- Лекция 13.
- 2 семестр

$$y' + \frac{1}{x} y = y^2 \frac{\ln x}{x}$$

1. ДУ с разделяющимися переменными

$$\boxed{y' = f_1(x) \cdot f_2(y)}$$

$$\boxed{P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0}$$

2. Однородные уравнения

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

3. Линейные уравнения

$$\boxed{y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)}$$

4. Уравнения Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^k,$$

$$k \in \mathrm{Q}, \quad k \neq 0, \quad k \neq 1.$$

5. Уравнения в полных дифференциалах

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$$

$$P'_y = Q'_x$$

$$y' - 2ye^{x} = 2\sqrt{ye^{x}}$$

1. ДУ с разделяющимися переменными

$$\boxed{y' = f_1(x)\cdot f_2(y)}$$

$$\boxed{P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0}$$

2. Однородные уравнения

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

3. Линейные уравнения

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$$

4. Уравнения Бернулли

$$\boxed{\begin{gathered} y' + p(x)y = q(x)y^{k}, \\ k \in Q,\ \ k \neq 0,\ \ k \neq 1. \end{gathered}}$$

5. Уравнения в полных дифференциалах

$$\boxed{\begin{gathered} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \\ P'_y = Q'_x \end{gathered}}$$

$$x y' = y(\ln y - \ln x) \qquad y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}\right)$$

1. **ДУ с разделяющимися переменными**

$$\boxed{y' = f_1(x)\cdot f_2(y)}$$

$$\boxed{P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0}$$

2. **Однородные уравнения**

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

3. **Линейные уравнения**

$$\boxed{y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)}$$

4. **Уравнения Бернулли**

$$\boxed{\begin{gathered} y' + p(x)y = q(x)y^k, \\ k \in \mathrm{Q},\ \ k \neq 0,\ \ k \neq 1. \end{gathered}}$$

5. **Уравнения в полных дифференциалах**

$$\boxed{\begin{gathered} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \\ P'_y = Q'_x \end{gathered}}$$

Замечание. ДУ может быть линейным или уравнением Бернулли не только относительно y, но и относительно x.

$$x' + P(y)x = Q(y).$$

$$x' + P(y)x = Q(y)x^k.$$

Тогда решение уравнения ищется в виде:

$$x(y) = U(y)V(y), \quad x' = U'V + V'U.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y} \qquad \frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y$$

1. ДУ с разделяющимися переменными

$$\boxed{y' = f_1(x)\cdot f_2(y)}$$

$$\boxed{P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0}$$

2. Однородные уравнения

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

3. Линейные уравнения

$$\boxed{y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)}$$

4. Уравнения Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^k, \quad k \in \mathrm{Q}, \;\; k \neq 0, \;\; k \neq 1.$$

$$x' - \cos y \cdot x = \sin 2y$$

5. Уравнения в полных дифференциалах

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$$

$$P'_y = Q'_x$$

$$y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$$

$$x' = \frac{2y\ln y + y - x}{y}$$

1. ДУ с разделяющимися переменными

$$\boxed{y' = f_1(x)\cdot f_2(y)}$$

$$\boxed{P(x)Q(y)\,dx + R(x)S(y)\,dy = 0}$$

2. Однородные уравнения

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

3. Линейные уравнения

$$\boxed{y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)}$$

4. Уравнения Бернулли

$$x' + \frac{x}{y} = 2\ln y + 1$$

$$\boxed{\begin{gathered} y' + p(x)y = q(x)y^k, \\ k \in \mathrm{Q},\ \ k \neq 0,\ \ k \neq 1. \end{gathered}}$$

5. Уравнения в полных дифференциалах

$$\boxed{\begin{gathered} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \\ P'_y = Q'_x \end{gathered}}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

пример

Решить ДУ $y' + \frac{2y}{x} = 5x^2;$

$$y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{2}{x}uv = 5x^2 \qquad u' \cdot v + u(v' + \frac{2}{x}v) = 5x^2$$

$$\left[\begin{array}{l} u' \cdot v + u(v' + \frac{2}{x}v) = 5x^2 \\ u' \cdot v + u(v' + \frac{2}{x}v) = 5x^2 \end{array}\right.$$

1) $\frac{dv}{v} = -\frac{2}{x}dx \Rightarrow \ln|v| = -2\ln|x| = \ln\frac{1}{x^2}; v = \frac{1}{x^2}$

2) $u' \cdot \frac{1}{x^2} = 5x^2 \Rightarrow u' = 5x^4 \Rightarrow u = x^5 + c;$

$$y = (x^5 + c)\frac{1}{x^2} = x^3 + \frac{c}{x^2}$$

приме
р

Решить ДУ $y' - y = e^{6x} \cdot y^{-2}$ **- уравнение Бернулли**

$$y = u \cdot v; \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - uv = e^{6x}(uv)^{-2}$$

$$u' \cdot v + u(v' - v) = (uv)^{-2} e^{6x}$$

$$\left[\begin{array}{l} v' - v = 0; \\ u' \cdot v = (uv)^{-2} e^{6x}; \end{array}\right.$$

$$1) \quad v' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = dx \Rightarrow \ln|v| = x \Rightarrow v = e^{x}$$

$$v = e^{x} \qquad u' \cdot v = (uv)^{-2} e^{6x};$$

$$e^{x} \cdot u' = u^{-2} e^{-2x} e^{6x} \Rightarrow u^{2} u' = e^{3x}$$

$$u^{3} / 3 = e^{3x} / 3 + c / 3$$

$$u^{3} = e^{3x} + c; \qquad u = (e^{3x} + c)^{\frac{1}{3}};$$

$$y = uv = e^{x} (e^{3x} + c)^{\frac{1}{3}}$$

Приме р

Решить ДУ

$$3(xy'+y)=xy^2,\ y(1)=3. \qquad y=uv,\ y'=u'v+uv'.$$

$$3xu'v+3xuv'+3uv=xu^2v^2,\ 3xu'v+3u(xv'+v)=xu^2v^2.$$

$$xv'+v=0, \qquad 1)\ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\ \ln|v|=-\ln|x|,\ v=\frac{1}{x}.$$

$$u'\cdot v+u(v'+\frac{2}{x}v)=5x^2$$

$$2)\ 3xu'v=xu^2v^2,\ 3xu'\frac{1}{x}=xu^2\frac{1}{x^2},\ 3u'=\frac{u^2}{x},$$

$$3\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x},\ -\frac{3}{u}=\ln|x|+\ln C,\ u=-\frac{3}{\ln|Cx|}.$$

$$y=-\frac{3}{x\ln|Cx|}, \qquad u'\cdot v+u(v'+\frac{2}{x}v)=5x^2$$

$$y=-\frac{3}{x(\ln|x|-1)}.$$

$$u'\cdot v+u(v'+\frac{2}{x}v)=5x^2$$

пример

Решить ДУ

$$\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\left(e^{y}+x+x\cos y\right)dy=0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y. \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=P\left(x,y\right),$$

$$u=\int\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\varphi\left(y\right)=e^{x}+xy+x\sin y+\varphi\left(y\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+\varphi'\left(y\right)=Q\left(x,y\right)=x+x\cos y+e^{y},$$

$$\varphi'\left(y\right)=e^{y},\ \varphi\left(y\right)=e^{y},$$

$$e^{x}+xy+x\sin y+e^{y}=C.$$

приме р

Решить ДУ

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2 y + 4y^3)\,dy = 0, \qquad y(1) = 1$$

$$\begin{cases} P'_y(x;y) = (3x^2 + 6xy^2)'_y = 12xy, \\ Q'_x(x;y) = (6x^2 y + 4y^3)'_x = 12xy, \end{cases} \Rightarrow \quad P'_y(x;y) = Q'_x(x;y)$$

Выполнение критерия означает, что существует некая функция $U(x;y)$, для которой

$$\begin{cases} P(x;y) = 3x^2 + 6xy^2 = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ Q(x;y) = 6x^2 y + 4y^3 = \dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

Из первого равенства, интегрируя по х

$$U_1(x;y)=\int(3x^2+6xy^2)dx=x^3+3x^2y^2,$$

Из второго равенства, интегрируя по у

$$U_2(x;y)=\int(6x^2y+4y^3)dy=3x^2y^2+y^4$$

Искомая функция

$U(x;y)=U_1+$ **+(недостающие слагаемые из** $U_2)=x^3+3x^2y^2+y^4$

Общий интеграл уравнения

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c$$

Пример

Решить ДУ $x e^{y^2} dx + \left(x^2 y e^{y^2} + \mathrm{tg}^2 y \right) dy = 0.$

Здесь $P(x;y) = x e^{y^2}, \quad Q(x;y) = x^2 y e^{y^2} + \mathrm{tg}^2 y.$

Проверяем критерий: $P'_y = 2xye^{y^2} = Q'_x = 2xye^{y^2}.$

Частные производные равны. Данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Нужно найти функцию $U(x;y).$

Из $U'_x = P(x;y) = x e^{y^2}$ находим $U_1(x;y) = \int x e^{y^2} dx = \frac{x^2}{2} e^{y^2}.$

Из $U'_y = Q(x;y) = x^2 y e^{y^2} + \mathrm{tg}^2 y$ находим

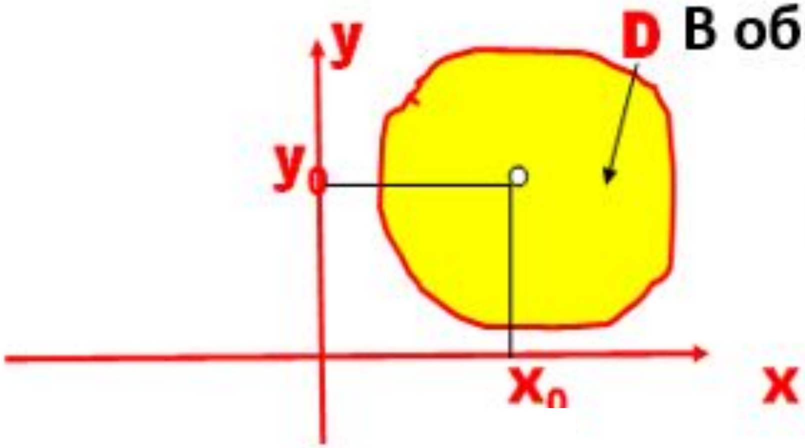
$$U_2(x;y) = \int \left(x^2 y e^{y^2} + \mathrm{tg}^2 y \right) dy = x^2 \frac{1}{2} e^{y^2} + \mathrm{tg} y - y.$$

вторая функция включает в себя первую, поэтому

$$U(x;y) = \frac{x^2}{2} e^{y^2} + \mathrm{tg} y - y.$$

Общий интеграл уравнения

$$\frac{x^2}{2} e^{y^2} + \mathrm{tg} y - y = C.$$



В общем случае ДУ n-го порядка можно записать в виде:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Теорема. О существовании единственного решения ДУ

Если в области D у дифференциального уравнения n-го порядка существуют непрерывные производные

$$y'; \; y^{(2)}; \; y^{(3)}; \quad y^{(n-1)},$$

то для любых начальных условий $x_0; y_0; y_0'; \ldots y_0^{(n-1)}$ из области D существует единственное решение ДУ(1), удовлетворяющее этим начальным условиям.

Уравнения высших порядков

ДУ 2-го порядка называется уравнение,

которое содержит независимую переменную x

искомую функцию y **и ее производные 1-го и 2-го порядка.**

Уравнение $y'' = f(x; y; y'),$

2-го порядка может быть записано в явной форме

если оно разрешено относительно старшей производной

или в неявной $F(x; y; y'; y'') = 0.$

Р е ш е н и е м дифференциального уравнения 2-го порядка

называется любая дважды дифференцируемая функция $y = y(x),$

которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество.

О б щ и м р е ш е н и е м уравнения 2-го порядка называется функция

$$y = y(x; C_1; C_2).$$

Заметим, что количество констант в общем решении уравнения равно порядку уравнения.

З а д а ч а К о ш и для уравнения состоит в нахождении частного решения уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Тип I. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x).$

Решение находится путем последовательного интегрирования.

$$y = \underbrace{\int(\int(\int(\ldots(\int}_{n\ \text{раз}} f(x)dx)\ldots)dx)dx)dx.$$

Пример. Решить ДУ $y^{(4)} = \sin x - 2x.$

$$y''' = \int y^{(4)}\,dx = \int(\sin x - 2x)\,dx = -\cos x - x^2 + C_1.$$

$$y'' = \int y'''\,dx = \int(-\cos x - x^2 + C_1)\,dx = -\sin x - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2.$$

$$y' = \int y''\,dx = \int(-\sin x - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2)\,dx =$$

$$= \cos x - \frac{x^4}{12} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

$$y = \int y'\,dx = \int(\cos x - \frac{x^4}{12} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3)\,dx =$$

$$= \sin x - \frac{x^5}{60} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 -$$

общее решение уравнения

Пример

$$y^{(4)} = \sin 2x$$

$$y''' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1$$

$$y'' = \int (-\frac{1}{2}\cos 2x + c_1)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

Пример

$$y'' = x.$$

$$y\big|_{x=2} = 0,\ \ y'\big|_{x=2} = 0.$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{2} + C_1 = 0, \\ \dfrac{8}{6} + 2C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

$$C_1 = -2,\ \ C_2 = 8/3.$$

$$y = \frac{x^3}{6} - 2x + 8/3.$$

Тип II. $F(x; y'; y'') = 0.$

$$y' = \mathrm{z}(x), \;\; y'' = (y')'_x = \mathrm{z}'(x)$$

Пример. Решить ДУ $y'' x \ln x - y' = 0.$

После подстановки получаем уравнение первого порядка

$$\mathrm{z}' x \ln x - \mathrm{z} = 0.$$

Разделяем переменные

$$\frac{d\mathrm{z}}{dx} x \ln x = \mathrm{z}; \qquad \frac{d\mathrm{z}}{\mathrm{z}} = \frac{dx}{x \ln x}, \qquad \int \frac{d\mathrm{z}}{\mathrm{z}} = \int \frac{dx}{x \ln x},$$

$$\ln|\mathrm{z}| = \ln|\ln x| + \ln C_1, \qquad y' = \mathrm{z} = C_1 \ln x.$$

$$y = \int y'_x \, dx = \int C_1 \ln x \, dx = C_1 \, x(\ln x - 1) + C_2 .$$

Тип III. $F(y; y'; y'') = 0.$

$$y'_x = p(y), \quad y''_{xx} = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Пример. Решить ДУ $y'' - y'e^y = 0.$

$$y'' - y'e^y = 0 \Rightarrow \left| y'_x = p(y), \ y''_{xx} = p'_y \, p \right| \Rightarrow \begin{array}{c} p'\,p - pe^y = 0 \ \Rightarrow \\ p(p' - e^y) = 0. \end{array}$$

1) $p = 0, \quad y'_x = 0, \quad \underline{y = const}.$

2) $\dfrac{dp}{dy} = e^y \ \Rightarrow \ \int dp = \int e^y\, dy \Rightarrow \ p = e^y + C_1,$

$$y' = e^y + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^y + C_1 \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y + C_1} = \int dx.$$

$$\frac{1}{C_1} \int \frac{\left(\left(C_1 + e^y\right) - e^y\right) dy}{e^y + C_1} = \int dx. \quad \frac{1}{C_1}\left(y - \ln\left|C_1 + e^y\right|\right) = x + C_2.$$

Пример. **Решить задачу Коши** $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}},\quad y(0)=y'(0)=0.$

$$y''=\frac{1}{\sqrt{y}}\Rightarrow\left|y'_x=p(y),\quad y''_x=p'_y\,p\right|\Rightarrow p'\,p=\frac{1}{\sqrt{y}}\Rightarrow\frac{dp}{dy}p=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int p\,dp=\int\frac{dy}{\sqrt{y}}\Rightarrow\frac{p^2}{2}=2\sqrt{y}+\frac{C_1}{2}\Rightarrow p=\pm\sqrt{4\sqrt{y}+C_1}.$$

Так как $y'(0)=p(0)=0,\quad y(0)=0,$

$$0=\pm\sqrt{4\sqrt{0}+C_1}\quad\Rightarrow\quad C_1=0.\quad y'=\pm\sqrt{4\sqrt{y}+0}=\pm2\sqrt[4]{y}\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm2\sqrt[4]{y}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{2\sqrt[4]{y}}=\pm dx\quad\Rightarrow\quad\frac{2}{3}\sqrt[4]{y^3}=\pm x+C_2.$$

Так как $y(0)=0,$ то $\quad\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{0^3}=\pm0+C_2\Rightarrow C_2=0.$

Частное решение $\quad\boxed{y=\left(\dfrac{3}{2}x\right)^{4/3}.}$

Комплексные числа

Комплексным числом Z называется выражение вида

$$z = \alpha + i\beta$$

где α **и** β **– действительные числа,**

а i **– мнимая единица.**

$$i^2 = -1$$

Два комплексных числа

$$z = \alpha + i\beta, \qquad \overline{z} = \alpha - i\beta$$

называются комплексно сопряженными.

Справедливо равенство

$$z \cdot \overline{z} = \alpha^2 + \beta^2$$

Пример.

1. Вычислить $\sqrt{-4}$
2. Решить уравнение $x^2 + 25 = 0$
3. Решить уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

Решение. 1.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot i^2} = 2i$$

2. $x^2 + 25 = 0$ $x^2 = -25$

$$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$$

3. $$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 = -16$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{-16}}{2} = 1 + 2i$$

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ **линейно независимы на I=(a,b), если существуют действительные числа** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, **не все равные нулю, такие, что для всех** $x \in \mathrm{I}$, **выполняется тождество**

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ **линейно зависимы, если это тождество выполняется лишь в случае, когда**

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

ТЕОРЕМА.

Для того, чтобы функции $y_1(x)\,,\, y_2(x)\,,\,\ldots\,,\, y_n(x)$ – были линейно независимы на $\mathrm{I}=(a,b)$ необходимо и достаточно, чтобы **определитель Вронского (вронскиан)** $\mathrm{W(x)}$ был отличен от нуля в каждой точке $x_0 \in \mathrm{I}$. То есть $\forall x_0 \in \mathrm{I}$

$$\mathrm{W}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример. **Найти определитель Вронского системы функций на указанном интервале:** $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x;\ \mathrm{I}=(-\infty,\ \infty).$

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^x x & e^x x^2 \\ e^x & e^x(x+1) & e^x(x^2+2x) \\ e^x & e^x(x+2) & e^x(x^2+4x+2) \end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix}=e^{3x}(4x+2-4x)=2e^{3x}\neq 0$$

$$\forall x\in(-\infty,+\infty).$$

Благодарю за внимание!