5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

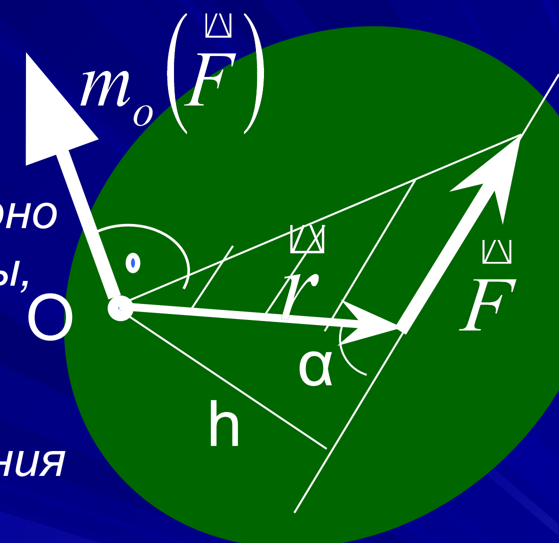
5.1. Момент силы относительно центра как вектор

В случае пространственной задачи плоскости действия моментов сил в общем случае различаются и не всегда совпадают с главными плоскостями.
Для компактного представления момента силы относительно центра, когда кроме модуля момента следует указать его плоскость действия и направление, используют векторное представление момента:

Действительно, если векторно перемножить радиус-вектор и силу,

$$\vec{m}_o\left(\vec{F}\right) = \bar{r} \times \bar{F}$$

то получим третий вектор, направленный перпендикулярно плоскости, в которой находятся перемножаемые векторы, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение первого вектора со вторым видно было против часовой стрелки.



Нетрудно убедиться в том, что модуль этого произведения действительно равен модулю момента силы, так:

$$\left|\bar{r} \times \bar{F}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h \quad , \quad \textit{т.к.} \quad r \cdot \sin\alpha = h$$

момент силы относительно центра изображается вектором M_o, приложенным к центру О и направленным нормально плоскости, задаваемой вектором силы F и центром О, в ту сторону, откуда видится вращение вектора силы относительно центра против хода часовой стрелки

5.2. Моменты силы относительно осей

Получим выражения моментов силы относительно координатных осей x, y, z путем сравнения выражений момента силы:

1) полученного из векторного произведения

$$\vec{m}_o\left(\vec{F}\right)=\bar{r}\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=$$

$$\vec{i}\left(F_z y-F_y z\right)+\vec{j}\left(F_x z-F_z x\right)+\vec{k}\left(F_y x-F_x y\right)$$

x, y, z – координаты точки приложения силы;
F_x, F_y, F_z – проекции силы на оси

2) полученного из геометрического представления вектора момента как суммы составляющих по осям

$$\vec{m}_o\left(\vec{F}\right)=\vec{m}_x\left(\vec{F}\right)+\vec{m}_y\left(\vec{F}\right)+\vec{m}_z\left(\vec{F}\right)=$$

$$\vec{i}\cdot m_x\left(\vec{F}\right)+\vec{j}\cdot m_y\left(\vec{F}\right)+\vec{k}\cdot m_z\left(\vec{F}\right)$$

Сравнивая правые части этих тождественных выражений, приравняем их сомножители при соответствующих единичных векторах ***i, j, k,***
получим выражения моментов силы относительно осей

$$\begin{cases} m_x\left(\vec{F}\right)=F_z y-F_y z\\ m_y\left(\vec{F}\right)=F_x z-F_z x\\ m_z\left(\vec{F}\right)=F_y x-F_x y\end{cases}$$

5.3. Приведение пространственной системы сил к центру

Задача о приведении пространственной системы сил к центру аналогична уже рассмотренной нами задаче о приведении плоской системы сил к центру. Единственное отличие заключается в использовании векторного представления момента силы. Т.о. и в этом случае мы получаем в результате параллельного переноса сил в центр приведения две сходящихся системы векторов:1 –система сил, 2 – система векторов моментов. Каждую систему заменим на вектор суммы:

$$\overline{R} = \sum_{n} \overline{F}_k, \qquad \overline{M}_o = \sum_{n} \overline{m}_o(\overline{F}_k)$$

любая пространственная система сил, действующих на твердое тело, при приведении к произвольному центру заменяется главным вектором R, равным геометрической сумме сил системы, и главным моментом Mo, равным геометрической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения

Отсюда получим важный для практики вывод:

две пространственные системы сил с одинаковыми R и M_o являются статически эквивалентными

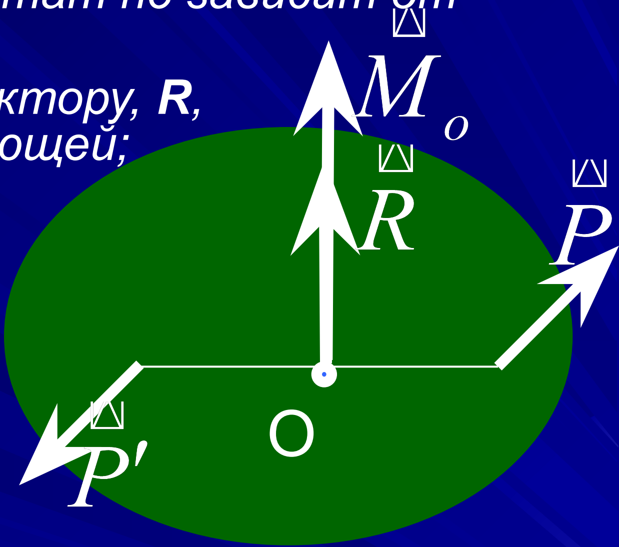
Частные случаи приведения произвольной пространственной системы сил:

Данная задача была рассмотрена подробно ранее для плоской системы сил. Для пространственной системы сил получены похожие результаты.

1) R=0, Mo=0 - *система сил находится в равновесии;*

2) R=0, Mo≠0 *- система сил приводится к паре, результат не зависит от выбора центра приведения;*

3) R≠0, Mo=0 - *система сил приводится к главному вектору,* ***R****, выполняющему функции равнодействующей;*

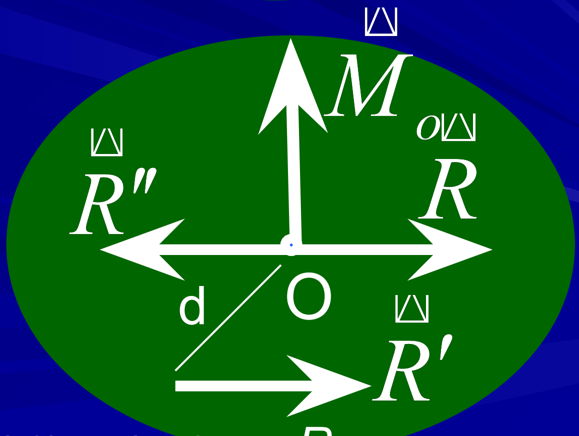


4) R≠0, Mo≠0:

а) ***Mo|| R*** *- «динамический винт». Под действием такой системы свободное тело совершает винтовое движение;*

Чтоб нагляднее было видно вращательное движение тела под действием «динамо», представим пару M_o в виде двух сил P, P'

б) ***Mo⊥R*** *- система сил приводится к равнодействующей,* ***R****, отстоящей от центра приведения (·)О на расстоянии d*



Представим M_o как две силы R',R'' , модуль которых приравняем R, тогда $d=M_o/R$.

Силы R и R'' можно рассматривать как уравновешенную систему, которую по Аксиоме 2 можно снять, тогда останется только сила R', которую можно рассматривать как силу R

5.4. Условия равновесия пространственной системы сил

Необходимым и достаточным условием равновесия системы сил является ***R=M$_o$=0***. *В трехмерной (пространственной) задаче любой вектор можно определить через его проекции*

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2},$$

которые равны суммам проекций слагаемых векторов (см. теорему о проекции вектора суммы).
Отсюда получаем аналитическое выражение условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_n F_{kx} = 0 \\ &\sum_n F_{ky} = 0 \\ &\sum_n F_{kz} = 0 \\ &\sum_n m_x(\overline{F}_k) = 0 \\ &\sum_n m_y(\overline{F}_k) = 0 \\ &\sum_n m_z(\overline{F}_k) = 0 \end{aligned}\right\}$$

*С механической точки зрения первые три уравнения устанавливают отсутствие поступательного движения (**R**=0), а последние три - углового перемещения тела (**M$_o$**=0).*

*В случае ССС , когда система заменяется на вектор суммы, **R**, – равнодействующую, условия равновесия будут представлены только системой первых трех уравнений.*

В случае системы параллельных сил условие равновесия будет состоять также из трех уравнений: из одного уравнения суммы проекций сил на ту ось, параллельно которой ориентированы силы системы, и двух уравнений моментов относительно осей, непараллельных линиям действия сил системы.