

Тема 4. «Обратная матрица. Ранг матрицы.»

Основные понятия:

1. **Определение обратной матрицы**
2. **Способы нахождения обратной матрицы**
3. **Ранг матрицы, способы нахождения ранга матрицы**

1. Определение обратной матрицы

Необходимо: матрица должна быть **квадратной**.

Матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице A , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Теорема. Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}

2. Способы нахождения обратной матрицы

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

- 1) Вычисление определителя матрицы A ,
- 2) Построение матрицы алгебраических дополнений A_{ij}

(присоединенная матрица)

- 3) Нахождение $(A_{ij})^T$

- 4) Нахождение обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{ij})^T$$

Обращение матрицы можно осуществить по следующему правилу.

1. Вычислить определитель исходной матрицы $\Delta = \det A$.

2. Сформировать матрицу из алгебраических дополнений всех элементов исходной матрицы

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

3. Транспонировать матрицу алгебраических дополнений, что дает присоединенную матрицу по отношению к исходной матрице A .

4. Каждый элемент присоединенной матрицы разделить на определитель исходной матрицы Δ .

Пример 1.10. Произвести обращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и доказать, что она обратная.

Решение

1. $\Delta = \det A = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 4$ – определитель.

2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица из алгебраических дополнений.

3. $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица из алгебраических дополнений.

4. $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$ – обратная матрица.

Доказательство: Если A^{-1} – обратная матрица, то справедливо выражение $AA^{-1} = E$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

● Нахождение обратной матрицы

Обратной матрицей по отношению к данной невырожденной квадратной матрице A n -ного порядка, называется матрица, которая, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Обратная матрица обозначается символом A^{-1} . Таким образом, согласно определению: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A \rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow A^T \rightarrow A^+ \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+$$

Транспонированная матрица
Получается из матрицы A путем замены строк элементами матрицы A^T на его соответствующими столбцами

Присоединенная матрица
Получается путем замены каждого элемента матрицы A^T на его алгебраическое дополнение

Если определитель матрицы равен нулю, то обратная матрица не существует

Действия над матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 = 2$$

$\rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Из второй строки вычтем первую строку $\rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

Разложим определитель по элементам 3 столбца

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 = -2$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3 = 2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^5 = 6$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы (Метод Гаусса):

- 1) К матрице A справа приписывается E ,
- 2) Прodelывая преобразования над строками расширенной матрицей $(A|E)$, матрицу A приводят к E ,
- 3) Справа на месте приписанной матрицы E будет получена обратная матрица.

Примеры. Найдем обратные матрицы к матрицам

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Ранг матрицы

Ранг матрицы (1)

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Минором k – го порядка матрицы A
называется ***определитель k – го порядка***
с элементами, стоящими ***на пересечении***
любых k строк и k столбцов.

$$(k \leq \min\{m, n\})$$

Ранг матрицы (2)

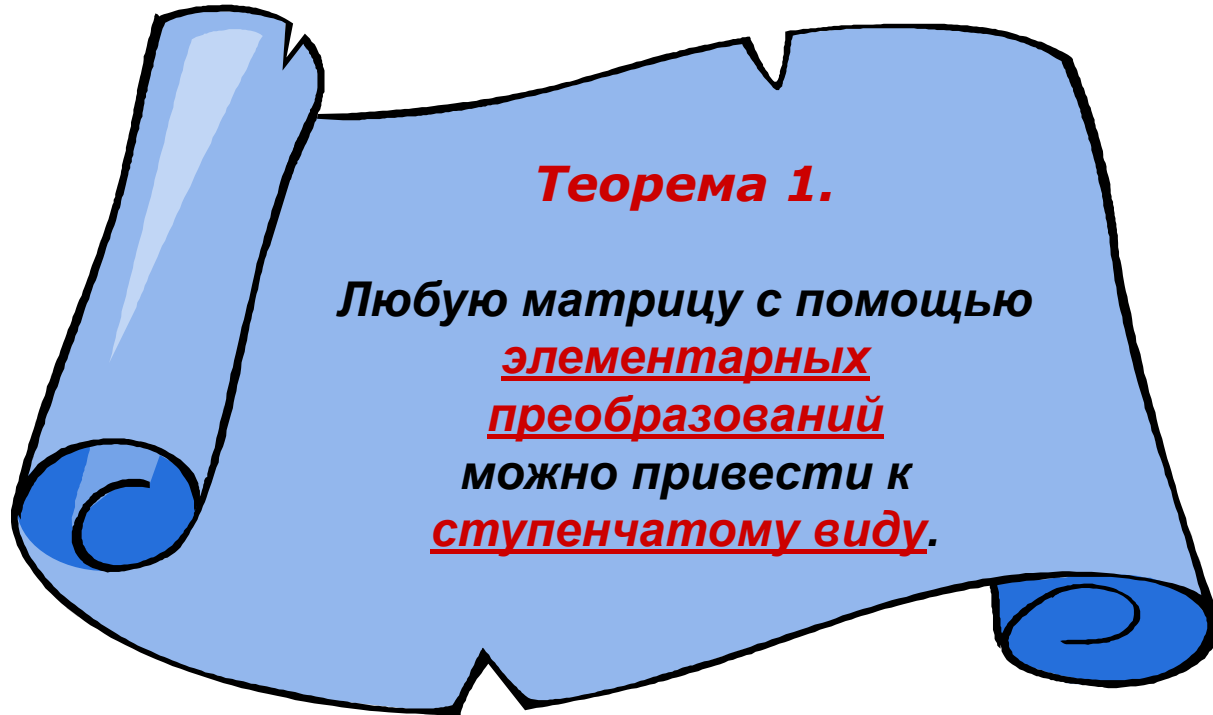


Рангом матрицы $r(A)$
называется **наибольший**
из порядков миноров данной
матрицы, **отличных от нуля**.

Элементарные преобразования матриц



Элементарные преобразования матриц (1)



Теорема 1.

Любую матрицу с помощью
элементарных
преобразований
можно привести к
ступенчатому виду.

Элементарные преобразования матриц (2)



Ранг ступенчатой матрицы равен числу (ненулевых) строк.

Пример 6 (1)

Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 6 (2)

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{l} \cdot \\ \underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow \oplus \end{array}$$

Пример 6 (3)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \\ \underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow \oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 6 (4)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \\ \underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow \oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \div \\ \underline{(-3)} \\ \downarrow \\ \leftarrow \oplus \end{array}$$

Пример 6 (5)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \\ \underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow \oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vdots \\ \underline{(-3)} \\ \downarrow \\ \leftarrow \oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 6 (6)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} (-1) \\ \downarrow \\ \leftarrow \oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 6 (7)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} (-1) \\ \downarrow \\ \leftarrow \oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$r(A)=2$$

3. Ранг матрицы, способы нахождения ранга матрицы

Рангом матрицы называют наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля (обозначается r).

Способ нахождения ранга матрицы (по свойству миноров):

Свойство миноров. Если все миноры порядка k данной матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю.

Следовательно, если среди миноров порядка k данной матрицы есть отличные от нуля, а все миноры порядка $(k+1)$ равны нулю или не существуют, ранг матрицы равен k .

Способ нахождения ранга матрицы (сведение матрицы к квазитреугольной форме).

Пример. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 7 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad r = 3$$