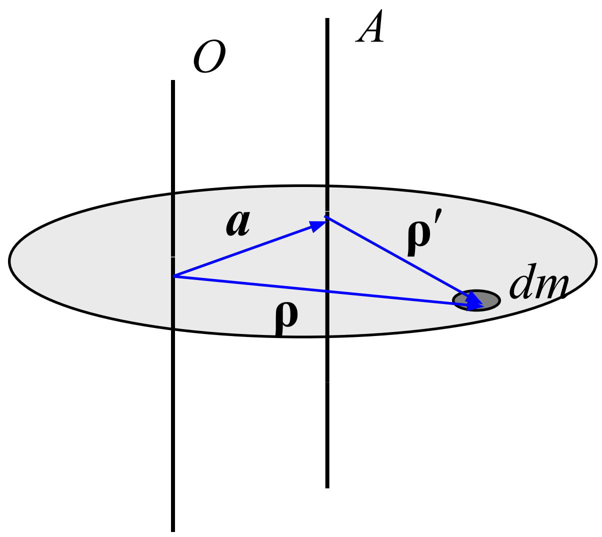
$$K = \frac{I_z\omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия твердого тела

$$K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}$$

v_C – скорость центра масс,
I_C – момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс

Теорема Гюйгенса–Штейнера



$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}'$ – аксиальные вектора

ось O $\parallel$ оси A

$$\rho'^2 = (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{a})^2 = \rho^2 + a^2 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{\rho}$$

$$I_A = \int \rho'^2 dm = \int \rho^2 dm + \int a^2 dm - 2\boldsymbol{a}\int \boldsymbol{\rho}\, dm$$

$$\int \rho^2 dm = I_O \qquad \int \boldsymbol{\rho}\, dm = m\boldsymbol{\rho}_C$$

Если O проходит через центр масс, то $\boldsymbol{\rho}_C = 0$ и

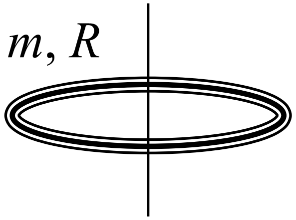
$$\boxed{I_A = I_C + ma^2}$$

– теорема Гюйгенса-Штейнера

Вычисление моментов инерции

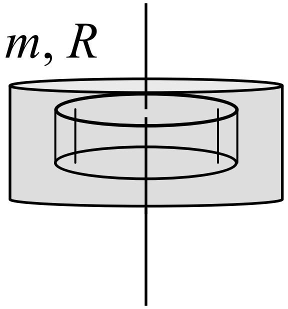
Общая формула $I = \int \rho^2 dm$

1) Кольцо



$$I = mR^2$$

2) Диск (цилиндр)



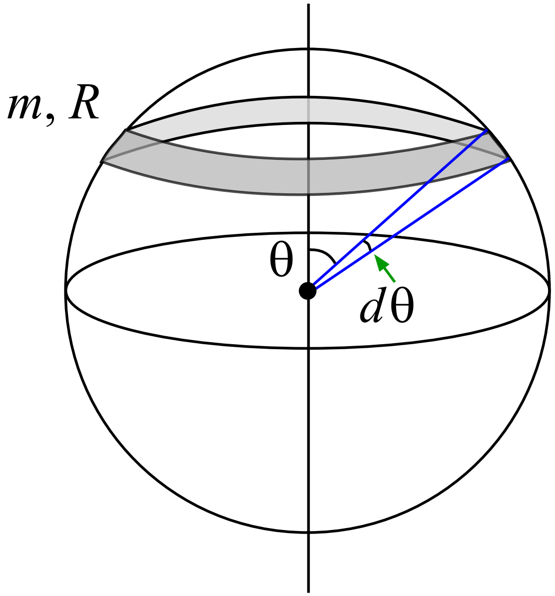
Диск = система колец $\Rightarrow$ $dm = m\dfrac{dS}{S} = 2m\dfrac{rdr}{R^2}$

$$\left(dS = 2\pi r dr, \;\; S = \pi R^2 \right) \qquad I = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}mR^2$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Вычисление моментов инерции

3) Сфера



Сфера = система колец $\Rightarrow$ $dm = m\dfrac{dS}{S}$

$$\left.\begin{aligned} dS &= 2\pi(R\sin\theta)(Rd\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\ S &= 4\pi R^2 \\ r &= R\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$I = \int r^2 dm = \frac{1}{2} mR^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3} mR^2$$

$$I = \frac{2}{3} mR^2$$

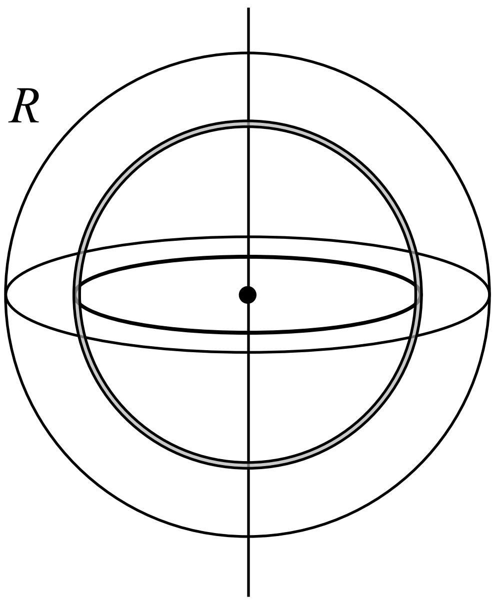
Вычисление моментов инерции

4) Шар

Шар = система сфер

$$dm = m\frac{dV}{V}$$

m, R



$$dV = 4\pi r^2 dr$$

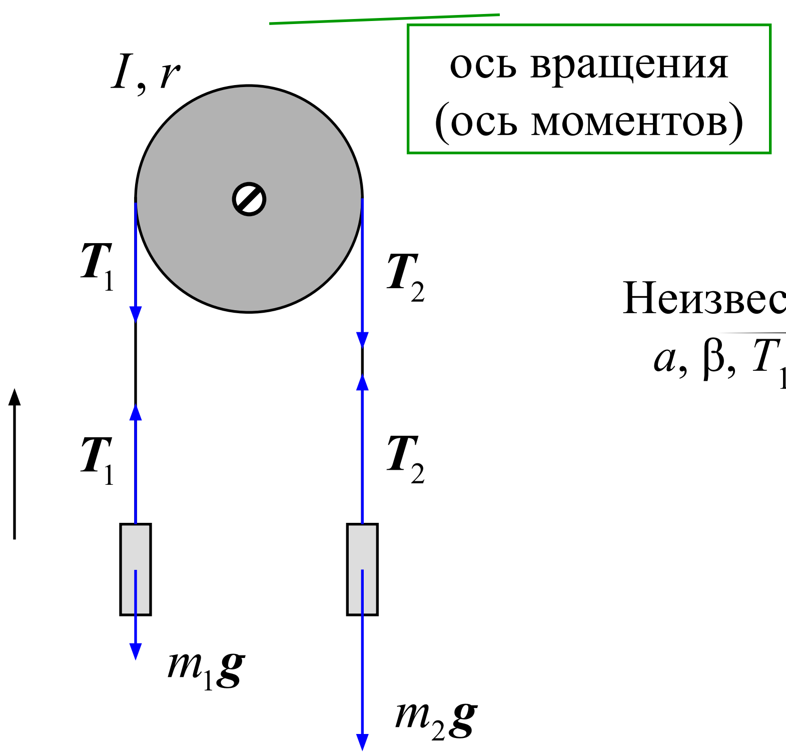
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$I = \int dI = \int \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{2m}{R^3}\int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} mR^2$$

$$\boxed{I = \frac{2}{5} mR^2}$$

Вычисление моментов инерции

Машина Атвуда



$$a = ?$$

$$a_1 = a,\ \ a_2 = -a$$

Неизвестные
a, β, T_1, T_2

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g \\ -m_2 a = T_2 - m_2 g \\ I\beta = r(T_2 - T_1) \\ r\beta = a \end{cases} \Rightarrow$$

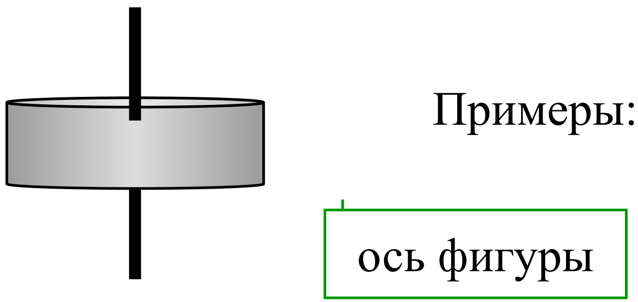
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/r^2}\, g$$

Движение твердого тела, закрепленного в точке. Гироскопы

Гироскоп

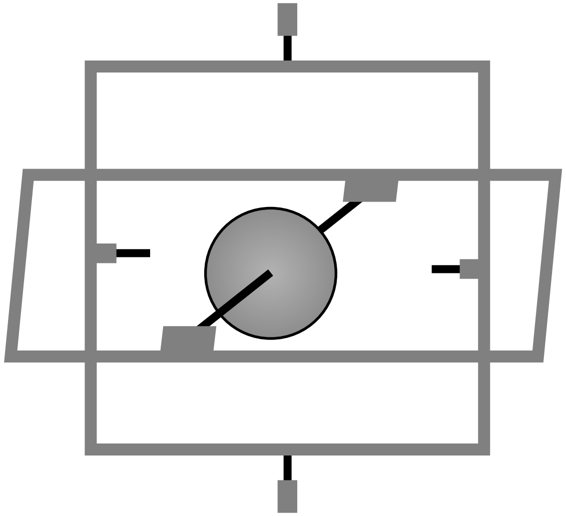
Гироскопы – аксиально-симметричные тела (тела вращения)

Примеры: волчок, диск с осью.



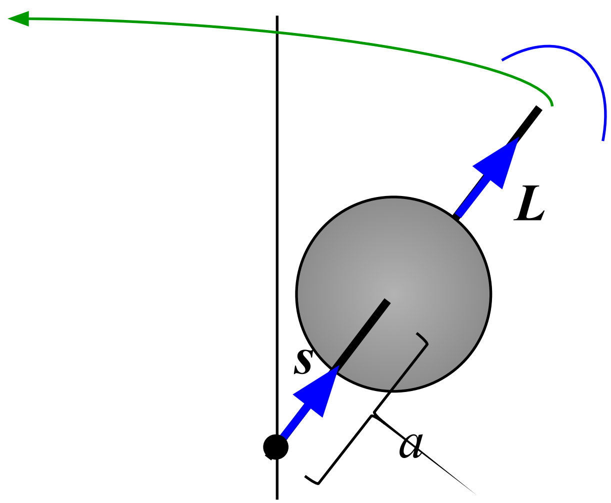
Карданов подвес

Точка закрепления тела – точка пересечения 3-х осей.



Движение твердого тела, закрепленного в точке. Гироскопы

Закрепленный гироскоп



Точка закрепления находится на оси гироскопа и не совпадает с его центром масс.

В поле тяжести движение гироскопа называется *вынужденной прецессией*.

<u>Приближенная теория гироскопа</u>

(ω вокруг оси >> Ω самой оси)

$$\boldsymbol{L} \approx I_{||}\omega\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{r}_C = a\boldsymbol{s}$$

$\boldsymbol{L}$ – момент импульса

r_C – радиус–вектор центра масс

$\boldsymbol{s}$ – единичный вектор вдоль оси гироскопа

$I_{||}$ – момент инерции относительно оси

Движение твердого тела, закрепленного в точке. Гироскопы

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{g})$$ – момент сил, действующий на гироскоп

$$\boldsymbol{M} = (a\boldsymbol{s} \times m\boldsymbol{g}) = \left(-\frac{ma}{I_{||}\omega}\boldsymbol{g} \times \underbrace{I_{||}\omega\boldsymbol{s}}_{=\boldsymbol{L}} \right) = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}) \qquad \left(\boldsymbol{\Omega} = -\frac{ma}{\omega I_{||}}\boldsymbol{g} \right)$$

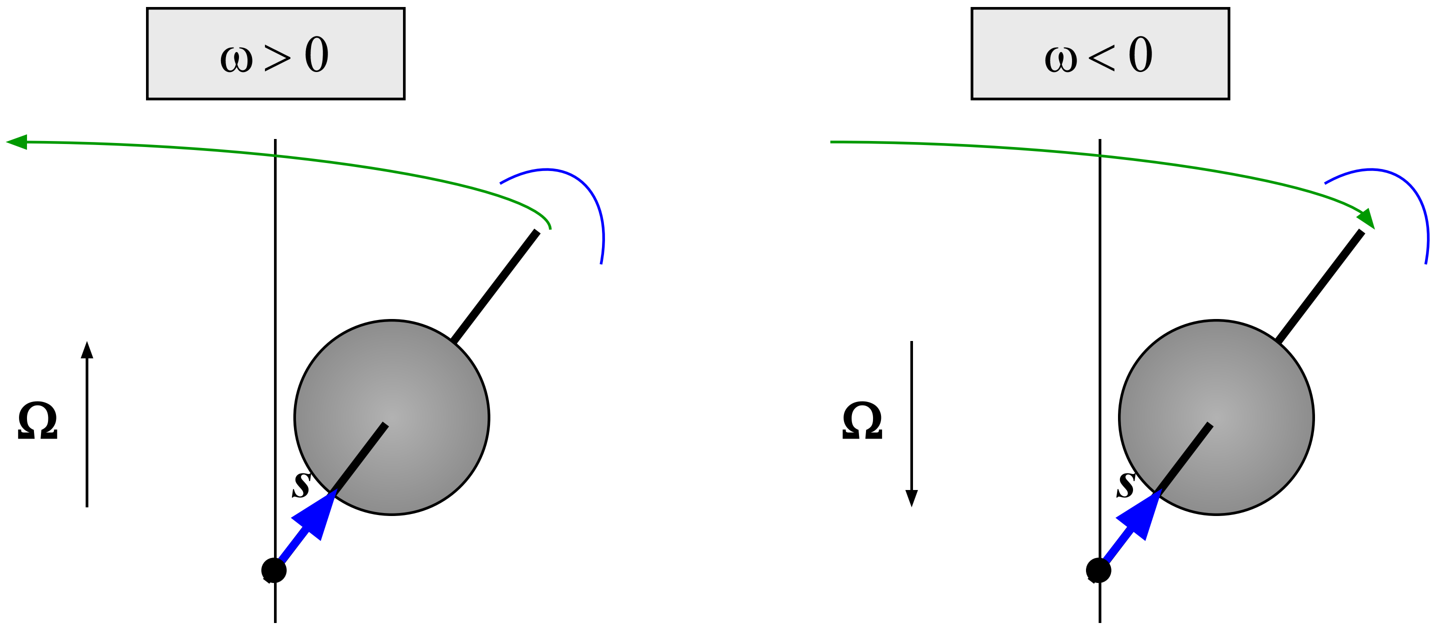
Уравнение моментов для гироскопа

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}$$

Из аналогии – вращательного движения мат. точки $\quad \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad \Rightarrow$

Вектор $\boldsymbol{L}(s)$ вращается вокруг вертикальной оси с $\quad \boldsymbol{\Omega} = -\dfrac{ma}{\omega I_{||}}\boldsymbol{g}$

Движение твердого тела, закрепленного в точке. Гироскопы



Точная теория гироскопа: на прецессию оси гироскопа накладывается дрожание самой оси – *нутация*.